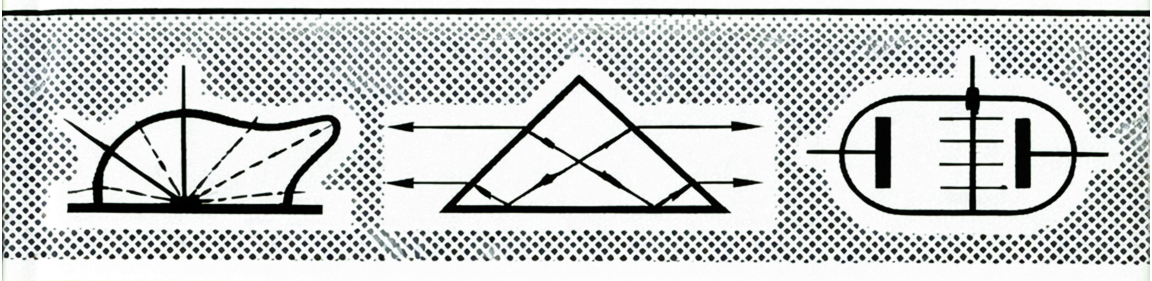

S. FRISH, A. TIMOREVA

Curso de Física General

TOMO 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

С. ФРИШ, А. ТИМОРЕВА

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ III

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

S. FRISH, A. TIMOREVA

CURSO DE FISICA GENERAL

TOMO III

Segunda edición

TRADUCIDO DEL RUSO
por el ingeniero ANTONIO MOLINA GARCIA

MOSCU

Editorial Mir

CDU 530 (075.8) = 60

На испанском языке

Impreso en la URSS
Derechos reservados
1973

INDICE

SÉPTIMA PARTE

OPTICA

Capítulo XXII. Propiedades principales de la luz

§ 250. Introducción 9
§ 251. Leyes de la reflexión y refracción de la luz 16
§ 252. Reflexión total 21
§ 253. Principio de Fermat 24
§ 254. Medición de la velocidad de la luz 28
§ 255. Teoría ondulatoria de la luz. Principio de Huygens . . . 36
§ 256. Interferencia de la luz 40
§ 257. Formación de ondas estacionarias 44
§ 258. Polarización de la luz 46
§ 259. Teoría electromagnética de la luz 50
§ 260. Energía y cantidad de movimento del flujo luminoso. Presión luminosa 56

Capítulo XXIII. Interferencia y difracción de la luz

§ 261. Procedimientos para observar la interferencia de la luz 61
§ 262. Interferencia por reflexión en una lámina transparente 65
§ 263. Aplicación de los fenómenos de interferencia 75
§ 264. Interferómetros. Su utilización 78
§ 265. Interferomotría 83
§ 266. Principio de Huygens-Fresnel 88
§ 267. Composición gráfica de las amplitudes 96
§ 268. Difracción por obstáculos opacos 100
§ 269. Difracción de rayos paralelos 108
§ 270. Difracción por varias rendijas. Redes de difracción . . . 115
§ 271. Dispersión y poder separador de una red de difracción . . 122
§ 272. Espectroscopia de gran poder separador 126
§ 273. Difracción por redes espaciales 130
§ 274. Espectroscopia de rayos X y análisis estructural röentgenográfico 136

Capítulo XXIV. Paso de la luz a través de medios isótropos y de sus superficies de separación

§ 275. Interacción entre la luz y el medio 144
§ 276. Absorción de la luz 145
§ 277. Paso de la luz a través del límite entre dos medios transparentes 148
§ 278. Reflexión de la luz por los metales 160
§ 279. Dispersión de la luz 163
§ 280. Observación de la dispersión 170
§ 281. Uso de los aparatos espectroscópicos 176
§ 282. Velocidad de grupo de la luz 181

§ 283. Propagación de la luz en una sustancia ópticamento heterogénea 184
§ 284. Paso de la luz a través de sustancias turbias 186

Capítulo XXV. Paso de la luz a través de sustancias anisótropas

§ 285. Paso de la luz a través de una sustancia anisótropa . . . 191
§ 286. Superficies de onda en un cristal uniáxico 195
§ 287. Construcción de los rayos ordinario y extraordinario en los cristales uniáxicos 198
§ 288. Cristales biáxicos 204
§ 289. Aparatos polarizadores 208
§ 290. Interferencia de rayos polarizados. Polarización elíptica y circular 212
§ 291. Una lámina de cristal entre dos nicoles 217
§ 292. Doble refracción artificial 221
§ 293. Doble refracción en un campo eléctrico 223
§ 294. Giro del plano de polarización 226
§ 295. Giro magnético del plano de polarización 230

Capítulo XXVI. Propagación de la luz en medios en movimiento

§ 296. Experimentos con cuerpos en movimiento 234
§ 297. Teoría de la relatividad 240
§ 298. Consecuencias de la transformación de la teoría de la relatividad 247
§ 299. La óptica de los cuerpos en movimiento y la teoría de la relatividad 250
§ 300. Mecánica de la teoría de la relatividad 257

Capítulo XXVII. Flujo luminoso y termodinámica de la radiación

§ 301. Sensibilidad relativa. Flujo luminoso 264
§ 302. Intensidad luminosa, luminosidad e iluminación 268
§ 303. Luminancia (brillo fotométrico) 272
§ 304. Unidades de medición de las magnitudes fotométricas . . 276
§ 305. Percepción de la luz 280
§ 306. Medición de las magnitudes fotométricas 286
§ 307. Radiación de temperatura 292
§ 308. Cuerpo negro (radiador ideal) 296
§ 309. Leyes de la radiación del cuerpo negro 300
§ 310. Distribución de la emitancia del cuerpo negro entre las longitudes de onda 302
§ 311. Fuentes de luz 305
§ 312. Pirometría óptica 310

Capítulo XXVIII. Optica geométrica aplicada

§ 313. Introducción 315
§ 314. Reflexión y refracción en una superficie plana 318
§ 315. Refracción en una superficie esférica 321
§ 316. Aumento de una superficie esférica refringente 326
§ 317. Lentes delgadas 330
§ 318. Sistema de superficies centradas. Planos principales . . . 333
§ 319. Posiciones de los focos y de los planos principales de un sistema 339

§ 320. Sistema telescópico 345
§ 321. Defectos de los sistemas ópticos y procedimientos para corregirlos 348
§ 322. Aberración cromática 355
§ 323. Flujo luminoso que pasa por un sistema óptico 358
§ 324. Pupilas de entrada y de salida 362
§ 325. Sistema óptico del ojo 366
§ 326. Luminancia subjetiva 370
§ 327. Instrumentos ópticos visuales 371
§ 328. Aparatos proyectores e iluminadores 380
§ 329. Poder separador de los instrumentos ópticos 384
§ 330. Fenómenos de difracción en el microscopio 388

Capítulo XXIX. Fotones

§ 331. Teoría clásica de la radiación del electrón y límites dentro de los cuales puede aplicarse 393
§ 332. Efecto fotoeléctrico 398
§ 333. Fórmula de Einstein y su comprobación experimental . . 403
§ 334. Propiedades corpusculares de la luz 407
§ 335. Aplicaciones prácticas del efecto fotoeléctrico 412
§ 336. Difusión de los rayos X 415
§ 337. Fotoquímica 422

OCTAVA PARTE

FISICA ATOMICA

Capítulo XXX. Estructura de los átomos y de las moléculas

§ 338. Introducción 426
§ 339. Modelo nuclear del átomo 429
§ 340. Leyes de los espectros atómicos 438
§ 341. Naturaleza de los términos espectrales 443
§ 342. Estructura del átomo de hidrógeno y de los iones semejantes a él 449
§ 343. Orbitas elípticas 459
§ 344. Cuantificación espacial; momentos magnéticos de los átomos 464
§ 345. Influencia de los campos magnéticos y eléctricos externos sobre el espectro 468
§ 346. Espectros de los metales alcalinos 474
§ 347. Dificultades de la teoría de Bohr; hipótesis del spin del electrón 478
§ 348. Modelo vectorial del átomo 481
§ 349. Sistema periódico de Mendeléiev 485
§ 350. Constitución de las capas electrónicas 490
§ 351. Espectros de rayos X 495
§ 352. Intensidad de las rayas espectrales. Probabilidades de transición 503
§ 353. Estructura de las moléculas 509
§ 354. Espectros de vibración de las moléculas 512
§ 355. Espectros de rotación de las moléculas 519
§ 356. Estados electrónicos de las moléculas diatómicas 525
§ 357. Disociación de las moléculas 527
§ 358. Influencia de la isotopía en los espectros moleculares . . . 533
§ 359. Difusión de combinación de la luz 536
§ 360. Luminiscencia de los cuerpos líquidos y sólidos 541

Capítulo XXXI. Mecánica cuántica

§ 361. Propiedades ondulatorias de las partículas elementales 548
§ 362. Ecuación de Schrödinger 553
§ 363. Límites de la aplicación de la teoría clásica 558
§ 364. Partículas en una caja de potencial. Paso a través de una barrera de potencial 564
§ 365. El átomo de hidrógeno y la mecánica cuántica 568
§ 366. Estadísticas clásica y cuántica 572

Capítulo XXXII. Transformación nuclear natural y artificial

§ 367. Núcleo atómico y su característica 577
§ 368. Radiactividad natural 581
§ 369. Ley de desplazamiento 585
§ 370. Métodos de observación de los fenómenos radiactivos . . . 589
§ 371. Desintegración alfa 594
§ 372. Espectros de rayos γ y la conversión interna 598
§ 373. Desintegración beta 602
§ 374. Desintegración nuclear por choque con partículas α . . . 606
§ 375. Neutrones 611
§ 376. Radiactividad artificial. Positrones 616
§ 377. Transformaciones nucleares producidas por partículas aceleradas artificialmente 621
§ 378. Momentos nucleares 629
§ 379. Estructura de los núcleos atómicos 633
§ 380. Fisión nuclear. Obtención de la reacción en cadena 638
§ 381. Energética nuclear 641
§ 382. Rayos cósmicos 646
§ 383. Mesones. Origen de los rayos cósmicos 651
§ 384. Propiedades de las partículas elementales 657

Apéndice 665

Indice alfabético 671

SEPTIMA PARTE

OPTICA

CAPITULO XXII

Propiedades principales de la luz

§ 250. Introducción. El propósito inicial de la Optica o estudio de la luz fue responder a la pregunta, ¿por qué ve el hombre los objetos que le rodean?

Algunos filósofos de la Grecia antigua suponían por ejemplo, que la percepción de los objetos con los ojos era algo análogo, hasta cierto punto, a su percepción por medio del tacto. Estos filósofos opinaban que de los ojos humanos salían unos tentáculos invisibles que se dirigían al objeto que miraban. Esta forma de imaginarse el fenómeno es propia de cualquier mentalidad ingenua, como lo demuestran metáforas tan ordinarias como las de «palpo con la vista», «una mirada penetrante», etc. Pero en la misma Grecia antigua se expresó también la opinión de que la luz procede de los cuerpos. Ciertos cuerpos, en condiciones determinadas, son fuentes de luz, la cual al llegar a nuestros ojos, produce la sensación de la vista. Otros cuerpos pueden verse gracias a que absorben la luz o cambian la dirección en que ésta se propaga (reflejándola o dispersándola). De esta forma la palabra «luz» comenzó a utilizarse para designar el fenómeno objetivo que tiene lugar fuera de nosotros y que al influir sobre el ojo provoca la sensación subjetiva de la vista. La Física generalizó posteriormente este concepto de la «luz» haciéndolo extensivo a un conjunto más amplio de fenómenos objetivos de igual naturaleza producidos por la propagación de ondas electromagnéticas cortas, independientemente de que

sean capaces o no de producir en el hombre la sensación subjetiva de la vista. En esto sentido será en el que utilizaremos la palabra «luz» en nuestro curso.

Los sabios griegos señalaron como una de las principales cualidades de la luz *su propagación rectilínea en las sustancias homogéneas.* Esta propagación rectilínea se deduce del hecho de que, cuando el foco luminoso es pequeño, los objetos opacos producen sombras bien definidas. La forma que tiene la sombra recogida sobre una pantalla corresponde a la de la proyección geométrica del objeto obtenida por medio de un haz de rectas que parten de

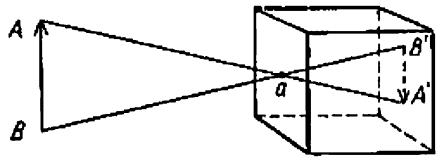

Fig. 1. Obtención de la imagen en la cámara obscura.

un centro de proyección cuya posición coincide con la del foco luminoso. En estas condiciones la recta geométrica puede representarse físicamente con ayuda de un hilo tensado fuertemente. Cuando las distancias son tan grandes que es imposible utilizar hilos, se recurre al razonamiento inverso, es decir, la línea recta se identifica con el sentido de la propagación de la luz en una sustancia homogénea. De esta forma, los problemas de la reproducción física de una recta geométrica y de la propagación rectilínea de la luz están íntimamente ligados entre sí.

Otro hecho que pone de manifiesto la propagación rectilínea de la luz es el que da la posibilidad de conseguir imágenes de los objetos a través de orificios pequeños. Esta imagen puede obtenerse por medio de la «cámara obscura» que fue descrita en el siglo XVI. Esta cámara no es más que una caja en una de cuyas paredes se practica un pequeño orificio a (fig. 1). El rayo de luz procedente del punto A del objeto, al propagarse en línea recta, pasa a través del orificio a y produce una pequeña huella luminosa en el punto A' de la pared trasera de la cámara obscura. El conjunto de puntos luminosos así producidos por los rayos que parten de distintos sitios del objeto AB reproducen su imagen invertida $A'B'$.

Otra cualidad de la luz que hay que destacar es la propiedad que tienen sus rayos de no perturbarse entre sí cuando se cruzan. En condiciones normales los rayos que parten de objetos diferentes se cortan entre sí multitud de veces, pero estas intersecciones no impiden que cada uno de los rayos se propague sin depender de los demás. Los rayos de los objetos situados a un lado del obser-

vador cortan a los procedentes de los objetos que dicho observador tiene enfrente, pero esta circunstancia no impide que estos últimos sean vistos claramente.

Hasta comienzos del siglo XIX el desarrollo de la Optica se basó principalmente en la idea de que los rayos de luz se propagan en línea recta, a pesar de que ya en el siglo XVII se habían puesto de manifiesto hechos que indicaban cómo en realidad existen casos que difieren de dicha propagación rectilínea de la luz. Por ejemplo, se observó que la imagen obtenida en la cámara obscura perdía nitidez cuando el orificio *a* se hacía demasiado pequeño. Esta pérdida de nitidez puede explicarse suponiendo que, cuando las dimensiones del orificio son pequeñas, los rayos se desvían sensiblemente después de atravesarlo. También se observó que cuando la luz pasa a través de orificios muy estrechos practicados en una pantalla opaca, detrás de dicha pantalla se produce una serie sucesiva de zonas claras y oscuras. Asimismo se producen series consecutivas de zonas claras y oscuras en los bordes de las sombras obtenidas con focos luminosos pequeños. En la actualidad estos fenómenos, conocidos con los nombres de interferencia y difracción de la luz, están perfectamente estudiados. Las zonas que se forman en los bordes de las sombras son más anchas cuando el pequeño foco de luz y la pantalla en que se observa la sombra están alejados considerablemente del objeto. En la fig. 1 (véase el apéndice) se muestra una fotografía obtenida por B. Arkádiev de la sombra de una mano que sostiene un disco. La fotografía 1,*a* representa el caso en que la mano se encuentra entre un foco puntual y una pantalla, situados entre sí a 2 m de distancia, y la 1,*b*, el caso en que la distancia entre el foco luminoso y la pantalla es de 7 m. Como puede verse, en este último caso la sombra no coincide con la proyección geométrica del objeto; obsérvese la mancha blanca que aparece en el centro de la sombra del disco. Estas fotografías ponen de manifiesto claramente que existen discrepancias apreciables con respecto a la propagación rectilínea de la luz. A pesar de esto, en un gran número de casos puede considerarse que la luz se propaga en línea recta con bastante exactitud.

Esta propagación rectilínea hizo pensar que la luz era un flujo de partículas que partiendo de un foco luminoso se movían rectilínea y uniformemente a través de las sustancias homogéneas. Pero esta hipótesis no podía explicar satisfactoriamente ni el hecho que hemos indicado de la desviación de la luz por detrás de los obstáculos ni la propiedad de los rayos luminosos de no perturbarse mutuamente cuando se cruzan. A finales del siglo XVII escribía Huygens: «Si tenemos en cuenta... que unos rayos de luz pasan a través de otros sin estorbarse entre sí, queda absolutamente claro que cuando vemos un objeto luminoso no es porque exista un transporte de materia que desde dicho objeto llega ano sotros, a través

del aire, lo mismo que una bala o una flecha». Al desechar la hipótesis corpuscular de la luz Huygens supuso que ésta debía tener naturaleza ondulatoria, es decir, que los focos luminosos originan ondas que se propagan en un medio elástico, llamado éter, que llena todo el espacio accesible a nuestras observaciones. De esta forma, a finales del siglo XVII fueron propuestas dos teorías de la luz: una de ellas, la *corpuscular*, consideraba la luz como un flujo de partículas emitidas en línea recta por los cuerpos luminosos y la otra, la *ondulatoria*, consideraba la luz como una propagación de ondas en un medio hipotético continuo llamado éter.

Generalmente se suele reconocer como autor y defensor de la teoría corpuscular a Newton, a pesar de que en su célebre «Optica», cuya primera edición apareció en el año 1704, utilizó tanto las ideas corpusculares como las ondulatorias. Newton consideraba que el argumento fundamental en pro de la teoría corpuscular era el de la propagación rectilínea de la luz. No obstante, él veía también la dificultad con que tropezaba dicha teoría al intentar explicar las franjas claras y oscuras que se forman en los bordes de las sombras. Newton tuvo que admitir que los rayos de luz pueden tener «períodos de reflexión fácil y períodos de paso fácil». Newton hizo intentos de unificar ambas teorías. A propósito de esto escribió: «Cuando un rayo de luz incide sobre la superficie de un cuerpo transparente cualquiera y se refracta o refleja en él, ¿no puede ocurrir que con ello provoque la formación de ondas u oscilaciones?... Y, ¿no es posible que estas ondas adelanten a los rayos de luz y que al ir adelantándolos sucesivamente sean ellas las que den lugar a los períodos de reflexión fácil o de paso fácil?»

Huygens se opuso a la teoría corpuscular. En su «Tratado de la luz», aparecido en el año 1690, escribía que la luz «se difunde lo mismo que el sonido, es decir, formando superficies esféricas u ondas: llamo ondas a estas superficies por su semejanza con las que se originan en el agua cuando en ella cae una piedra».

M. Lomonósov fue partidario consecuente de la teoría ondulatoria de la luz e intentó relacionar los movimientos ondulatorios luminosos con los de las partículas de la materia. En 1753 Lomonósov dio a conocer a la Academia de Ciencias su propósito de realizar experimentos con una cuerda vibrante en el vacío, para comprobar si dichas vibraciones producen emisión de luz. Posteriormente fueron llevados a cabo estos experimentos, los cuales, aunque dieron resultados negativos, tienen gran interés histórico como primer intento de demostrar directamente la teoría ondulatoria de la luz. En el año 1756, en la Asamblea solemne de la Academia de Ciencias, M. Lomonósov pronunció su «Discurso sobre el origen de la luz o nueva teoría sobre los colores». En este Discurso criticó la teoría corpuscular (o de la «fluencia» de las partículas del éter, según expresión de Lomonósov) y dijo: «Por esto, si el éter no puede

tener movimiento de traslación (fluencia) y el de rotación origina calor sin luz, solamente queda un tercer movimiento del éter, el oscilatorio, que pueda ser causa de la luz».

Pero a pesar de que las teorías de Huygens y de Lomonósov establecieron verdaderamente la naturaleza ondulatoria de la luz, aún no contenían de una forma precisa la característica principal del proceso ondulatorio, es decir, su doble periodicidad, en tiempo y en espacio, ni la posibilidad que de ella se deduce de explicar los fenómenos de la interferencia y de la difracción de la luz. Huygens llegó a negar la periodicidad de las ondas luminosas escribiendo que «...no hay que figurarse que estas ondas se suceden unas a otras a distancias iguales». La periodicidad del proceso luminoso en tiempo y en espacio, característica de las oscilaciones que se propagan, fue formulada concretamente y por vez primera por el miembro de la Academia de San Petersburgo L. Euler. Pero los fenómenos de la interferencia y difracción de la luz solamente pudieron explicarse, basándose en esta teoría, después de los trabajos de Young y Fresnel, llevados a cabo a principios del siglo XIX. Entonces se demostró que la luz se propaga por ondas de longitud muy pequeña: la luz visible, es decir, la que puede ser percibida por el ojo humano, tiene una longitud de onda comprendida entre los límites de 0,76 μ a 0,4 μ (según los colores), es decir, una longitud del orden de cienmilésimas de centímetro. A esta pequeñez de la longitud de onda es a la que se debe que la desviación que experimenta la luz cuando bordea obstáculos en condiciones normales sea tan insignificante que parezca que se propaga en línea recta (véase el § 266).

La teoría ondulatoria de la luz admitida en la primera mitad del siglo XIX explicaba las oscilaciones luminosas como vibraciones elásticas de un medio continuo constituido por el éter universal. Después del descubrimiento de las ondas electromagnéticas por Maxwell y Hertz (t. II, § 246) se logró demostrar que las ondas luminosas son ondas electromagnéticas de pequeña longitud. De esta forma surgió la *teoría electromagnética de la luz*, que desempeñó un gran papel en el desarrollo de toda la Física a finales del siglo XIX y comienzos del XX. La teoría electromagnética de la luz puso de manifiesto la unidad de los fenómenos luminosos y electromagnéticos y confirmó una vez más el principio fundamental del materialismo dialéctico, la profunda concatenación de todos los fenómenos de la naturaleza.

En los párrafos sucesivos de este curso examinaremos primeramente las propiedades fundamentales de la luz desde el punto de vista de su propagación rectilínea y después daremos a conocer los hechos que sirvieron de base para establecer la naturaleza ondulatoria de la luz y la electromagnética de las ondas luminosas.

Los físicos rusos y soviéticos han contribuido notablemente al desarrollo de los conocimientos sobre la luz. A principios del siglo

XIX V. Petrov estudió, de la forma más completa que nadie lo hiciera hasta él, el fenómeno de la luminiscencia de los cuerpos sólidos y líquidos (§ 360). En el año 1888 A. Stoliétov descubrió el fenómeno que denominó «actino-eléctrico». Este fenómeno, que ahora se conoce con el nombre de efecto fotoeléctrico, consiste en la emisión espontánea de electrones por cuerpos sometidos a la acción de la luz; este acontecimiento jugó un importante papel en el desarrollo de nuestros conocimientos sobre la naturaleza de la luz. A. Bielopolski y B. Golitzin fueron los primeros en confirmar experimentalmente la relación que existe entre la longitud de una onda luminosa y la velocidad de traslación del foco que la emite (efecto Doppler, véase t. I, § 113). En 1901 P. Liébedev demostró con sus experimentos, extraordinariamente precisos y brillantes, la existencia de la presión luminosa vaticinada por la teoría electromagnética de la luz. D. Rozhdiéstvenski realizó en los años 1910-1912 la investigación de la dispersión anómala de la luz que se reconoce como clásica.

Las investigaciones llevadas a cabo a finales del siglo XIX y comienzos del XX revelaron que al variar la longitud de las ondas se producen cambios cualitativos en las propiedades de la luz.

Los estudios concretos realizados posteriormente sobre la distribución de la energía en el espectro del cuerpo negro (§ 331) y sobre el efecto fotoeléctrico (§ 333) pusieron de manifiesto que las radiaciones de pequeña longitud de onda (como la de los rayos de la luz visible y otros más cortos) tienen propiedades que sobrepasan el marco de los puntos de vista clásicos. En 1900 Planck lanzó la hipótesis de que la luz es emitida en porciones discretas cuya energía es igual a $h\nu$, donde ν es la frecuencia de la luz y h la constante de Planck, igual a $6{,}624 \cdot 10^{-27}$ ergios·s. Einstein demostró en 1905 que las regularidades fundamentales del efecto fotoeléctrico se explican inmediatamente suponiendo que la luz es absorbida en estas mismas porciones discretas $\varepsilon = h\nu$. De esta forma quedó establecido que el *flujo luminoso tiene estructura discontinua*. Esta circunstancia condujo de nuevo a la idea de los corpúsculos luminosos, los cuales recibieron el nombre de *fotones*. Cada fotón tiene una energía determinada y una determinada cantidad de movimiento. La energía del fotón es tanto mayor cuanto mayor es la frecuencia ν. En las emisiones de baja frecuencia (rayos infrarrojos invisibles) la energía de los fotones es tan pequeña que es muy difícil de descubrir la estructura discontinua de estos rayos; prácticamente sólo manifiestan propiedades ondulatorias. En la luz visible la energía de los fotones es mayor y sus rayos presentan simultáneamente propiedades ondulatorias y corpusculares. Cuando la longitud de onda de los rayos es muy pequeña (rayos X y rayos de elementos radiactivos) la energía de los fotones es muy grande relativamente y sus propiedades corpusculares se observan con facilidad.

La luz tiene a la vez propiedades corpusculares y ondulatorias. El desarrollo ulterior de la Física ha demostrado que esta dualidad de la naturaleza de la luz no es sólo inherente a ella, sino que es extensiva a cualquier flujo de «partículas» elementales, como átomos aislados, electrones, etc. Desde el punto de vista de una ciencia que pretenda limitarse a concepciones mecanicistas esta dualidad es incomprensible. Por eso esta dualidad de la naturaleza de la luz sirvió de pretexto a muchos físicos idealistas para renunciar a las concepciones materialistas, para intentar oponer la «luz» a la «materia», para desistir del principio de la causalidad, etc.

La inconsistencia de estas conclusiones es evidente. La dejación de las concepciones mecanicistas de la Física clásica no significa de ninguna manera el abandono de la concepción materialista del mundo. Lenin, en su libro «Materialismo y Empiriocriticismo», escribía*): «Desde luego, es del todo absurdo decir que el materialismo tenga por «menor» la realidad de la conciencia o afirme forzosamente el cuadro mecánico y no el electromagnético, ni cualquier otro cuadro infinitamente más complejo del mundo, como *materia en movimiento*». La síntesis de las propiedades ondulatorias y corpusculares puede hacerse únicamente sobre la base del materialismo dialéctico, el cual afirma que en todo fenómeno natural se manifiestan contradicciones, pero que estas contradicciones no excluyen, sino que presuponen su unidad dialéctica.

Los físicos soviéticos han desempeñado un papel muy importante en el desarrollo de la nueva teoría de la luz.

A. Ioffe y N. Dobronrávov realizaron una serie de experimentos sobre el efecto fotoeléctrico elemental, los cuales confirmaron directamente que la energía luminosa es absorbida en porciones discretas cuya magnitud viene determinada por el producto de la constante de Planck h por la frecuencia de la radiación luminosa ν.

S. Vavílov elaboró un procedimiento que permite descubrir por medio de observaciones visuales las fluctuaciones de los flujos luminosos débiles, debidas a su estructura discontinua.

D. Rozhdiéstvenski hizo una gran aportación al desarrollo de la Espectroscopia con sus trabajos sobre la dispersión anormal o anómala y sobre la teoría de los átomos.

Los físicos moscovitas L. Mandelshtam y G. Landsberg descubrieron una nueva forma de difusión de la luz, que recibió el nombre de difusión de combinación**), fenómeno muy importante para comprender los procesos de interacción que existen entre la luz y la materia. N. Básov y A. Prójorov emplearon la emisión estimulada para obtener los generadores cuánticos o «laser».

---

*) V. I. Lenin, «*Materialismo y empiriocriticismo*», ed. en español, Moscú, 1948, pág. 321.

**) Se suele llamar «efecto Raman» (véase el § 359). (*N. del T.*)

Los físicos soviéticos nunca han separado la teoría de la práctica. La industria óptica soviética, basándose en los últimos datos científicos, ha alcanzado éxitos extraordinarios y juega un gran papel en la economía nacional. Las ondas luminosas se emplean para realizar mediciones longitudinales exactas y para comprobar los artículos más precisos; el efecto fotoeléctrico encuentra aplicación en las ramas más diversas de la técnica; los espectros atómicos y moleculares, la difusión de combinación de la luz y otros fenómenos ópticos se utilizan en los métodos modernos de análisis para determinar la composición de los distintos materiales. El campo de aplicación práctica de los fenómenos ópticos se ensancha de día en día.

§ 251. Leyes de la reflexión y refracción de la luz. Las primeras leyes de los fenómenos ópticos que se establecieron se basaban en la idea de que la luz está formada por rayos rectilíneos. Estas leyes se referían a los cambios de dirección que experimenta la luz al propagarse, cuando se refleja o cuando pasa de un cuerpo transparente a otro.

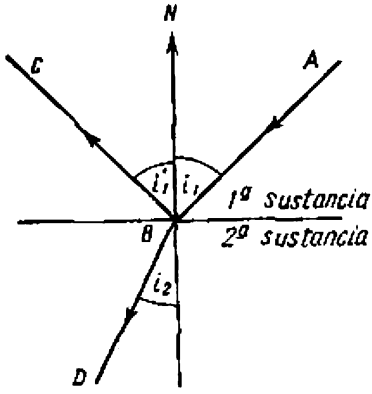

Fig. 2. Reflexión y refracción de los rayos en la superficie de separación de dos sustancias transparentes.

El caso más simple de cambio de dirección de la luz es el que se observa cuando ésta atraviesa la superficie plana y lisa que separa dos cuerpos transparentes (dipolo plano), por ejemplo, el aire y un vidrio o un vidrio y el agua. En este caso el rayo incidente AB (fig. 2) se divide en dos, uno reflejado BC y otro refractado BD.

La ley que determina la dirección del rayo reflejado era conocida ya por Euclides (en el siglo III a. de n.e.). *El rayo reflejado BC se encuentra en el mismo plano que el incidente AB y que la perpendicular BN* levantada en el punto de incidencia, pero por el lado opuesto a esta perpendicular; *el ángulo de reflexión i'_1 es igual al ángulo de incidencia i_1*:

$$i'_1 = i. \qquad (1)$$

La ley de la refracción no fue formulada exactamente hasta principios del siglo XVII, es decir, mucho después que la de la reflexión. Según esta ley *el rayo refractado BD* (fig. 2) *se encuentra en el mismo plano que el rayo incidente AB y que la perpendicular BN levantada en el punto de incidencia; la razón del seno del ángulo de incidencia i_1 al seno del ángulo de refracción i_2 es una magnitud cons-*

tante para dos medios dados:

$$\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2} = n_{21}. \qquad (2)$$

La magnitud n_{21} se llama *índice relativo de refracción* del segundo medio con relación al primero.

La experiencia demuestra que si un rayo que parte del segundo medio (fig. 3) incide sobre la superficie de separación formando con

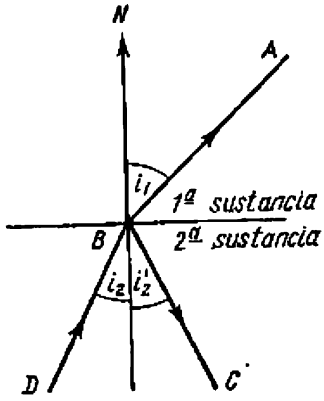

Fig. 3. Reflexión y refracción de los rayos en la superficie de separación de dos sustancias transparentes.

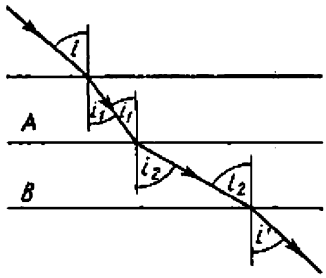

Fig. 4. Refracción de los rayos al pasar a través de dos láminas de caras planas y paralelas.

ella un ángulo i_2, al pasar al primer medio formará un ángulo i_1, que estará relacionado con el i_2 por la misma fórmula (2):

$$\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2} = n_{21}.$$

Pero por otra parte es evidente que

$$\frac{\operatorname{sen} i_2}{\operatorname{sen} i_1} = n_{12}, \qquad (2a)$$

donde n_{12} será el índice relativo de refracción del primer medio con relación al segundo. Comparando las fórmulas (2) y (2a) podemos establecer la relación que existe entre ambos índices:

$$n_{12} = \frac{1}{n_{21}}; \qquad (3)$$

de esta forma, el índice de refracción del primer medio con respecto al segundo y el índice de refracción del segundo medio con relación al primero son magnitudes recíprocamente inversas.

El índice de refracción de cualquier sustancia con relación al vacío se llama *índice absoluto de refracción* de dicha sustancia y se designa con la letra n. La palabra «absoluto» suele omitirse, por lo que cuando se habla del índice de refracción de una sustancia dada debe entenderse que se trata del «absoluto».

Veamos lo que ocurre con dos láminas de caras planas y paralelas A y B (fig. 4), de sustancias transparentes distintas, que se encuentran en contacto directo. Supongamos que sobre la primera lámina incide un rayo procedente del vacío formando con ella un ángulo i. Después de atravesar las dos láminas el rayo vuelve a salir al vacío formando un ángulo de refracción i'. La experiencia demuestra que $i' = i$, es decir, que la luz, después de pasar por las dos láminas, sigue una dirección paralela a la inicial.

Aplicando consecutivamente la ley de la refracción a las tres superficies de separación entre los medios*), obtendremos:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} i_1} = n_1, \quad \frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2} = n_{21}, \quad \frac{\operatorname{sen} i_2}{\operatorname{sen} i'} = \frac{1}{n_2}.$$

Donde n_1 y n_2 son respectivamente los índices de refracción de las sustancias de que están hechas las láminas y n_{21} es el índice relativo de refracción de la segunda sustancia respecto a la primera. De las dos primeras igualdades se deduce que

$$n_{21} = \frac{1}{n_1} \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} i_2},$$

mientras que la última da

$$\frac{\operatorname{sen} i'}{\operatorname{sen} i_2} = n_2,$$

de donde, si $i' = i$, obtenemos:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{4}$$

De esta forma llegamos a la conclusión de que *el índice de refracción relativo de las dos sustancias es igual al cociente de dividir entre sí sus respectivos índices de refracción absolutos.*

Después de esto, la ley de la refracción de la luz en el límite entre dos medios transparentes puede representarse de la forma:

$$\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{5}$$

o más simétricamente

$$n_1 \operatorname{sen} i_1 = n_2 \operatorname{sen} i_2. \tag{5a}$$

La reflexión de la luz se observa no solamente en los límites entre dos sustancias transparentes. La luz se refleja en mayor o menor grado en cualquier cuerpo. Los cuerpos pulimentados reflejan la

*) Estas superficies se llaman *planos dioptrios.* (*N. del T.*)

luz de acuerdo con la misma ley que las superficies que limitan dos sustancias transparentes, es decir, la luz se refleja en ellos formando un ángulo i' igual al ángulo i. Esta reflexión se llama especular. La intensidad de la luz reflejada depende de la naturaleza de la superficie reflectora y puede variar mucho: un espejo plateado bien pulimentado puede reflejar hasta el 96% de la luz que incide sobre él; las superficies negras pulimentadas reflejan menos del 1% de la luz incidente. La intensidad de la luz reflejada depende también del ángulo de incidencia.

Además de la reflexión especular existe la *reflexión difusa*. Esta última hace que la luz se refleje más o menos uniformemente en todos los sentidos. Las superficies que producen una difusión absolutamente uniforme de la luz incidente se llaman *absolutamente mates*. En realidad no existen superficies que cumplan exactamente esta condición. No obstante, se aproximan al mate absoluto la superficie de la porcelana sin esmaltar, la del papel de dibujo, la de la nieve, etc. Tampoco existen superficies que reflejen perfectamente la luz. En la mayoría de los casos la reflexión tiene un máximo en la dirección del ángulo de reflexión especular. La distribución de la intensidad de la luz reflejada difusa, de acuerdo con el ángulo de reflexión, puede representarse gráficamente por medio de vectores, aplicados al punto de incidencia de la luz, cuya longitud sea igual a la intensidad de ésta en dicha dirección. La envolvente de los extremos de estos vectores representará la distribución de la intensidad de la luz reflejada. Un diagrama de este tipo se muestra en la fig. 5. El hecho de que exista el máximo C en la dirección de la reflexión especular indica que el cuerpo en cuestión no es absolutamente mate, es decir, que «brilla» en una dirección determinada.

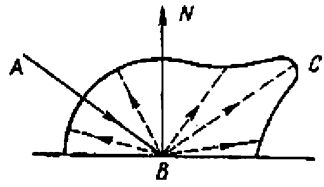

Fig. 5. Distribución de la intensidad cuando la luz se refleja difusamente.

Las leyes de la refracción y reflexión de la luz sirven de base para construir los aparatos ópticos que tienen por objeto cambiar la dirección de los rayos luminosos y obtener imágenes. En las leyes de la refracción se funda la estructura de las lentes, que permiten reunir o dispersar los haces de luz y obtener imágenes de los objetos. La obtención de imágenes por medio de sistemas refractores y reflectores será estudiada en el capítulo XXVIII.

Examinemos ahora unos cuantos ejemplos sobre la aplicación de las leyes de la reflexión y refracción de la luz.

Ejemplo 1. Demostrar que si un espejo plano gira un ángulo α el rayo de luz reflejado por él girará un ángulo igual a 2α.

Supongamos que el rayo AB incide sobre el espejo plano CC' formando un ángulo i. El ángulo de reflexión será $i' = i$ y el rayo reflejado BD formará

con el rayo incidente AB un ángulo igual a $2i$. Cuando el espejo gira un ángulo α (fig. 6, donde la nueva posición del espejo se representa por la línea de puntos C_1C_1'), la perpendicular BN también girará un ángulo α, el de incidencia se hará igual a $i + \alpha$ y el rayo reflejado BD formará con el rayo incidente AB un ángulo igual a $2i + 2\alpha$. Como el ángulo que antes del giro formaba este rayo con el AB era $2i$, resulta que habrá girado un ángulo $2i + 2\alpha - 2i = 2\alpha$.

Ejemplo 2. Demostrar que la imagen que produce un objeto puntual en un espejo plano es un punto virtual que se encuentra aparentemente detrás del espejo y a una distancia de su superficie igual a la que media entre el objeto y dicho espejo.

Recordemos que se llama imagen puntual de un objeto P el punto de intersección P' de los rayos emitidos por dicho objeto después de pasar por el sistema

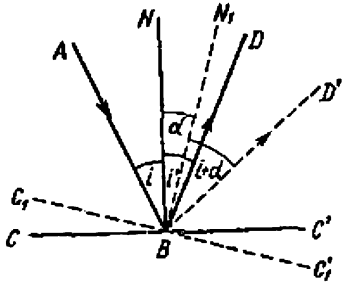

Fig. 6. Cuando el espejo gira un ángulo igual a α el rayo reflejado gira un ángulo igual a 2α.

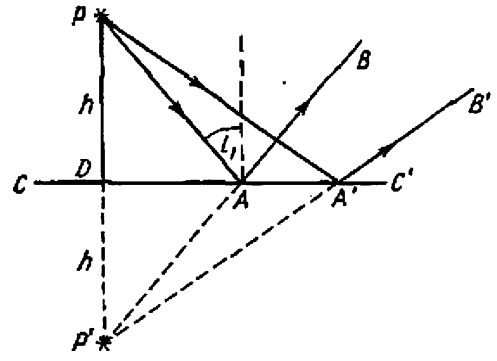

Fig. 7. Formación de la imagen virtual P' cuando la luz se refleja en un espejo plano.

óptico (o de reflejarse en él). En aquellos casos en que no se encuentran los propios rayos, sino sus prolongaciones, se dice que la imagen es virtual.

Veamos lo que ocurre con un rayo que parte del objeto puntual P (fig. 7) y que se refleja en un punto cualquiera A de un espejo plano CC'. Bajemos una perpendicular PD desde el punto P a la superficie del espejo CC'. Supongamos que la prolongación del rayo AB corta a la prolongación de la perpendicular PD en el punto P' y llamemos i_1 al ángulo de incidencia del rayo PA.

Los triángulos rectángulos DPA y $DP'A$ son iguales entre sí, puesto que tienen común el lado DA y el $\angle PAD = \angle P'AD$. De aquí se deduce que el segmento $h = DP' = DP$. Como el rayo PA fue elegido arbitrariamente, esta correlación será cierta también para cualquier otro rayo $PA'B'$, es decir, las prolongaciones de todos los rayos se cortarán en un mismo punto P', situado aparentemente detrás del plano del espejo y a una distancia de él $h = PD$, igual a la que hay por delante entre el objeto P y dicho espejo. Como el punto P' no es el de intersección de los rayos, sino el de encuentro de sus prolongaciones, este punto será una imagen virtual del punto P.

Ejemplo 3. Demostrar que *si un rayo incide sobre la cara de un prisma formando un ángulo pequeño y este prisma tiene un ángulo de refracción A también pequeño, el ángulo de desviación del rayo será* $\delta = A\,(n - 1)$, *independientemente del ángulo de incidencia* (n es el índice de refracción de la sustancia de que está hecho el prisma). Llamemos i_1 (fig. 8) al ángulo de incidencia del rayo con la primera cara del prisma e i_1' al ángulo de refracción correspondiente, y sean i_2 e i_2', respectivamente, el ángulo de incidencia y el de refracción en la segunda

cara*). Según la ley de la refracción

$$\text{sen } i_1 = n \text{ sen } i_1', \quad \text{sen } i_2' = n \text{ sen } i_2.$$

El ángulo i_1 es pequeño por las propias condiciones del problema, por consiguiente, i_1' también lo será. Pero en este caso, como el ángulo de refracción del prisma A es pequeño, también lo será el ángulo i_2. De aquí se deduce que los senos pueden ser sustituidos por los propios ángulos y las correlaciones anteriores tomarán la forma:

$$i_1 = ni_1', \quad i_2' = ni_2. \tag{6}$$

El ángulo de desviación δ que buscamos es ángulo externo del ΔBCD, por lo tanto, es igual a la suma de los dos ángulos del triángulo que no son adyacentes suyos:

$$\delta = (i_1 - i_1') + (i_2' - i_2),$$

de donde basándonos en la igualdad (6) obtenemos

$$\delta = i_1'(n-1) + i_2(n-1) = (n-1)(i_1' + i_2). \tag{7}$$

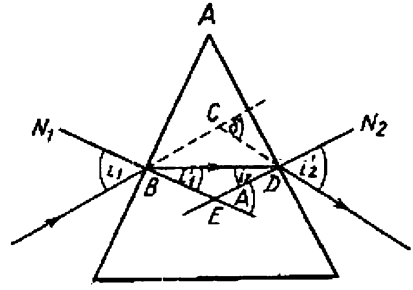

Fig. 8. Refracción de los rayos en un prisma.

El ángulo formado en el punto E por la intersección de las perpendiculares a las caras N_1 y N_2 es igual al ángulo refractor A del prisma y al mismo tiempo es ángulo externo del ΔBED, de donde $i_1' + i_2 = A$.

Poniendo este valor de $i_1' + i_2$ en (7), hallamos:

$$\delta = A(n-1),$$

que es lo que queríamos demostrar.

§ 252. Reflexión total. Cuando la luz pasa de una sustancia cuyo índice de refracción es menor (o de menor densidad óptica) a otra de mayor índice de refracción (o de mayor densidad óptica) se acerca a la normal. Por el contrario, cuando pasa de una sustancia de mayor densidad óptica a otra de menor densidad, el rayo se separa de la normal. Es evidente que en este caso existe un ángulo de incidencia $i_{1\text{lím}}$ menor que $\pi/2$ para el cual el ángulo de refracción i_2 es igual a $\pi/2$, es decir, un ángulo para el cual el rayo refractado sale rasante a la superficie de refracción. La experiencia demuestra que cuando los *ángulos de incidencia* $i_1 > i_{1\text{lím}}$ *no se produce rayo refractado*: en este caso la luz incidente se refleja totalmente. Este fenómeno recibe el nombre de *reflexión total* y el ángulo $i_{1\text{lím}}$ se llama *ángulo límite*. El valor de este ángulo límite $i_{1\text{lím}}$ se determina partiendo de la condición de que $i_2 = \pi/2$, de donde, según la ley de la refracción [fórmula (5) del § 251], tendremos:

$$\text{sen } i_{1\text{lím}} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{1}$$

Esta igualdad pueden cumplirla los valores reales del ángulo $i_{1\text{lím}}$ solamente cuando $n_2 \leqslant n_1$, de donde se deduce, que la reflexión

*) El ángulo i_1' suele llamarse *ángulo de emergencia del rayo*. (*N. del T.*)

total puede producirse exclusivamente cuando la luz pasa de una sustancia de mayor densidad óptica a otra de menor densidad. Por ejemplo, podrá producirse la reflexión total cuando la luz pase del vidrio al aire, pero nunca cuando pase del aire al vidrio.

A medida que el ángulo de incidencia se aproxima al ángulo límite, la intensidad del rayo refractado disminuye, mientras que la del reflejado aumenta.

En la fig. 9 se muestran una serie de casos de refracción de la luz al pasar de una sustancia de mayor densidad óptica a otra menos densa con distintos ángulos de incidencia i_1. El grosor de los trazos

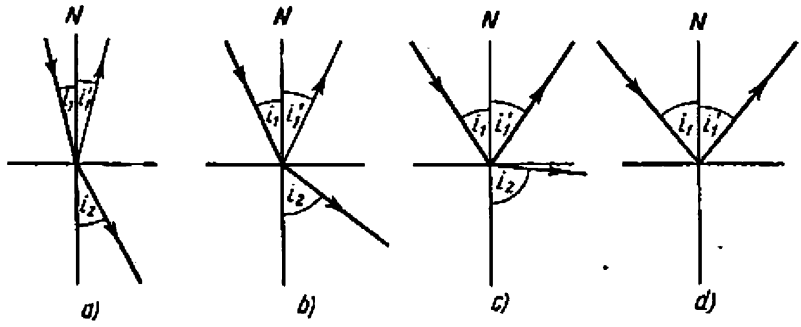

Fig. 9. Refracción de la luz al pasar de una sustancia ópticamente más densa a otra ópticamente menos densa, con distintos ángulos de incidencia i_1.

indica la intensidad de los rayos representados. La fig. 9, *a* corresponde al caso en que el rayo incide formando un ángulo i_1 pequeño; en estas condiciones la intensidad del rayo reflejado es pequeña y la del refractado, grande. A medida que va aumentando el ángulo de incidencia i_1, va disminuyendo la intensidad del rayo refractado (fig. 9, *b*). Cuando el ángulo de incidencia se aproxima mucho al ángulo límite (fig. 9, *c*) el rayo refractado es casi rasante y muy débil, mientras que el reflejado tiene una intensidad que se aproxima a la del rayo incidente. Cuando los ángulos de incidencia son mayores que el ángulo límite $i_{1\text{lím}}$, desaparece el rayo refractado (fig. 9, *d*) y tiene lugar la reflexión total, es decir, la luz se refleja totalmente.

Si un haz de rayos de luz en forma de cono, con ángulo de abertura igual a $2i_1$, pasa de una sustancia menos densa a otra de mayor densidad óptica (fig. 10, *a*), en la segunda sustancia se formará un haz cuyo ángulo de abertura $2i_2$ será menor.*)

A un haz cuyo ángulo de abertura sea igual a π en el medio menos denso, le corresponderá en el medio más denso ($n_2 > n_1$) un haz con

*) En realidad el haz de rayos después de refractado deja de formar un haz cuyos rayos se cortan en un punto (véase el § 314).

ángulo de abertura igual a $2i_{2\lim}$ (fig. 10, *b*), donde el ángulo $i_{2\lim}$ satisfará la correlación

$$\operatorname{sen} i_{2\,\lim} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Por esto, si cuando estamos sumergidos en el agua miramos hacia arriba, vemos todo el cielo reducido a una mancha circular cuyo

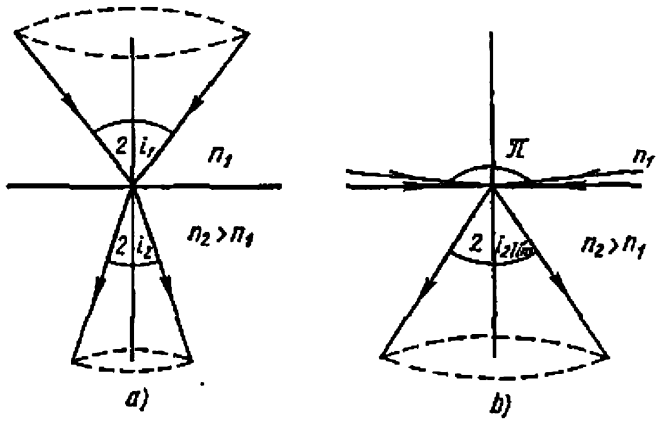

Fig. 10. Conos de rayos correspondientes al paso de la luz de un medio ópticamente menos denso a otro ópticamente más denso.

radio angular $i_{2\lim} = \operatorname{arc\,sen} \frac{n_1}{n_2}$. Como para el aire, prácticamente, $n_1 = 1$ y para el agua $n_2 = 1{,}33$, tendremos que, en nuestro caso, $i_{2\lim} \cong 49°$. Es decir, los rayos de luz procedentes del aire no se propagan en el agua más allá de los límites de un cono cuyo ángulo de abertura tiene 49°.

El fenómeno de la reflexión total se utiliza mucho en los aparatos ópticos para obtener reflexiones. En la fig. 11 se muestra un prisma rectangular de reflexión total que permite producir un giro de 90° en la marcha del rayo de luz. El rayo AB experimenta en el punto B una reflexión total. En la fig. 12 puede verse la marcha de dos rayos en un prisma de reflexión total que permite invertirlos: el rayo *1*, que antes de incidir en el prisma era el superior, después de refractado es el inferior.

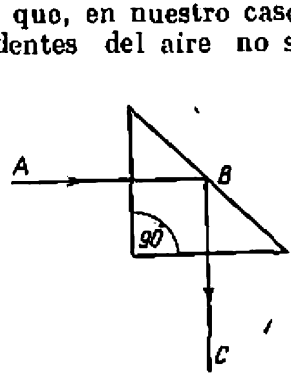

Fig. 11. Prisma rectangular de reflexión total.

La gran resistencia mecánica y química del vidrio hace que los prismas de reflexión total sean preferibles a los espejos metálicos

pulimentados, cuyas superficies se rayan fácilmente y pierden pronto su brillo a causa de la corrosión.

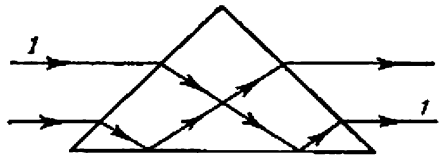

Fig. 12. Inversión de los rayos con un prisma de reflexión total.

§ 253. Principio de Fermat. En toda sustancia homogénea desde el punto de vista óptico, es decir, en toda sustancia cuyos puntos se caractericen por tener el mismo índice de refracción, la luz se propaga en línea recta, o sea, siguiendo la distancia más corta entre dos puntos dados. Cuando la luz pasa de unas sustancias a otras se refleja y refracta en sus superficies de separación y el camino que recorre es una línea quebrada. En los medios no homogéneos, donde el índice de refracción n varía continuamente de un punto a otro, los rayos de luz se refractan continuamente formando líneas curvas. Si los haces luminosos son estrechos se producen además los fenómenos de difracción que indicamos en el § 250. Pero si hacemos abstracción de estos últimos, la propagación de la luz en las sustancias no homogéneas se determina por el principio general que lleva el nombre de *principio de Fermat* (establecido en el año 1679). Para formular este principio hay que introducir primeramente el concepto de *camino óptico o recorrido óptico*.

En las sustancias homogéneas se entiende por camino óptico l el producto del camino geométrico s por el índice de refracción n de la sustancia en cuestión:

$$l = ns. \tag{1}$$

Cuando la sustancia no es homogénea hay que dividir el camino geométrico que sigue el rayo en una serie de porciones ds tan pequeñas como sea necesario para que en cada una de ellas pueda considerarse constante el índice de refracción n. En este caso la magnitud del camino óptico elemental será

$$dl = n\,ds,$$

y el camino óptico total será igual a la suma de todos los caminos ópticos elementales dl, es decir, vendrá expresado por la integral

$$l = \int_B n\,ds, \tag{2}$$

donde la integral se toma a lo largo de la curva AB (fig. 13) que sigue la luz al propagarse desde el punto A hasta el B.

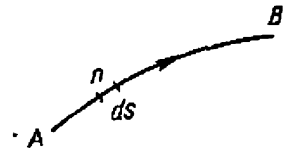

Fig. 13. Determinación del camino óptico.

Según el principio de Fermat *la luz se propaga recorriendo un camino óptico cuya longitud es extrema, es decir, mínima, máxima o estacionaria.*

El principio de Fermat también es válido cuando la luz se propaga en un medio formado por una serie de sectores homogéneos colindantes.

La condición necesaria para que el camino óptico sea extremo se reduce a que la variación de la integral (2) sea igual a cero:

$$\delta \int_A^B n\,ds = 0; \qquad (3)$$

esta expresión es la fórmula matemática del principio de Fermat.

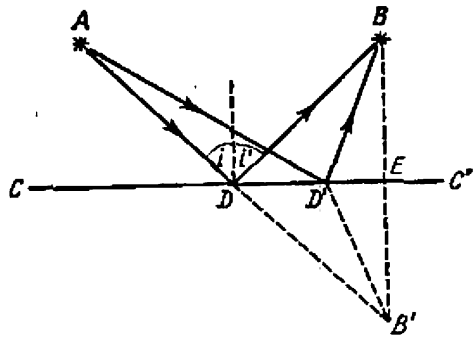

Fig. 14. Cuando la luz se refleja en un espejo plano el camino óptico ADB es más corto que el $AD'B$.

Examinemos ahora varios casos particulares que demuestran la exactitud del principio de Fermat.

Por ejemplo, si la luz va del punto A al B (fig. 14), reflejándose en la superficie plana CC', siempre que se cumpla la ley de la reflexión el camino recorrido será mínimo.

Efectivamente, consideremos además del camino ADB que cumple la ley de la reflexión, cualquier otro camino $AD'B$. Bajemos desde el punto B una perpendicular BE a la superficie reflectora y tomemos sobre su prolongación un segmento $EB' = EB$. Unamos los puntos D y D' con el punto B'. Tendremos dos triángulos, BDE y $B'DE$, iguales entre sí, de donde $DB = DB'$; de la misma forma obtendremos que $D'B = D'B'$. Por lo tanto, el camino ADB será igual a

$$AD + DB = AD + DB', \qquad (4)$$

y el camino $AD'B$ igual a

$$AD' + D'B = AD' + D'B'. \qquad (4a)$$

Como puede verse en la figura,

$$\angle ADB' = i + i' + (90° - i') + (90° - i'),$$

donde i e i' son respectivamente los ángulos de incidencia y de reflexión. Según la ley de la reflexión $i' = i$, de donde $\angle ADB' = 180°$, es decir, la línea ADB' es una recta y, por consiguiente, cualquiera que sea la posición del punto D', siempre que no coincida con el D, la línea $AD'B'$ será una línea quebrada. Y como la longitud de cualquier línea quebrada que une dos puntos es mayor que la de la recta trazada entre ellos, de acuerdo con (4) y (4a), tendremos que

$$AD + DB < AD' + D'B. \qquad (5)$$

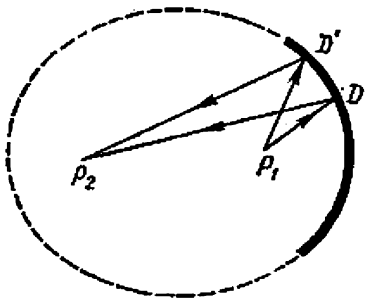

Fig. 15. Reflexión de los rayos en la superficie de un elipsoide: los caminos ópticos P_1DP_2 y $P_1D'P_2$ tienen la misma longitud.

En este caso la luz se propaga en un medio homogéneo y su camino óptico solamente se diferencia del geométrico en el factor constante n (índice de refracción). Por esto, la desigualdad (5) (según la cual la longitud geométrica del camino ADB es menor que la de cualquier otro camino $AD'B$) demuestra que cuando se cumple la ley de la reflexión el camino óptico es el más corto (mínimo).

El caso en que los caminos ópticos son estacionarios corresponde a la reflexión en una superficie especular cóncava en forma de elipsoide de revolución. Supongamos que la luz parte de un punto P_1, situado en uno de los focos de un elipsoide (fig. 15). En este caso la luz, después de reflejarse en cualquier punto D del espejo, irá a parar al segundo foco P_2. Y como sabemos que la suma de los dos radios vectores trazados desde ambos focos a un punto cualquiera de la elipse es constante, tendremos que el camino P_1DP_2 será igual a cualquier otro $P_1D'P_2$, donde D' puede ser un punto cualquiera que se encuentre en la superficie del espejo elíptico.

Finalmente, podemos imaginarnos una superficie cóncava que tenga la propiedad de que los rayos reflejados en ella recorran un camino óptico máximo. Supongamos que un rayo procedente del foco P_1 de un elipsoide de revolución se refleja en el punto D de dicho elipsoide (fig. 16; la superficie elíptica está representada por la línea de trazo punteado) y después pasa por el segundo foco P_2. Tracemos una superficie cóncava aa' tangente a la del elipsoide en el punto D, de forma que todos sus puntos se encuentren dentro de dicho elipsoide. En estas condiciones el rayo P_1D también puede

considerarse como reflejado por la superficie aa'. Pero cualquier camino $P_1D'P_2$ será más corto que el P_1DP_2, puesto que el punto D' se encuentra dentro del elipsoide.

Demostremos ahora que cuando la luz se refracta en un dioptrio plano, es decir, en la superficie plana que separa dos sustancias homogéneas, el camino óptico cumple la condición de ser extremo (máximo o mínimo).

Supongamos que un rayo ADB (fig. 17) se refracta en el punto D, cuya situación viene determinada por el segmento x, medido a partir de la base de la

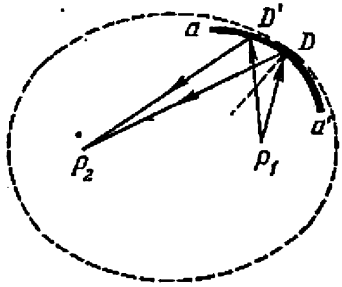

Fig. 16. El camino óptico del rayo P_1DP_2, que se refleja en la superficie aa', es más largo que el del rayo $P_1D'P_2$.

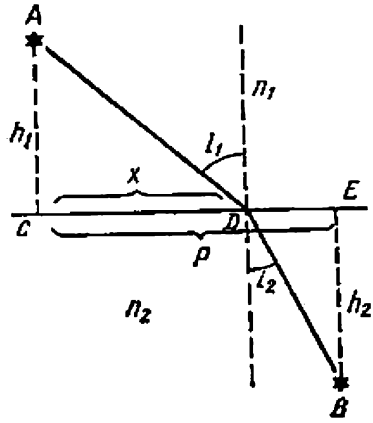

Fig. 17. Cuando se cumple la ley de la refracción, el camino óptico ADB es mínimo.

perpendicular AC. Tracemos una perpendicular desde el punto B a la superficie de separación de los dos medios y llamemos p al segmento CE. Para un par de puntos dados A y B la longitud p será constante.

El camino óptico del rayo ADB será igual a

$$l = n_1 AD + n_2 DB, \tag{6}$$

donde n_1 y n_2 son respectivamente los índices de refracción de las dos sustancias. En la figura puede verse que

$$AD = \sqrt{h_1^2 + x^2}$$

y

$$DB = \sqrt{h_2^2 + (p-x)^2},$$

donde h_1 y h_2 son las longitudes de las perpendiculares AC y BE. Poniendo estos valores de AD y DB en (6), obtenemos

$$l = n_1 \sqrt{h_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{h_2^2 + (p-x)^2}. \tag{7}$$

La condición necesaria para que el camino óptico sea extremo se reduce a que $\frac{dl}{dx} = 0$.

Derivando la expresión (7), hallamos

$$\frac{dl}{dx} = n_1 \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - n_2 \frac{p-x}{\sqrt{h_2^2 + (p-x)^2}} = 0. \qquad (8)$$

Pero en la figura vemos que

$$\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \operatorname{sen} i_1$$

y

$$\frac{p-x}{\sqrt{h_2^2 + (p-x)^2}} = \operatorname{sen} i_2,$$

siendo i_1 el ángulo de incidencia e i_2 el ángulo de refracción; de donde, según (8):

$$n_1 \operatorname{sen} i_1 = n_2 \operatorname{sen} i_2,$$

es decir, el camino que cumple la condición de ser extremo satisface a su vez la ley de la refracción. El signo de la segunda derivada puede servir para comprobar que este camino es mínimo.

§ 254. Medición de la velocidad de la luz. El primer intento de medición de la velocidad de la luz fue realizado por Galileo en el año 1607. Para esto situó dos observadores, provistos de sendas linternas, en dos colinas. Uno de los observadores emitía un destello y el otro, al percibirlo, devolvía la señal con su linterna. Como la velocidad de la luz es finita, la señal debería volver al primer observador con cierto retraso Δt. Si la distancia recorrida por la luz al ir y volver era igual a $2L$, la velocidad de la luz $c = \frac{2L}{\Delta t}$. Durante este experimento el tiempo Δt resultó ser no mayor que el invertido por el segundo observador en devolver la señal. El fracasado experimento de Galileo demostró que, de ser finita, la velocidad de la luz debería ser muy grande. Poco después, basándose en observaciones astronómicas, fue establecido que la velocidad de la luz es finita y más tarde se consiguió medir dicha velocidad en la Tierra. Teniendo en cuenta que la velocidad de la luz en el vacío es una de las principales constantes físicas, estudiaremos varios de los procedimientos utilizados para determinarla siguiendo su orden cronológico.

1. Procedimiento astronómico de Roemer. El astrónomo del observatorio de París Ole Roemer descubrió en 1676 que existen ciertas discrepancias en la periodicidad de los eclipses de los satélites de Júpiter. Durante una mitad del año terrestre el intervalo entre dos eclipses consecutivos es más corto que durante la otra mitad del año. Este fenómeno se explica porque la velocidad de la luz es finita. Supongamos que la dirección de un rayo de luz procedente de Júpiter J (fig. 18) coincide con la de la tangente a la órbita de la Tierra en el punto A. Si en el punto A la Tierra se mueve alejándose

de Júpiter, la luz tiene que darlo alcance y el lapso T' entre dos eclipses sucesivos del satélite de Júpiter es mayor que el intervalo real T_0

$$T' = T_0 + \Delta t.$$

Teniendo en cuenta que el tiempo T' es pequeño en comparación con el que emplea la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol, puede considerarse que la Tierra se mueve, durante este tiempo T', en el sentido del rayo JA. El retraso Δt será, pues, aproximadamente igual al tiempo que tarda la luz en cubrir el camino que recorre la Tierra por su órbita durante el tiempo T_0, es decir, $\Delta t = \frac{v}{c} T_0$, donde v es la velocidad de la Tierra por su órbita y c es la velocidad de la luz. De donde

$$T' = T_0 + \frac{v}{c} T_0. \qquad (1)$$

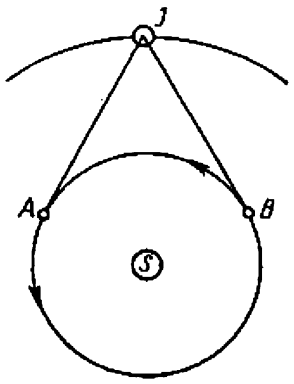

Fig. 18. Determinación de la velocidad de la luz por los eclipses de los satélites de Júpiter.

Del mismo modo, en el punto B, cuando la Tierra se acerca a Júpiter, el intervalo T'' entre dos eclipses consecutivos será menor que el tiempo real T_0 en una magnitud Δt:

$$T'' = T_0 - \frac{v}{c} T_0. \qquad (2)$$

Cuando la Tierra se encuentra en otras posiciones orbitales estos retrasos o adelantos serán menores.

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) con respecto a c, obtenemos

$$c = \frac{T' + T''}{T' - T''} v.$$

Si se conoce el intervalo máximo T' y el mínimo T'' entre los eclipses y la velocidad de la Tierra por su órbita v, la correlación que acabamos de deducir permite hallar la velocidad de la luz c.

Las mediciones realizadas por Roemer dieron como resultado la velocidad de 215 000 km/s. Las mediciones astronómicas modernas dan el valor aproximado de 300 000 km/s.

2. Procedimiento de la aberración de la luz. A principios del siglo XVIII los astrónomos observaron que las coordenadas de las estrellas «fijas» experimentan una pequeña variación periódica: durante un año terrestre cada una de estas estrellas describe en el firmamento una elipse, que tiene la particularidad de que su semieje mayor, observado con un ángulo $\Delta\varphi = 40{,}9''$, es igual para todas las estrellas. El grado de alargamiento de la elipse depende de la posición que tengan las estrellas con relación al plano de la eclíptica; las estrellas que se encuentran en dirección perpendicular a dicho plano

describen una elipse cuya excentricidad es mínima, mientras que las estrellas que se hallan en el plano de la eclíptica describen una elipse que se confunde con un segmento rectilíneo.

Este fenómeno, que se conoce con el nombre de *aberración*, se debe a que la velocidad de propagación de la luz es finita. Supongamos que la verdadera dirección a una estrella S (fig. 19) forma un ángulo φ con la dirección de la velocidad de la Tierra v y consideremos que la observación se realiza con un telescopio cuyo eje coincide con la verdadera dirección a dicha estrella. Debido al movimiento de la Tierra, la imagen B de la estrella resultará un poco desviada respecto al eje del telescopio e irá a parar al punto C, puesto que durante el tiempo Δt que tarda la luz en recorrer el tubo del telescopio, este último se desplaza junto con la Tierra en la dirección de la velocidad v. Es evidente que el segmento BC es igual al camino recorrido por el telescopio (junto con la Tierra) durante el tiempo Δt, de donde se deduce que $BC = v\Delta t$. Como la imagen de la estrella se recoge en el plano focal principal del objetivo del telescopio, tendremos que $\Delta t = \frac{F}{c}$, siendo F la distancia focal del objetivo del telescopio y c la velocidad de la luz; de donde

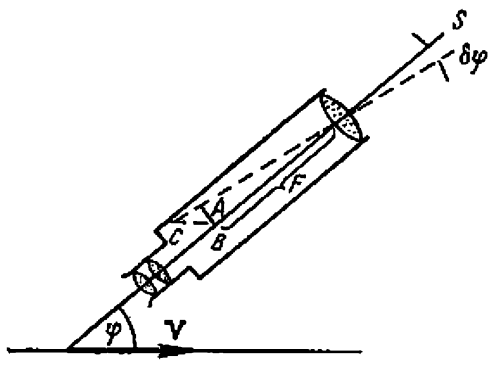

Fig. 19. Aberración de la luz.

$$BC = \frac{v}{c} F. \qquad (3)$$

Como quiera que la imagen de la estrella se recoge en el punto C en lugar de en el B, la dirección aparente de la estrella forma un ángulo $\delta\varphi$ con relación a la verdadera dirección. Este ángulo recibe el nombre de ángulo de aberración, y como puede verse en la fig. 19 viene determinado por la correlación:

$$\delta\varphi = \frac{AB}{F} = \frac{BC \operatorname{sen} (\angle ACB)}{F}.$$

El ángulo $ACB = \varphi - \delta\varphi$; y como el ángulo $\delta\varphi$ es pequeño, aproximadamente tendremos

$$\angle ACB = \varphi \text{ y } \delta\varphi = \frac{BC \operatorname{sen} \varphi}{F}.$$

Poniendo aquí en lugar de BC su valor según (3), obtendremos

$$\delta\varphi = \frac{v}{c} \operatorname{sen} \varphi, \qquad (4)$$

de donde se deduce que el ángulo de aberración no depende de la distancia focal del telescopio F, sino que viene determinado exclusivamente por la relación entre la velocidad de la Tierra v y la velocidad de la luz c y por el ángulo φ. Como quiera que durante el movimiento anual de la Tierra por su órbita el ángulo φ entre el vector velocidad de la Tierra v y la dirección de la estrella varía constantemente, la posición que ocupan aparentemente las estrellas en el firmamento describe una elipse. Los mayores valores absolutos de sen φ son los correspondientes a $\varphi = \frac{\pi}{2}$ y $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, por consiguiente, la magnitud angular $\Delta\varphi$ del semieje mayor de la elipse, de acuerdo con la fórmula (4), será

$$\Delta\varphi = \frac{v}{c} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \frac{v}{c} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = 2\frac{v}{c},$$

de donde la velocidad de la luz

$$c = \frac{2v}{\Delta\varphi}.$$

Aplicando el valor de $\Delta\varphi$ que dimos anteriormente y el valor conocido de la velocidad de traslación de la Tierra por su órbita v, puede obtenerse la velocidad de la luz c. Por este procedimiento se obtuvo que $c = 303\,000$ km/s.

3. Procedimiento de la rueda dentada. El primero que midió la velocidad de la luz en las condiciones propias de la Tierra fue Fizeau. Ocurrió esto en el año 1849 y se empleó para ello el procedimiento de la rueda dentada. Este procedimiento coincide en esencia

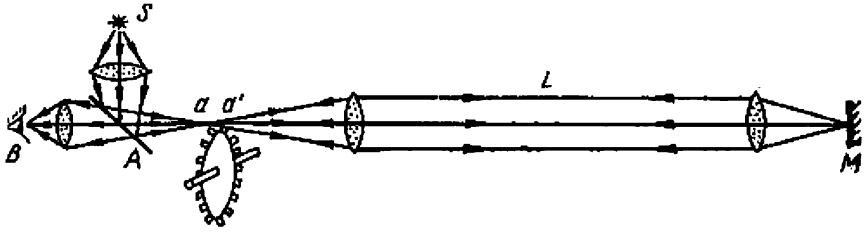

Fig. 20. Determinación de la velocidad de la luz por el procedimiento de la rueda dentada.

con el propuesto por Galileo, con la única diferencia de que uno de los observadores se sustituye por un espejo y el obturador a mano de la linterna, por una rueda dentada que gira rápidamente y que unas veces deja pasar el haz luminoso y otras lo intercepta. El esquema de este procedimiento se muestra en la fig. 20. La luz procedente del foco S se refleja en el espejo semitransparente A, pasa luego entre los dientes aa' de la rueda, llega al espejo M, se refleja en él y, de regreso,

después de atravesar el espejo semitransparente A, va a parar al ojo del observador B.

Cuando la rueda dentada da vueltas puede girar cierto ángulo durante el tiempo Δt que transcurre mientras la luz llega al espejo M y retorna. Si al ocurrir esto el sitio en que se encontraba el hueco, por el que pasó antes el rayo, lo ocupa el diente más próximo, la luz reflejada no podrá pasar ni ser vista por el observador. Pero cuando la rueda giro un ángulo suficiente para que la luz reflejada en el espejo M pueda pasar de regreso por el hueco formado entre los dientes inmediatos, el observador volverá a verla. Si el movimiento giratorio de la rueda es aún más rápido, la luz volverá a ser invisible.

El tiempo Δt puede medirse directamente siempre que se conozca el número de revoluciones de la rueda ν correspondiente, por ejemplo, a la primera interceptación de la luz que retorna del espejo M. Sea n el número de dientes de la rueda, entonces

$$\Delta t = \frac{1}{2n\nu} \tag{5}$$

Por otra parte, como ya dijimos, este intervalo es el que la luz emplea en recorrer dos veces la base L (una en un sentido y otra en el contrario), por lo tanto,

$$\Delta t = \frac{2L}{c}. \tag{6}$$

Igualando entre sí las expresiones (5) y (6), obtenemos que

$$c = 4nL\nu.$$

Fizeau tomó la distancia $2L = 14$ km. Como resultado de su experimento obtuvo para la velocidad de la luz el valor de 315 000 km/s. Posteriormente se han hecho experimentos más exactos por este mismo procedimiento, tomando una base mayor. Con $2L = 46$ km se obtuvo un valor de $c = 299\,870 \pm 50$ km/s. Ultimamente, en lugar de la rueda dentada se ha utilizado como dispositivo interruptor del haz luminoso la célula de Kerr (véase el § 293). Esto ha permitido reducir la base hasta 15 m, es decir, disponer todos los aparatos dentro del laboratorio.

4. Procedimiento del espejo giratorio (Foucault, 1868). El esquema de este procedimiento se muestra en la fig. 21. La luz procedente del foco S, después de atravesar la lámina semitransparente M, incide sobre el espejo A, el cual gira alrededor de un eje O perpendicular al plano de la figura. El rayo reflejado en el espejo A va a parar a un segundo espejo B. Este último es cóncavo y está situado de tal forma que el eje O pasa por su centro de curvatura. Después de reflejarse en el espejo B, el rayo vuelve hacia atrás y produce en el punto S' la imagen del foco. Si el espejo A gira la luz sigue reflejándose en la misma dirección mientras el rayo resbala por el espejo

cóncavo B, puesto que siempre incide sobre éste a lo largo de uno de sus radios, es decir, perpendicularmente a su superficie. De esta forma, al ir girando el espejo A, la imagen del foco S' permanece inmóvil. Pero cuando A forma un ángulo suficiente para que el rayo se salga de los límites del espejo cóncavo B, la imagen S' desaparece. Si el espejo A da vueltas, la imagen S' parpadea, pero a medida que la rotación va siendo más rápida el parpadeo se hace tan frecuente que el ojo deja de percibirlo. Al mismo tiempo, cuando la velocidad

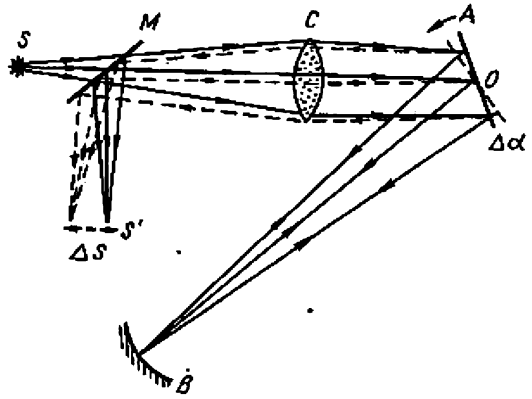

Fig. 21. Determinación de la velocidad de la luz por el procedimiento del espejo giratorio.

de rotación es suficientemente grande, la imagen S' se desplaza un poco. Esto se debe a que durante el intervalo Δt que tarda la luz en ir desde el espejo A hasta el B y viceversa, el espejo A tiene tiempo de recorrer un ángulo $\Delta\alpha$ y el rayo reflejado de girar un ángulo $2\Delta\alpha$ (véase el § 251) y, como consecuencia, la imagen S' se desplaza una magnitud Δs,

$$\Delta s = 2\Delta\alpha \cdot l, \tag{7}$$

donde l es la longitud del haz luminoso que va desde la lente C hasta el sitio en que se forma la imagen S'.

Por otra parte, si ω es la velocidad angular del movimiento giratorio del espejo A, el ángulo de giro $\Delta\alpha = \omega\Delta t$. Pero como Δt es el tiempo que tarda la luz en recorrer el camino entre A y B y viceversa, llamando L a este último, tendremos:

$$\Delta t = \frac{2L}{c},$$

y, por consiguiente

$$\Delta\alpha = \omega\frac{2L}{c}. \tag{8}$$

Las fórmulas (7) y (8) nos permiten hallar la velocidad de la luz

$$c = \frac{4\omega L l}{\Delta s}.$$

Para hacerlo no hay más que medir directamente los valores de ω, L, l y Δs.

En los experimentos que hizo Foucault la distancia L era igual a 4 m, y el espejo A giraba a 800 revoluciones por segundo. El valor que se obtuvo para la velocidad de la luz fue de 298 000 $\pm$ 500 km/s. Este valor es demasiado pequeño. Nuevos experimentos realizados en 1891 por el procedimiento del espejo giratorio dieron un valor de c = 299 810 $\pm$ 50 km/s.

5. Procedimiento del prisma giratorio. Michelson aunó en cierto sentido el procedimiento de la rueda dentada con el del espejo giratorio y creó una instalación provista de un espejo prismático giratorio. La inexactitud del procedimiento de la rueda dentada se debe

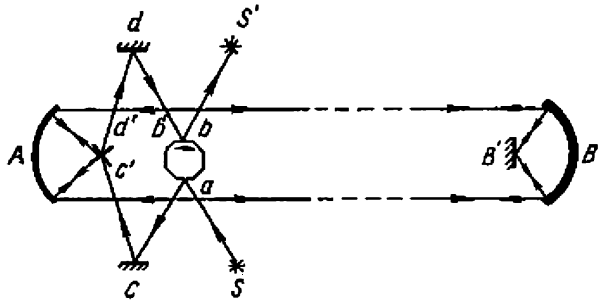

Fig. 22. Determinación de la velocidad de la luz por el procedimiento del prisma giratorio.

a que la luz queda interceptada no solamente cuando le cierra el paso la parte central del diente, sino también en el momento en que se lo impide el borde de este último. Por lo tanto, el instante de la desaparición de la imagen no se determina con precisión. Esta circunstancia influye también cuando se aumenta la velocidad de rotación de la rueda lo necesario para que la luz pase por el siguiente hueco entre dientes: el momento en que la imagen vuelve a aparecer no puede fijarse exactamente. Tampoco es suficientemente preciso el procedimiento del espejo giratorio, puesto que en él se toma una base L demasiado pequeña y la desviación de la imagen Δs en los experimentos de Foucault sólo medía 0,7 mm. El procedimiento del prisma giratorio excluye estos defectos. Su esquema general se muestra en la fig. 22.

La luz de un foco S se reflejaba en una de las caras de un espejo prismático octogonal de acero y mediante los espejos planos c y c'

se dirigía al espejo cóncavo A. Desde este espejo A, que se encontraba en una montaña, la luz iba a parar en forma de haz paralelo a los espejos B y B', situados en otra montaña. Las cumbres de las dos montañas en que hizo Michelson su experimento distaban entre sí 35,4 km. La luz reflejada en los espejos B y B' volvía a incidir sobre el espejo A y luego, por medio de los espejos planos d' y d se dirigía a la cara del prisma b y producía la imagen del foco en el punto S'. Cuando el prisma se encontraba en reposo, la cara b era la opuesta a la a. Pero cuando el prisma giraba, su velocidad angular se podía regular de tal forma que, mientras la luz recorría el espacio básico en ambos sentidos, el prisma tenía tiempo de dar 1/8 de vuelta y, el lugar de la cara b era ocupado por la b', en la cual se reflejaba la luz. Si el prisma hubiese girado exactamente un 1/8 de vuelta la imagen reflejada habría permanecido en el mismo sitio S'. Pero de hecho la cara b' no ocupaba exactamente el sitio de la b y, por consiguiente, la imagen S' se desplazaba un poco. Este desplazamiento se podía medir. De esta forma, en lugar de la sustitución de un hueco entre dientes por otro, como ocurría en el procedimiento de la rueda dentada, tenemos la sustitución de una cara del espejo prismático por otra y, al mismo tiempo, el desplazamiento de la imagen S', que desempeña un papel correctivo análogo al que jugaba en el procedimiento del espejo giratorio. Esto da la posibilidad de medir con más precisión que en los experimentos anteriores el tiempo Δt que tarda la luz en recorrer la distancia básica.

Las mediciones realizadas por este procedimiento dieron el valor $c = 299\,796 \pm 4$ km/s.

En todos los procedimientos descritos hasta ahora la velocidad de la luz se medía en el aire y después se calculaba su valor en el vacío, partiendo del valor del índice de refracción establecido para el aire (véase el § 251). Pero cuando las distancias básicas que se toman son muy grandes (que son las que proporcionan mediciones más exactas) comienza a influir la heterogeneidad del aire y la reducción al valor en el vacío es más difícil. Para evitar este inconveniente, Michelson volvió a medir la velocidad de la luz en el año 1932, también por el procedimiento del prisma giratorio pero haciendo que ésta se propagara dentro de un tubo en el que se practicó el vacío. Este tubo tenía una longitud de 1,6 km y la luz lo recorría en uno y otro sentido 10 veces, con lo que la longitud total del camino recorrido por la luz era de cerca de 16 km. En estas condiciones se obtuvo un valor de $c = 299\,774 \pm 2$ km/s.

En la tabla I se comparan los resultados de una serie de mediciones de la velocidad de la luz realizadas por diferentes procedimientos.

En la actualidad se admite como valor más probable de la velocidad de la luz en el vacío el de

$$c = 299\,776 \pm 4 \text{ km/s}.$$

Tabla 1

Procedimiento de medición	Año	Velocidad de la luz en km/s
Espejo giratorio	1891	299 810±50
Rueda dentada	1902	299 870±50
Prisma giratorio	1926	299 796±4
Célula de Kerr *	1928	299 778±10
Prisma giratorio (propagación de la luz dentro de un tubo vacío	1932	299 774±2

* El procedimiento para determinar la velocidad de la luz empleando la célula de Kerr se describe en el § 293.

En la mayoría de los casos puede considerarse que el valor $c = 2{,}998 \cdot 10^{10}$ cm/s tiene un grado de exactitud suficiente. Como valor aproximado se acepta el de $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s.

§ 255. Teoría ondulatoria de la luz. Principio de Huygens. Como dijimos en la introducción, Huygens propuso a finales del siglo XVII la hipótesis de que la luz está formada por ondas que se propagan en un medio elástico continuo, llamado éter, que llena todos los espacios «vacíos» y que penetra todos los cuerpos. M. Lomonósov mantuvo este mismo punto de vista sobre la naturaleza de la luz. Esta hipótesis suponía que las ondas luminosas se propagaban en el éter como ondas mecánicas elásticas.

Huygens estudió experimentalmente el problema de la *propagación del frente de onda* y estableció el principio que lleva su nombre y que partiendo de una posición dada de dicho frente permite hallar su situación en cualquier momento posterior. Este principio fue expuesto en el t. I, § 107. Aquí sólo recordaremos su enunciación: todo punto alcanzado por el frente de onda puede considerarse como una fuente independiente de ondas elementales; el nuevo frente de onda será la envolvente de todas las ondas hemisféricas elementales que se produzcan (fig. 23).

Los rayos son familias de rectas perpendiculares al frente de onda.

El principio de Huygens permite explicar desde el punto de vista ondulatorio las leyes de la reflexión y refracción de la luz. Supongamos que sobre el límite que separa dos sustancias cuyos índices de refracción son respectivamente n_1 y n_2 incide un frente de onda plano AB (fig. 24); a este frente corresponde el haz de rayos paralelos que forman con la normal AN un ángulo i_1. Cada uno de los puntos del límite de separación a que llega el frente de onda se convierte, según el principio de Huygens, en fuente de nuevas ondas esféricas.

El primer punto del límite de separación a que llega el frente de onda es el A. Y mientras el otro extremo del frente B llega hasta dicho límite en el punto C, en torno al A se forma un frente hemisférico de radio $AD = BC$ que se propaga en dirección contraria en la primera sustancia. En torno a los puntos intermedios del límite de separación se formarán ondas hemisféricas cuyos radios serán menores. El plano DC, tangente a todas estas ondas hemisféricas elementales, determina la dirección del frente de las ondas reflejadas. Supongamos que los rayos de este frente de onda forman con la normal

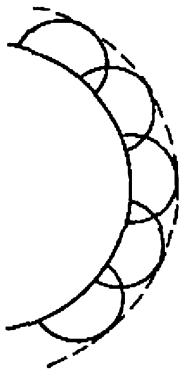

Fig. 23. Formación de las ondas secundarias.

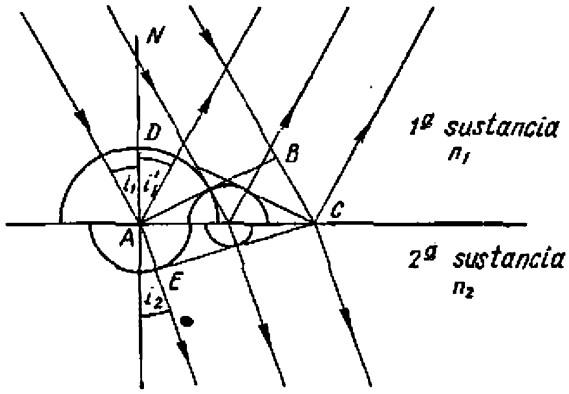

Fig. 24. Formación de las ondas reflejadas y refractadas en la superficie de separación de dos sustancias transparentes.

AN un ángulo i_1'. Analicemos los triángulos rectángulos ABC y ADC estos triángulos tienen común la hipotenusa AC e iguales los catetos $AD = BC$. Por consiguiente, el $\Delta ABC = \Delta ADC$, de donde

$$\angle BAC = \angle DCA.$$

Pero el $\angle BAC$ es igual al ángulo de incidencia i_1, mientras que el $\angle DCA$ es el ángulo de reflexión i_1', de donde

$$i_1' = i_1,$$

es decir, se cumple la ley de la reflexión.

Para demostrar la ley de la refracción tendremos en cuenta la velocidad de propagación de la luz en ambas sustancias. Supongamos que la luz se propaga en la primera sustancia con la velocidad v_1 y en la segunda con la velocidad v_2. Admitamos que durante el tiempo que tarda el extremo B del frente de onda en propagarse en la primera sustancia desde el punto B hasta el C, en la segunda sustancia se forma en torno al punto A una onda hemisférica elemental de radio AE. Entonces, el plano tangente EC determinará la posición del frente de las ondas refractadas.

Entre el radio AE de la onda hemisférica formada en torno al punto A en la segunda sustancia y el radio AD de la que se origina en la primera, alrededor de este mismo punto, debe existir la misma relación que entre las velocidades de la luz en estas dos sustancias

$$\frac{AD}{AE} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{1}$$

Por el triángulo rectángulo AEC tenemos

$$\operatorname{sen} \angle ACE = \frac{AE}{AC}. \tag{2}$$

Por el triángulo rectángulo ADC tenemos

$$\operatorname{sen} \angle ACD = \frac{AD}{AC}. \tag{3}$$

Dividiendo miembro a miembro la correlación (3) por la (2), obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen} \angle ACD}{\operatorname{sen} \angle ACE} = \frac{AD}{AE},$$

de donde, de acuerdo con (1):

$$\frac{\operatorname{sen} \angle ACD}{\operatorname{sen} \angle ACE} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Pero el ángulo ACD es igual al ángulo de incidencia i_1, y el ángulo ACE es igual al ángulo de refracción i_2, de donde

$$\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{4}$$

La relación de las velocidades de la luz v_1/v_2 es una magnitud constante para el par de sustancias de que se trate, de donde la relación (4) expresa la ley de la refracción.

Comparando esta correlación (4) con la fórmula ordinaria de la ley de la refracción

$$\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

obtenemos

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{5}$$

Como vemos, la teoría ondulatoria no sólo permite explicar la ley de la refracción, sino que también establece la correlación entre los índices de refracción y las velocidades de propagación de la luz.

Según la fórmula (5) *los índices de refracción de las dos sustancias son inversamente proporcionales a las velocidades con que la luz se propaga en ellas.* En las sustancias cuya densidad óptica es mayor la

luz se propaga más despacio que en aquellas que tienen una densidad óptica menor.

El índice de refracción en el vacío es igual a la unidad, de donde la velocidad de propagación de la luz v en cualquier sustancia estará relacionada con la de propagación de la luz en el vacío c por la fórmula

$$v = \frac{c}{n}, \tag{6}$$

donde n es el índice de refracción de la sustancia dada. Los cuerpos transparentes tienen $n > 1$ y la velocidad de propagación de la luz en ellos es menor que en el vacío.

La teoría corpuscular de la luz también explica las leyes de la reflexión y refracción, pero conduce a una relación diferente entre los índices de refracción y las velocidades de propagación de la luz.

La ley de la reflexión se explica directamente admitiendo que los corpúsculos luminosos rebotan en la superficie reflectora como si fueran cuerpos elásticos. Como vimos en el § 18 del t. I, si una esfera choca elásticamente con una pared rebota formando con ella un ángulo igual al de incidencia.

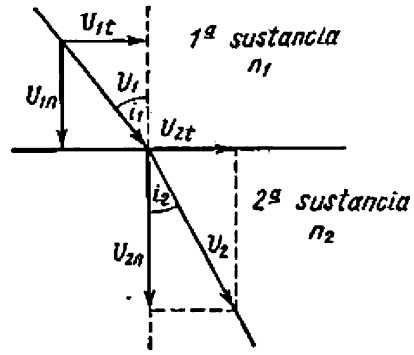

Fig. 25. Explicación de la refracción de los rayos desde el punto de vista corpuscular.

Para explicar por esta teoría la ley de la refracción hay que admitir que, al pasar de una sustancia a otra, la componente normal v_n de la velocidad de la partícula luminosa varía, mientras que su componente tangencial v_t permanece invariable. Por la fig. 25 tenemos

$$\operatorname{sen} i_1 = \frac{v_{1t}}{v_1}, \qquad \operatorname{sen} i_2 = \frac{v_{2t}}{v_2},$$

donde v_1 es la velocidad de las partículas en la primera sustancia y v_2 es su velocidad en la segunda. Suponiendo, de acuerdo con lo antedicho, que $v_{2t} = v_{1t}$, obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2} = \frac{v_2}{v_1}. \tag{7}$$

Para una pareja de sustancias determinada la relación v_2/v_1 es una magnitud constante y la fórmula (7) expresa la ley de la refracción. Pero si comparamos esta expresión con la fórmula ordinaria de la ley de la refracción

$$\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ obtenemos que } \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_2}{v_1};$$

es decir, según *la teoría corpuscular los índices de refracción de dos sustancias son directamente proporcionales a las velocidades de propagación de la luz en ellos.* Esta ley afirma, pues, que en las sustancias de mayor densidad óptica la luz se propaga más de prisa que en las de menor densidad.

Como puede verse, las teorías ondulatoria y corpuscular de la luz conducen a dos funciones diferentes de los índices de refracción con respecto a las velocidades con que se propaga la luz en medios distintos. Esta circunstancia da la posibilidad de comprobar experimentalmente ambas teorías. Pero la comprobación antedicha no se realizó hasta que en el año 1868 el procedimiento del espejo giratorio permitió medir la velocidad de la luz sobre una base de poca longitud. Foucault intercaló entre el espejo giratorio A (fig. 21, § 254) y el espejo cóncavo B un tubo lleno de agua. En estas condiciones la imagen S' se desplazó más que cuando no se intercalaba el agua, es decir, el experimento dio la razón a la teoría ondulatoria: la luz se propaga más despacio en los medios de mayor densidad óptica que en los de menor densidad. Poco antes de realizarse este experimento la teoría ondulatoria había obtenido ya un fundamento sólido en el campo de los fenómenos de la difracción e interferencia de la luz, los cuales indicaban directamente la naturaleza ondulatoria de la luz.

§ 256. Interferencia de la luz. Como ya dijimos, en el siglo XVII ya se conocían los hechos de que la luz se desvía hacia el campo de la sombra geométrica y de que al superponerse los haces luminosos se producen franjas claras y oscuras que se suceden entre sí. El fenómeno de la desviación de la luz hacia el campo de la sombra geométrica recibió el nombre de *difracción* y el de la composición de los haces luminosos que da lugar a la formación de las franjas claras y oscuras, el de *interferencia de la luz.* Del fenómeno de la interferencia se deduce que al superponerse dos flujos luminosos no sólo pueden reforzarse, sino también debilitarse entre sí. Esta propiedad de los flujos luminosos pone de manifiesto directamente su naturaleza ondulatoria, puesto que dos trenes de ondas se refuerzan entre sí en los sitios en que las crestas y las depresiones de las ondas de uno de ellos coinciden respectivamente con las del otro, y se debilitan en los lugares en que las crestas se superponen a las depresiones. Los fenómenos de interferencia habían sido observados en las ondas mecánicas, como, por ejemplo, en las ondas que se producen en la superficie del agua y en las ondas elásticas sonoras (véase el t. I, § 116). Pero en el campo de la óptica los resultados de la composición de los haces luminosos no fueron interpretados exactamente hasta que Young, en el año 1802, los explicó basándose en las ideas ondulatorias, a pesar de que, como ya dijimos, Newton también intentó explicar la formación de las franjas claras y oscuras atribuyendo a la luz las propiedades periódicas de reflejarse o pasar a través de capas transparentes delgadas

(«períodos» de fácil refracción o reflexión). Las ideas ondulatorias de Young fueron desarrolladas ampliamente por Fresnel durante la primera mitad del siglo XIX.

Young realizó el experimento siguiente: tomó una pantalla opaca en la que había un pequeño orificio A (fig. 26) iluminado intensamente por un foco. De acuerdo con el principio de Huygens este orificio se convierte en una nueva fuente de ondas hemisféricas. Estas ondas iban a parar a otros dos orificios pequeños B_1 y B_2, practicados en otra pantalla, los cuales se convertían a su vez en fuentes de ondas. Estas últimas ondas se superponían unas a otras en la región D. Como las vibraciones que se originan en los orificios B_1 y B_2 están provocadas por una misma onda incidente, se realizan en una misma fase y con una misma amplitud. Las ondas que parten de los orificios B_1 y B_2 se encuentran entre sí, en cada uno de los puntos de la región D, con una diferencia de marcha que depende del camino recorrido. Esta diferencia de marcha hace que las ondas se refuercen o se debiliten mutuamente. Por esto es por lo que se observa la sucesión de franjas claras y oscuras.

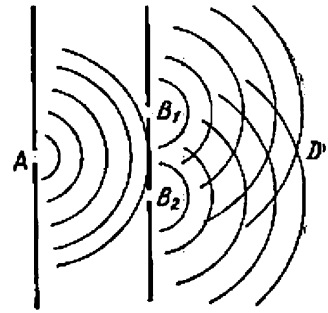

Fig. 26. Esquema del experimento de Young.

Estudiemos ahora este experimento de Young más detenidamente, partiendo de la tesis establecida en el § 109 del t. I, según la cual *las ondas cuyos períodos son iguales interfieren por refuerzo alcanzando un máximo cuando la diferencia de marcha entre ellas* Δ *es igual a un número entero de longitudes de onda* λ:

$$\Delta = \pm k\lambda, \qquad (1)$$

siendo k un número entero, e *interfieren por atenuación dando lugar a un mínimo cuando la diferencia de marcha es igual a un número impar de semiondas*:

$$\Delta = \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (2)$$

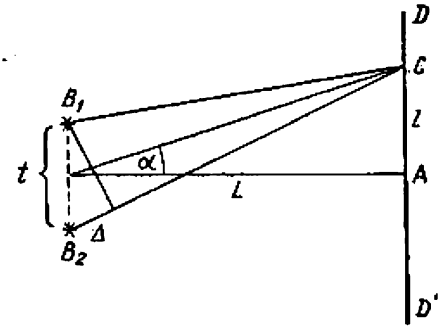

Fig. 27. Esquema para el cálculo de la diferencia de marcha entre los rayos B_1C y B_2C.

Supongamos que las fuentes puntuales de ondas B_1 y B_2 se encuentran entre sí a una distancia t (fig. 27). En los puntos B_1 y B_2 las vibraciones tienen la misma fase. Supongamos también que el resultado de la interferencia de las ondas se observa sobre la pantalla DD',

separada de los puntos B_1 y B_2 por una distancia L, grande en comparación con t. Determinemos la diferencia de marcha Δ con que llegan las ondas al punto C, situado a una distancia l del centro A de la pantalla. Partiendo de la condición de que t y l son mucho menores que L, obtendremos aproximadamente que

$$\frac{\Delta}{t}=\frac{l}{L}, \text{ de donde } \Delta=\frac{l}{L}t.$$

Según la condición (1) en el punto C se formará una franja clara si

$$\Delta=\frac{l}{L}t=\pm k\lambda, \tag{3}$$

y, según la condición (2), la franja será oscura si

$$\Delta=\frac{l}{L}t=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

De esto se deduce que las franjas claras se encontrarán, con respecto al centro A de la pantalla, a unas distancias

$$l=\pm k\frac{\lambda}{t}L, \tag{4}$$

donde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Las franjas oscuras estarán comprendidas entre la claras. La distancia entre dos franjas claras sucesivas Δl será

$$\Delta l=\frac{\lambda}{t}L. \tag{4a}$$

La situación de las franjas claras puede hallarse también por el ángulo $\alpha=\frac{l}{L}$ (fig. 27) aplicando la fórmula (3):

$$\alpha=k\frac{\lambda}{t}.$$

La distancia angular entre dos franjas claras (u oscuras) sucesivas $\Delta\alpha$ será

$$\Delta\alpha=\frac{\lambda}{t}. \tag{4b}$$

Por la igualdad (4b) vemos que la distancia angular entre las franjas viene determinada por la relación λ/t, es decir, por la razón de la longitud de onda λ a la distancia entre los focos t. Esta relación λ/t no debe ser pequeña, puesto que de lo contrario las franjas de interferencia se encontrarán entre sí a unas distancias angulares demasiado pequeñas. La experiencia demuestra que deben tomarse dos focos B_1 y B_2 muy próximos, para que las franjas se encuentren unas de otras a distancias angulares sensibles. Así, $\Delta\alpha$ será igual a 10^{-3} (lo que corresponde a una distancia entre las franjas igual a 1 mm cuando $L = 1$ m) si los orificios B_1 y B_2 se encuentran separados

por una distancia $t = 0{,}5$ mm. Como según la expresión (4b)

$$\lambda = \Delta\alpha \cdot t,$$

deducimos que la longitud de las ondas luminosas es una magnitud muy pequeña, del orden de $5 \cdot 10^{-5}$ cm.

Cuando el experimento se hace con luz blanca todas las franjas, a excepción de la central correspondiente a $k = 0$, presentan diferentes colores y el número de las franjas que se observa es pequeño. Cuando se utiliza luz monocromática de cualquier color, las franjas tienen este mismo color y son mucho más numerosas. Si se trata de luz roja las franjas se encuentran entre sí a grandes distancias angulares $\Delta\alpha$, mientras que si la luz es azul estas distancias son menores. De aquí se deduce que *las luces de distintos colores se diferencian entre sí por sus longitudes de onda: los rayos rojos tienen mayor longitud de onda, mientras que los azules la tienen menor; la luz blanca es una mezcla de ondas de distintas longitudes*, es decir, *de rayos de distintos colores*. Las mediciones realizadas demuestran que a los rayos de los distintos colores les corresponden aproximadamente los intervalos de longitudes de onda que se indican en la tabla II, expresados en micras (es decir, en milésimas de milímetro)

Los rayos cuyas longitudes de onda son mayores de 0,76 μ o menores de 0,40 μ no pueden ser percibidos por el ojo humano. Los primeros reciben el nombre de rayos *infrarrojos* y los segundos el de rayos *ultravioletas*. La luz que tiene una longitud de onda determinada se llama *monocromática*.

Cuando los valores de k son grandes, las franjas de los distintos colores de la luz blanca se superponen y producen una iluminación homogénea. Esto explica el hecho de que el número de franjas de interferencia que se observan con la luz blanca sea limitado.

Tiene importancia destacar, que al hacer el experimento de Young los orificios B_1, B_2 y A deben ser pequeños, porque únicamente cuando las dimensiones del orificio A son pequeñas se consigue un fronte

Tabla II

Color de la luz	Intervalo aproximado de longitudes de onda λ en μ
Rojo	0,76—0,63
Anaranjado	0,63—0,60
Amarillo	0,60—0,57
Verde	0,57—0,50
Azul verdoso	0,50—0,45
Azul	0,45—0,43
Violeta	0,43—0,40

de onda regular, que representa parte de una esfera y que asegura la igualdad de las fases de las oscilaciones que se producen en los orificios B_1 y B_2 y, por consiguiente, una diferencia de marcha determinada entre las ondas que coinciden en un punto cualquiera C de la pantalla. Si no existiera una diferencia de fases constante el reforzamiento de las ondas no se produciría en los mismos puntos durante todo el tiempo y las franjas perderían nitidez. Cuando la iluminación se realiza con dos focos independientes, en los puntos de la pantalla no se obtienen diferencias de marcha constantes y, por consiguiente, no pueden producirse franjas de interferencia. *Los focos que vibran en fases iguales o con una diferencia de fases constante se llaman coherentes. Los focos coherentes son los únicos que pueden producir franjas de interferencia dispuestas de una forma determinada.*

Dos focos independientes, por ejemplo, dos bujías o dos lámparas eléctricas, no son coherentes. Cada uno de estos focos está formado por un número enorme de átomos o de moléculas, los cuales son a su vez focos elementales independientes. Entre las fases en que vibran los átomos de ambos focos no existe ninguna relación constante. Por esta razón, las vibraciones procedentes de los átomos de estos dos focos se superponen unas a otras y producen una iluminación media homogénea. No obstante pueden realizarse experimentos basados en esquemas en los cuales, de forma artificial, se crean focos luminosos coherentes dividiendo la luz de un foco en dos haces. Estos experimentos serán descritos más adelante (§ 261).

§ 257. Formación de ondas estacionarias. En el t. I, al estudiar la cinemática de las ondas, vimos que no solamente pueden interferir las ondas que se propagan en un mismo sentido, sino también las que lo hacen en sentidos opuestos. Al componer ondas de sentidos opuestos cuyas frecuencias y amplitudes son iguales se originan las llamadas *ondas estacionarias*. Estas ondas se caracterizan por tener *nodos*, es decir, puntos donde las vibraciones se compensan entre sí constantemente, y *vientres*, o sitios en que la amplitud de dichas vibraciones es máxima. Los nodos consecutivos se encuentran entre sí a la distancia de $\lambda/2$; esta misma distancia es la que separa los vientres. Entre cada nodo y el vientre más próximo a él hay una distancia igual a $\lambda/4$. En el campo de los fenómenos mecánicos las ondas estacionarias se forman, por ejemplo, cuando se refleja una onda que se propaga desde el extremo de una cuerda a lo largo de ella. Si el extremo de la cuerda está sujeto, en este punto se origina un nodo (fig. 28), debido a la pérdida de una semionda por reflexión en el extremo sujeto.

Las ondas luminosas estacionarias fueron descubiertas experimentalmente en el año 1890 por Wiener. Unas ondas de longitud determinada se reflejaban en un espejo metálico AB (fig. 29) y formaban un tren de ondas estacionarias. Sobre el espejo, y formando con él un

ángulo agudo φ, se colocaba una lámina transparente de vidrio CC' recubierta de una capa muy fina de emulsión fotográfica preparada con colodión (el espesor de esta capa era aproximadamente igual a 1/20 de la longitud de la onda luminosa). En los sitios en que se

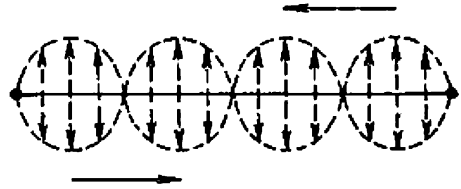

Fig. 28. Formación de ondas estacionarias como resultado de la interferencia de dos ondas que se encuentran.

encontraban los vientres (en la fig. 29 se señalan con trazos punteados) tenía lugar un proceso fotográfico: después de revelar la placa estos sitios resultaban ennegrecidos; en los lugares en que se hallaban los nodos la emulsión no se alteraba. La distancia l entre los vientres

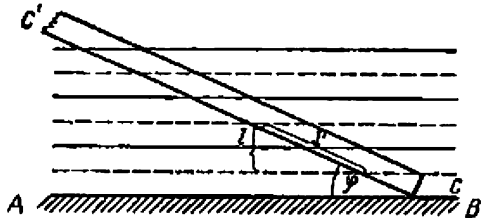

Fig. 29. Formación de ondas estacionarias junto a la superficie de un espejo.

contiguos, como ya dijimos, era igual a $\lambda/2$, es decir, a la mitad de la longitud de la onda luminosa. La distancia l' entre los sitios ennegrecidos de la placa fotográfica era:

$$l' = \frac{l}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{\lambda}{2 \operatorname{sen} \varphi};$$

cuando el ángulo φ es pequeño la distancia l' es mucho mayor que λ, lo que permite distinguir con facilidad las franjas negras que se forman en la placa. Wiener tomó en sus experimentos un ángulo φ del orden de 1′, al cual correspondía una distancia l' del orden de 1 mm. Junto a la superficie del espejo se encontraba un nodo, lo que indica que al reflejarse la luz en dicho espejo se produce un cambio de fase cuyo valor es π.

El hecho de que en las ondas estacionarias se forme un nodo junto a la superficie metálica reflectora puede demostrarse también utilizando el fenómeno de la fosforescencia. Para esto, una parte de una

placa reflectora de vidrio se platea y, después, toda ella se recubre de una capa de sustancia fosforescente cuyo espesor debe ser igual a una pequeña fracción de la longitud de la onda luminosa. La placa se ilumina con luz de longitud de onda determinada, capaz de provocar la fosforescencia. En estas condiciones resulta que la sustancia fosforescente solamente brilla en los sitios donde no hay plata. Esto ocurre porque allí donde la luz se refleja en la plata se forman ondas estacionarias que tienen un nodo junto a la superficie reflectora. (La luz que se refleja en la superficie del espejo no origina ondas estacionarias porque la amplitud de la onda de luz reflejada es mucho menor que la de la luz que incide).

La formación de las ondas estacionarias puede utilizarse también para obtener fotografías en colores. Para ello una placa fotográfica (con una capa gruesa de emulsión) se coloca sobre un espejo de mercurio (fig. 30). La luz que

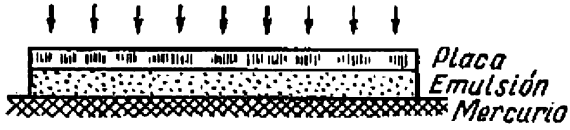

Fig. 30. Procedimiento para obtener fotografías en colores por medio de las ondas estacionarias.

incide perpendicularmente forma en el recubrimiento de la placa ondas estacionarias. El proceso fotográfico tiene lugar solamente en los sitios en que se forman los vientres, por lo que después del revelado se obtiene una serie de capas de plata reducida paralelas a la superficie de la placa. Si al hacer la fotografía la placa se ilumina con luz de un color determinado cuya longitud de onda sea λ_1, la distancia entre las capas de plata será igual a $\lambda_1/2$. Al mirar después esta placa, la luz que incida sobre ella perpendicularmente se reflejará en las sucesivas capas de plata, con la particularidad de que la diferencia de marcha de las ondas reflejadas en dos capas consecutivas será igual a λ_1. Si la longitud de onda de la luz incidente $\lambda = \lambda_1$, las ondas reflejadas se reforzarán entre sí al interferir. Las ondas de cualquier otra longitud tendrán una diferencia de marcha distinta de λ y no se reforzarán entre sí. Efectivamente, supongamos, por ejemplo, que la diferencia de marcha de los rayos que se reflejan en capas contiguas es igual a $\lambda/4$. En este caso la diferencia de marcha de los rayos reflejados en las capas primera y tercera será igual a $\lambda/2$ y se anularán entre sí; lo mismo ocurrirá con los rayos que se reflejan en las capas segunda y cuarta, y así sucesivamente.

En el caso general, cuando la diferencia de marcha entre las ondas reflejadas en dos capas consecutivas es igual a $p\lambda$ (siendo $p < 1$), se atenuarán entre sí aquellas ondas que se reflejen en las capas primera y k, en la segunda y en la $k + 1$, etc., donde k cumple la condición: $k - 1 = \frac{1}{2p}$.

Si la placa se ilumina con luz blanca, del conjunto de las ondas que forman dicha luz solamente se reforzarán aquellas cuya longitud $\lambda = \lambda_1$. Por esta razón, a la luz reflejada parece que la placa tiene el color de la luz con que fue impresionada la fotografía.

§ 258. Polarización de la luz. Los fenómenos de interferencia que hemos descrito en los párrafos anteriores pueden explicarse lo

mismo si se admite que las ondas luminosas son transversales como si admitimos que son longitudinales. Pero existen ciertos procesos en los cuales se pone de manifiesto la diferencia entre las ondas transversales y longitudinales. Cuando una onda transversal se propaga en el sentido aa' (fig. 31, *a*), todos los puntos del medio vibran en un plano determinado AB. Por consiguiente, la onda transversal tiene distintas propiedades con relación a los diversos planos que pasan por su dirección de avance. Con las ondas longitudinales no ocurre

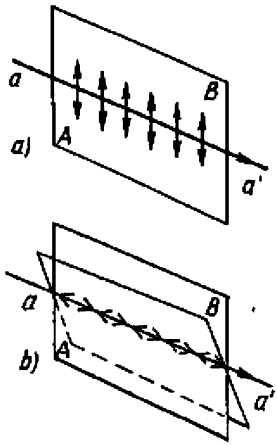

Fig. 31. Esquema de las vibraciones en una onda transversal (*a*) y en una longitudinal (*b*).

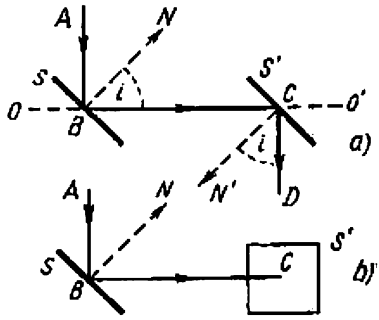

Fig. 32. Polarización de la luz por reflexión en las superficies de dos vidrios.

lo mismo, sino que las vibraciones se efectúan a lo largo de la dirección aa' en que se propaga la onda y, por lo tanto, sus propiedades con respecto a cualquier plano AB (fig. 31, *b*) que pase por la dirección de avance serán iguales.

La luz que irradian la mayoría de los focos ordinarios, por ejemplo, los sólidos caldeados, no pone de manifiesto directamente aquellas propiedades que pudieran demostrar el carácter transversal de sus vibraciones. Este carácter transversal de las vibraciones luminosas solamente se consigue descubrir después que la luz experimenta ciertas variaciones, como, por ejemplo, la de reflejarse en el límite de un medio transparente. Supongamos que el rayo AB (fig. 32) se refleja en el punto B de la superficie del vidrio plano S, formando un ángulo i, y que después se refleja por segunda vez en el punto C de la superficie de otro vidrio plano S', formando un ángulo igual a i. Si se hace girar la superficie S' alrededor del eje OO', que coincide con la dirección del rayo incidente BC, el ángulo de incidencia i permanecerá invariable y sólo cambiará la posición del plano de incidencia de la luz sobre la superficie S' con respecto al plano de incidencia sobre la

superficie *S*. La experiencia demuestra que la intensidad del rayo *CD* depende de la posición relativa de ambos planos de incidencia: el rayo *CD* tendrá una intensidad máxima cuando los planos de incidencia sean paralelos entre sí (fig. 32, *a*) y una intensidad mínima cuando estos planos sean perpendiculares (fig. 32, *b*).

De esta forma la luz, después de reflejarse una vez, pone de manifiesto que la intensidad de los rayos reflejados depende de la orientación del plano de incidencia. La luz que tiene esta propiedad recibe el nombre de *luz polarizada*.

Cuando el ángulo i tiene cierto valor y los planos de incidencia sobre ambas superficies son perpendiculares entre sí, el rayo no se refleja en absoluto en la segunda superficie. En este caso se dice que la luz está *totalmente polarizada. Según la ley enunciada por Brewster, la luz se polariza totalmente cuando el ángulo de incidencia i cumple la condición*

$$\operatorname{tg} i = n, \qquad (1)$$

siendo n el índice de refracción del medio en cuya superficie tiene lugar la reflexión*). Se ha convenido considerar como *polarizada en el plano de incidencia la luz reflejada en una superficie transparente bajo un ángulo que satisfaga la ley de Brewster.*

Al introducir este concepto de plano de polarización podemos decir que los rayos polarizados se reflejan con una intensidad máxima cuando el plano de polarización coincide con el de incidencia y que la reflexión es nula cuando el plano de polarización es perpendicular al de incidencia.

Los hechos mencionados son fáciles de comprobar si se admite que las ondas luminosas son transversales. En las ondas que emiten la mayoría de las fuentes luminosas las vibraciones no están orientadas, sino que se realizan en planos diversos. La luz compuesta por estas vibraciones se llama *luz natural*. Cuando la luz está polarizada parcialmente las vibraciones tienen lugar preferentemente en un plano; si está totalmente polarizada sólo se realizan en un plano determinado, de la forma que se representa en la fig. 31, *a*. La intensidad con que se reflejan las ondas en el límite de una sustancia transparente depende del ángulo que forma el plano de la vibración con el de incidencia.

Como quiera que de por sí no está claro cuál es el ángulo que deben formar los planos de vibración y de incidencia para que las ondas se reflejen con la intensidad máxima, tampoco puede estarlo si el plano de las vibraciones coincide o no con el que hemos llamado plano de polarización. Esta cuestión sólo puede resolverse basándose en la teoría electromagnética de la luz, como indicaremos en los § 259 y 277.

*) En realidad, cuando la luz se refleja formando el ángulo de Brewster presenta huellas de polarización elíptica, lo que se explica por la existencia de una película heterogénea en la superficie.

Al formular la ley de Brewster consideramos que la luz incide sobre el límite de una sustancia transparente que linda con el vacío y tuvimos en cuenta exclusivamente el rayo reflejado. Estudiemos ahora con más detenimiento el caso en que la luz pasa a través del límite de separación entre *dos sustancias* cuyos índices de refracción son respectivamente n_1 y n_2. Cuando el rayo AB (fig. 33) cae sobre el límite que separa ambos medios formando un ángulo de incidencia i_1, se originan dos rayos: uno reflejado BC y otro refractado BD. Este último forma con la normal un ángulo i_2 que cumple la ley de la refracción:

$$\operatorname{sen} i_1 = \frac{n_2}{n_1} \operatorname{sen} i_2. \qquad (2)$$

Supongamos que el rayo AB es de luz natural, es decir, que en él existen vibraciones en todos los sentidos. Si el ángulo de incidencia satisface la ley de Brewster, que ahora toma la forma

$$\operatorname{tg} i_1 = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (1a)$$

el rayo reflejado BD se polariza *parcialmente en el plano perpendicular al de incidencia*. Cuando el rayo incidente es de luz natural, el refractado nunca se polariza por completo. Su grado de polarización será máximo cuando el ángulo de incidencia i_1 sea igual al de Brewster. Si se cumple la ley de Brewster, según la fórmula (1a) tenemos

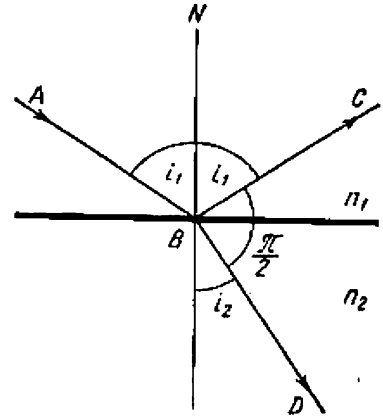

Fig. 33. Cuando la luz incide formando el ángulo de Brewster el rayo reflejado BC es perpendicular a refractado BD.

$$\operatorname{sen} i_1 = \frac{n_2}{n_1} \cos i_1.$$

Poniendo este valor del seno de i_1 en la fórmula de la refracción (2) obtendremos

$$\cos i_1 = \operatorname{sen} i_2.$$

Y como tanto i_1 como i_2 son agudos, de la última igualdad se deduce que

$$i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad (3)$$

de donde se desprende a su vez, que cuando *la luz incide sobre el límite que separa dos sustancias transparentes formando un ángulo igual al de Brewster, el rayo reflejado y el refractado son perpendiculares entre sí.*

§ 259. Teoría electromagnética de la luz. En la década del setenta del siglo pasado Maxwell desarrolló la teoría de los fenómenos electromagnéticos que condujo al descubrimiento de las ondas electromagnéticas (t. II, § 246). Las ondas electromagnéticas experimentan reflexiones y refracciones en los límites de los medios transparentes a ellas y ponen de manifiesto fenómenos de difracción, interferencia y polarización. Las ondas electromagnéticas son transversales. En todos estos sentidos son semejantes a las ondas luminosas. Para establecer definitivamente la identidad entre las ondas electromagnéticas y las luminosas había que demostrar que unas y otras se propagan en el vacío a la misma velocidad. La teoría de Maxwell permitió calcular la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío, la cual resultó ser igual a la relación que existe entre la unidad electromagnética de intensidad de la corriente y la unidad electrostática. De aquí se deduce la posibilidad de comparar la velocidad de la luz en el vacío con la velocidad a que, según la teoría, deben propagarse las ondas electromagnéticas. La importancia de esta comparación fue advertida por A. Stoliétov, el cual elaboró un método experimental exacto para comparar las unidades electromagnética y electrostática de intensidad de la corriente. Los resultados de sus mediciones previas fueron dados a conocer por Stoliétov en el congreso de los naturalistas rusos celebrado en el año 1876. En la actualidad, la relación entre la unidad electromagnética y electrostática de intensidad de la corrientre ha sido medida con gran precisión, obteniéndose para ella el valor de $(2{,}9978 \pm 0{,}0001) \cdot 10^{10}$ cm/s. Este valor coincide, dentro de los límites del error de medición, con el de la velocidad de la luz en el vacío, que es igual, según las mediciones directamente realizadas, a $(2{,}99776 \pm 0{,}00004) \cdot 10^{10}$ cm/s. De esta forma surgió la *teoría electromagnética de la luz*, confirmada posteriormente por multitud de hechos de los cuales varios serán dados a conocer más adelante.

Las ondas electromagnéticas que se generan junto a los vibradores eléctricos sólo se diferencian de las ondas luminosas por su longitud: las primeras tienen una longitud del orden de unos metros, mientras que la de las luminosas es del orden de $5 \cdot 10^{-5}$ cm. Las ondas electromagnéticas de gran longitud se generan por la vibración de las cargas eléctricas de cuerpos macroscópicos, mientras que las ondas luminosas son producidas por las vibraciones de los electrones dentro de los átomos y de las moléculas.

La onda electromagnética se caracteriza por las vibraciones de dos vectores, es decir, por las del vector intensidad de campo eléctrico **E** y por las del vector excitación magnética **H** (t. II, § 246). Estos dos vectores oscilan en planos perpendiculares entre sí pero en fases iguales. La velocidad de propagación de la onda **v** es perpendicular a las direcciones de los vectores **E** y **H**.

En la fig. 34 las oscilaciones del vector **E** se representan con línea de trazo continuo y se producen en el plano XOZ; las oscilaciones del vector **H** están representadas por una línea punteada y se realizan en el plano YOZ; la onda se propaga en el sentido positivo del eje OZ.

La teoría de Huygens y Fresnel, que consideraba la luz como una propagación de vibraciones elásticas en el éter, estaba relacionada únicamente con un vector, que determinaba la elongación de las partículas del éter. Esta teoría encontró serias dificultades cuando se trató de explicar la intensidad y la polarización de los

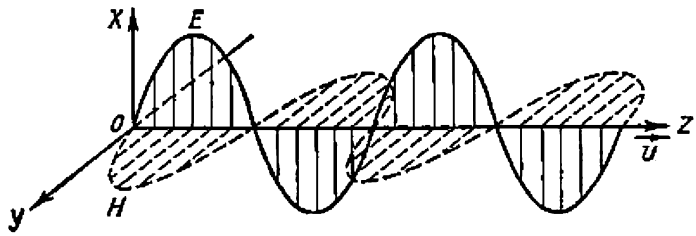

Fig. 34. Onda electromagnética.

rayos reflejados y refractados que se producen cuando la luz pasa a través del límite que separa dos sustancias transparentes. Para dar una idea completa de los fenómenos relacionados con el paso de la luz a través del límite de separación entre dos medios transparentes es necesario indicar qué parte de la luz incidente se refleja, qué parte se refracta y en qué estado de polarización se encuentran el rayo reflejado y el refractado. En el § 251 señalamos que la fracción de luz que se refleja o se refracta depende del ángulo de incidencia, el cual tiene un valor determinado para cada par de cuerpos colindantes. El estado de polarización de los rayos también depende de los ángulos con que la luz incide y se refracta.

Todas estas relaciones de dependencia fueron halladas por Fresnel a principios del siglo pasado, con la particularidad de que partió para ello de la teoría del éter elástico. Pero al cumplirse las condiciones necesarias en el plano de separación entre dos medios (sustancias) elásticos resultaba que las vibraciones luminosas debían tener parcialmente un carácter longitudinal y, por consiguiente, la luz reflejada no podía polarizarse totalmente con ningún ángulo de incidencia. Pero esto contradecía los resultados experimentales. Para evitar esta contradicción Fresnel tuvo que admitir que la elasticidad del éter era la misma en las diversas sustancias, aunque su densidad fuera diferente. Pero esta hipótesis también encontró toda una serie de dificultades cuando se intentó hacer extensiva la teoría a los cristales. La deducción de las fórmulas de Fresnel exentas de con-

tradicciones fue posible únicamente cuando se partió de la base de la teoría electromagnética de la luz (véase el § 277). Esta teoría demuestra que cuando los rayos se reflejan formando el ángulo de Brewster *el vector intensidad de campo* **E** *del rayo reflejado oscila en un plano perpendicular al de incidencia*, mientras que el vector excitación magnética **H** oscila en este último plano. En el § 258 señalábamos que, convencionalmente, todo rayo reflejado bajo el ángulo de Brewster se considera polarizado en el plano de incidencia. Por lo tanto resulta que en la onda polarizada el vector

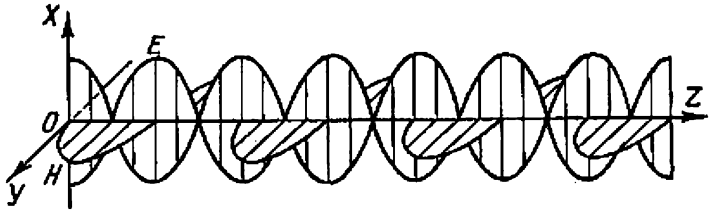

Fig. 35. Onda electromagnética estacionaria.

excitación magnética vibra en el plano de polarización y el vector intensidad de campo en uno normal a aquél.

Al llegar al límite entre dos sustancias los vectores intensidad de campo y excitación magnética quedan sometidos a diferentes condiciones. Esto hace que cuando se forman ondas estacionarias como resultado de su reflexión en un espejo metálico, los vientres del vector intensidad de campo coincidan con los nodos del vector excitación magnética y viceversa (fig. 35). El vector intensidad de campo **E** tiene un nodo en la superficie del espejo, mientras que el vector excitación magnética tiene en este sitio un vientre. En el § 257 describimos el experimento de Wiener quien, por medio de fotografías, descubrió las ondas estacionarias que se forman al reflejarse la luz en un espejo plano, con la particularidad de que junto a la misma superficie del espejo se encontraba un nodo. De aquí se deduce que la acción fotoquímica producida en la capa fotográfica se debe a las vibraciones del vector intensidad de campo; lo mismo puede decirse de otros efectos producidos por la luz, como la luminiscencia, el efecto fotoeléctrico o los efectos fisiológicos.

Los experimentos realizados con ondas estacionarias obtenidas con luz polarizada permiten comprobar directamente que el vector intensidad de campo de la onda luminosa oscila perpendicularmente al plano de polarización. Estos experimentos consisten en lo siguiente: la luz, polarizada en el plano de incidencia, se refleja en una superficie metálica especular formando un ángulo de 45°. Como en este caso el vector intensidad de campo oscila en un plano perpendicular al de incidencia, se tiene que las oscilaciones de los

vectores intensidad de campo correspondientes a las ondas incidente y reflejada son paralelas entre sí (fig. 36, *a*). Por esta razón se interfieren y forman ondas estacionarias que se observan en realidad. Si el vector intensidad de campo oscilara en el plano de polari-

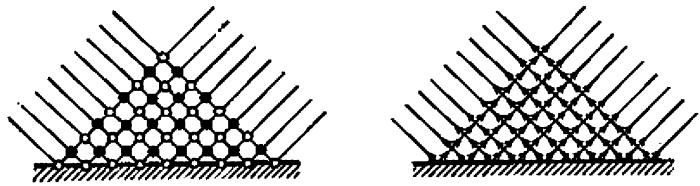

Fig. 36. Esquema del experimento con las ondas estacionarias obtenidas con luz polarizada.

zación, los sentidos de sus vibraciones en las ondas incidente y reflejada serían perpendiculares entre sí (fig. 36, *b*) y no se produciría la interferencia ni se formarían ondas estacionarias.

La longitud de las ondas que emiten los átomos y las moléculas no se reduce al intervalo comprendido entre 0,76 μ y 0,4 μ, entre

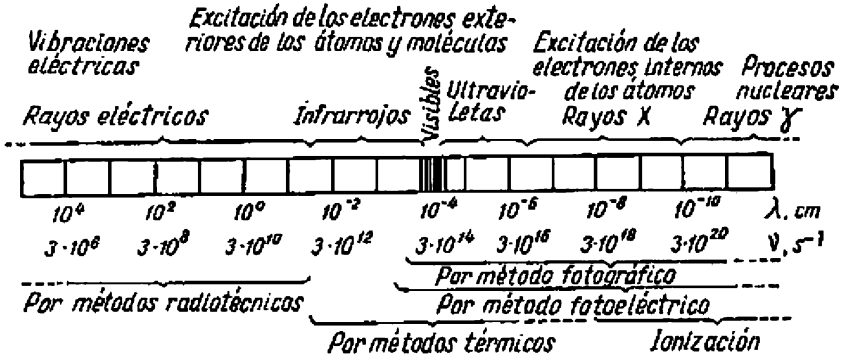

Fig. 37. Escala de las ondas electromagnéticas.

cuyos límites se encuentran las ondas capaces de actuar sobre nuestros ojos y producir sensaciones visuales subjetivas. Los cuerpos incandescentes, los gases que se iluminan bajo la acción de la descarga eléctrica y otras fuentes de luz emiten simultáneamente ondas de longitudes mayores de 0,76 μ y menores de 0,4 μ. Los métodos modernos de generación de ondas electromagnéticas por medio de vibradores macroscópicos también permiten obtener ondas cuyas longitudes abarcan un gran intervalo. Finalmente, existen procedimientos para provocar ondas electromagnéticas mucho más cortas que las luminosas.

En la fig. 37 se muestra la *escala de ondas electromagnéticas*. En su parte central se indica la longitud de las ondas λ en centí-

metros y su frecuencia ν en s^{-1} (hertzios). En la parte superior se indica el procedimiento empleado para generarlas y en la inferior, el utilizado para registrarlas. El intervalo que abarca desde $\lambda = 7{,}6 \cdot 10^{-5}$ cm hasta $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$ cm es el que corresponde a las *ondas luminosas* que percibe el ojo humano. Pero los rayos visibles pueden registrarse también por varios procedimientos objetivos, como son: el fotográfico, el fotoeléctrico y el térmico (partiendo del calentamiento que producen). Más allá de los rayos visibles de gran longitud de onda se encuentran los *rayos infrarrojos*, que nuestro ojo no percibe. Estos rayos son emitidos por las mismas fuentes que los visibles, es decir, por los cuerpos incandescentes, por los gases que se iluminan al producirse descargas eléctricas, etc.

Hasta longitudes aproximadas de $\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ cm pueden descubrirse por procedimientos fotográficos y hasta $\lambda = 6 \cdot 10^{-4}$ cm por procedimientos fotoeléctricos. Los procedimientos térmicos son más universales y con ellos se han observado rayos infrarrojos con longitudes de onda de cerca de $1{,}5 \cdot 10^{-1}$ cm, es decir, aproximadamente, hasta de 1,5 mm.

Los procedimientos modernos de generación de ondas electromagnéticas por medio de lámparas catódicas (t. II, § 241) permiten obtener ondas cuyas longitudes pueden tener desde kilómetros hasta varios centímetros. Estas ondas se utilizan en radiotécnica. En 1906 P. N. Liébedev, valiéndose de vibradores minúsculos, obtuvo ondas electromagnéticas de longitud $\lambda = 4$ mm. M. A. Levítskaia, también con vibradores muy pequeños, consiguió ondas electromagnéticas con longitudes de décimas de milímetro. En 1924 V. K. Arkádiev y A. A. Glagóleva-Arkádieva produjeron ondas de cerca de 0,1 mm de longitud. En calidad de generador emplearon las chispas que se producían entre limaduras de hierro suspendidas en aceite. De esta forma, las ondas electromagnéticas cuya longitud es de décimas de milímetro pueden conseguirse y registrarse por dos procedimientos diferentes: como rayos eléctricos ultracortos y como rayos infrarrojos de onda larga.

Más acá de las ondas cortas, a partir de las visibles, se encuentran los *rayos ultravioletas*. Estos últimos, hasta llegar a $\lambda = 1{,}8 \times 10^{-5}$ cm pueden ser estudiados por los mismos procedimientos experimentales que los rayos visibles. En la región de las longitudes de onda menores de $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ cm se encuentran grandes dificultades debido a que estos rayos son absorbidos por casi todas las sustancias, incluso por el aire. Estas dificultades fueron vencidas mediante el empleo de aparatos de vacío especiales (los llamados espectrógrafos de vacío) y de placas fotográficas que no contienen gelatina. En la actualidad, gracias a los espectrógrafos de vacío, se han estudiado los rayos ultravioletas hasta longitudes de onda del orden de $6 \cdot 10^{-7}$ cm.

En el año 1895 Roentgen descubrió unos nuevos rayos, que se producen cuando un flujo de electrones rápidos choca con cuerpos sólidos. Estos rayos no se ven a simple vista, pero tienen la propiedad de provocar fluorescencia visible en muchos cuerpos sólidos (platinocianuro de bario, blenda de zinc y otros), de influir sobre las placas fotográficas y de ionizar el aire. Actualmente, para producir los rayos X o de Roentgen se utilizan tubos de vacío en los cuales la fuente de electrones es un cátodo caliente K (fig. 38). Enfrente de este cátodo se coloca un cuerpo sólido macizo A, llamado *anticátodo*, en el cual chocan los electrones. Para comunicar a los electrones la velocidad necesaria, entre el cátodo K y el anticátodo A se aplica una diferencia de potencial $V_1 - V_2$ del orden de varias decenas de miles de voltios. La superficie del anticátodo es la que sirve de fuente de rayos X. Estos rayos tienen un gran poder de penetración, pudiendo pasar a través de muchos cuerpos opacos a la luz visible, como, por ejemplo, a través del papel negro, de la madera, etc.

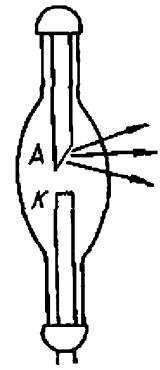

Fig. 38. Tubo de rayos X.

Los rayos X son emitidos por los electrones de las capas internas de los átomos, mientras que los rayos visibles, los infrarrojos y los ultravioletas son emitidos por los electrones de las capas exteriores de los átomos y de las moléculas y por estas últimas al girar u oscilar. El campo de los rayos X estudiados hasta la fecha se extiende desde $\lambda = 10^{-8}$ cm hasta $\lambda = 10^{-10}$ cm y aún menores. El campo de los rayos X de onda larga se superpone al de los ultravioletas y entra en la región en que son intensamente absorbidos por las sustancias. Por el contrario, los rayos X de pequeña longitud de onda, como ya dijimos, casi no son absorbidos.

Finalmente, en aquellos procesos que tienen lugar dentro de los núcleos atómicos, o al frenarse los electrones más rápidos, se producen los llamados *rayos* γ, los cuales tienen longitudes de onda iguales a 10^{-9} cm o menores.

Es decir, la Física moderna opera con una escala de ondas electromagnéticas que abarca un campo extraordinariamente amplio. Estas ondas son emitidas por vibradores muy diversos y registradas por procedimientos que se diferencian mucho entre sí, pero su naturaleza electromagnética es única, se propagan en el vacío a una misma velocidad y todas ellas producen fenómenos de interferencia y difracción. No obstante, como dijimos en la introducción, al variar la longitud de las ondas aparecen diferencias cualitativas: los rayos que se caracterizan por tener longitudes de onda pequeñas son los que con mayor claridad ponen de manifiesto sus propiedades corpusculares al mismo tiempo que las ondulatorias.

§ 260. Energía y cantidad de movimiento del flujo luminoso. Presión luminosa. Las ondas luminosas transportan energía. Esta energía la reciben del foco luminoso y la ceden al cuerpo que las absorbe. *Recibe el nombre de flujo luminoso o de energía radiante a través de una superficie la cantidad de energía transportada por la luz a través de dicha superficie en la unidad de tiempo.* Por lo tanto, el flujo luminoso tiene dimensiones de potencia y puede medirse en ergios por segundo, en vatios, etc. La medición de flujo de energía radiante en unidades absolutas puede efectuarse esquemáticamente de

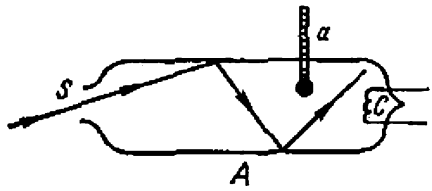

Fig. 39. Medición del flujo de energía luminosa en unidades absolutas.

la forma siguiente. La energía luminosa penetra a través del orificio S (fig. 39) en un recipiente cerrado A cuyas paredes son absorbentes. Si las dimensiones del orificio S son pequeñas la luz es absorbida prácticamente en su totalidad dentro del recipiente A, independientemente de la longitud de onda que tenga, puesto que la parte de luz que vuelva a salir por el orificio S será insignificante. A consecuencia de esta absorción de la energía luminosa empezarán a calentarse las paredes de la vasija. Y si las condiciones de intercambio térmico son constantes, llegará un momento en que se establecerá el equilibrio térmico. Este equilibrio corresponderá a una temperatura T determinada, que podrá medirse con el termómetro a. Una vez medida la temperatura T, se cierra la entrada de energía luminosa en el recipiente A, y conservando las *mismas condiciones de intercambio térmico* se procede a calentar el recipiente por medio de una corriente eléctrica que se hace pasar por la espiral C. La intensidad de la corriente se regula de tal forma que la temperatura T continué siendo la misma que antes. Evidentemente, esto ocurrirá cuando la potencia que desarrolla la corriente en la espiral sea igual a la potencia del flujo luminoso. Como la potencia de la corriente eléctrica puede medirse en unidades absolutas conociendo la intensidad de la corriente y la resistencia del conductor, por este procedimiento puede medirse también, en unidades absolutas, el flujo de energía luminosa.

El ojo humano puede percibir potencias extraordinariamente pequeñas. Cuando se dan las condiciones de sensibilidad máxima del ojo, basta con que incida sobre la superficie de la pupila un flujo de $2 \cdot 10^{-9}$ ergios/s de potencia para que se produzca una sensación

visual. Pero el procedimiento de medición de la potencia de la luz por medio del calentamiento que produce, que acabamos de describir, es mucho menos sensible y con él solamente pueden medirse flujos mucho más potentes. Existen otros procedimientos más sensibles para registrar objetivamente y medir el flujo luminoso (véase el § 306), pero las ventajas que ofrece el método descrito son: la de poderse realizar la apreciación en medidas absolutas y la de ser igualmente útil cualesquiera que sean las longitudes de onda de la luz.

La teoría electromagnética de la luz demuestra que esta última ejerce presión sobre la superficie que la refleja o absorbe. A esta conclusión puede llegarse teniendo en cuenta que el flujo luminoso no sólo tiene energía, sino también cantidad de movimiento. Si en el vacío se propaga en una dirección determinada un flujo luminoso y la energía correspondiente a una unidad de volumen es igual a w, la cantidad de movimiento correspondiente a esta unidad de volumen será igual a $K = \frac{w}{c}$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío (véase el § 334). El vector cantidad de movimiento K está dirigido en el sentido de la propagación de la luz. Si como resultado de la acción mutua entre la luz y un cuerpo cualquiera (por ejemplo, como resultado de la absorción o de la reflexión) se produce una variación en el vector cantidad de movimiento K, sobre el cuerpo actuará el impulso de la fuerza $f\Delta t$, cuya relación con la variación de la cantidad de movimiento ΔK será:

$$f\Delta t = \Delta K,$$

donde Δt es el tiempo durante el cual se produce la variación del vector cantidad de movimiento en la magnitud ΔK. Por lo tanto, sobre el cuerpo que absorbe o refleja la luz debe actuar una determinada fuerza f. La magnitud de la componente normal de esta fuerza, referida a la unidad de superficie del cuerpo, nos da la magnitud de la *presión luminosa* p que actúa sobre ella. Para calcular esta presión p, supongamos que sobre la superficie ΔS incide perpendicularmente un flujo luminoso cuya densidad volumétrica de energía es w. Supongamos también que la superficie ΔS absorbe totalmente los rayos que sobre ella inciden. En este caso la luz queda absorbida y su cantidad de movimiento se hará igual a cero. Por consiguiente, durante el tiempo Δt se producirá en la cantidad de movimiento una variación ΔK numéricamente igual a la cantidad de movimiento correspondiente al volumen de un paralelepípedo que tenga una sección transversal igual a ΔS y una longitud $l = c\Delta t$ (fig. 40). El volumen de este paralelepípedo será igual a $c\Delta t\Delta S$ y la cantidad de movimiento que le corresponde es

$$K = \frac{w}{c} c\Delta t\Delta S = w\Delta t\Delta S.$$

De esta igualdad obtenemos que la presión p, que actúa sobre la superficie ΔS, será

$$p = \frac{K}{\Delta t \Delta S} = w.$$

Es decir, la presión ejercida sobre la superficie absorbente será numéricamente igual a la densidad volumétrica de la energía del flujo luminoso.

Cuando la superficie es totalmente reflectora, si los rayos inciden sobre ella perpendicularmente, la luz cambiará el sentido de su propagación y saldrá en sentido contrario. Entonces, la densidad de la energía será igual en los flujos incidente y reflejado, es decir,

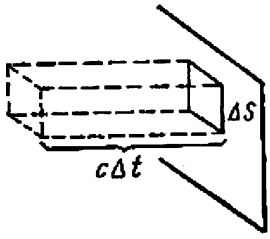

Fig. 40. Esquema para el cálculo de la presión luminosa.

la variación de la cantidad de movimiento será igual a $2K$ y la magnitud de la presión luminosa $\rho = 2w$, o sea, dos veces mayor que en el caso de la absorción. Finalmente, si la superficie no es totalmente reflectora, sino que tiene un índice de reflexión $\rho < 1$, una parte de la energía $(1 - \rho)\, w$ será absorbida y otra parte, igual a ρw, será reflejada. Como resultado la presión luminosa será

$$p = (1 - \rho)\, w + 2\rho w = (1 + \rho)\, w. \qquad (1)$$

Esta expresión puede transformarse teniendo en cuenta que la densidad del flujo de energía luminosa u está relacionada con la densidad de la energía w por la ecuación (véase el t. I, § 112)

$$u = wc,$$

donde c es la velocidad de la luz. Basándonos en esto, en la fórmula (1) podemos poner u/c en lugar de w y obtendremos que

$$p = \frac{u}{c}(1 + \rho). \qquad (2)$$

La expresión (2) puede obtenerse también como consecuencia directa de la teoría electromagnética de la luz.

Como quiera que la velocidad de propagación de la luz c es muy grande, la presión que ejercen los flujos luminosos que se pueden obtener prácticamente es pequeña. Así, la presión que los rayos

solares directos ejercen los días claros, cuando la absorción es total, es igual a 0,4 mg por metro cuadrado. Esta presión es difícil de notar por lo insignificante de su valor. El primero en medir experimentalmente la presión luminosa fue el profesor de la Universidad de Moscú P. N. Liébedev (1901). El elemento fundamental del aparato de Liébedev consiste en una suspensión muy ligera, colgada

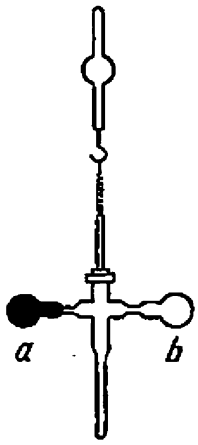

Fig. 41. Aletas *a* y *b* para observar la presión luminosa.

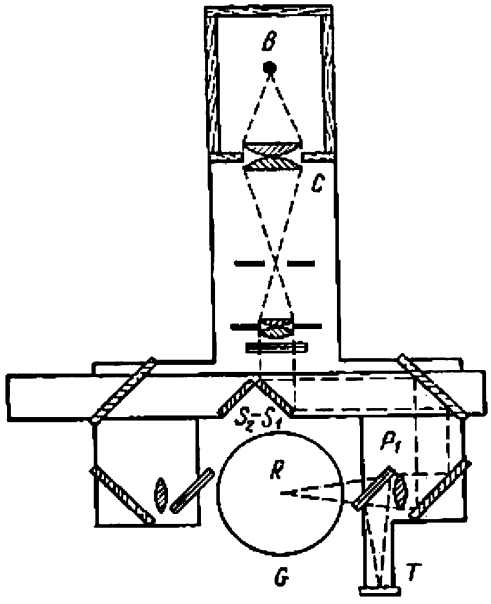

Fig. 42. Esquema del artificio de P.N. Liébedev para medir la presión luminosa.

de un hilo, a la que iban sujetas unas aletas *a* y *b* (fig. 41), también muy ligeras, de las cuales una (por ejemplo, la *a*) estaba pintada de negro y la otra se mantenía brillante. Esta suspensión se introducía en un recipiente *G*, en el cual se hacía el vacío (fig. 42). La luz procedente de la lámpara de arco *B* se dirigía por medio de un sistema de lentes y espejos sobre una de las aletas (en el punto *R* de la fig. 42). La presión luminosa hacía que la suspensión girase y que se fuera torciendo el hilo en que estaba colgada. Valiéndose de los espejos S_1 y S_2 se podía iluminar una u otra cara de la aleta y de esta forma variar el sentido de la torsión del hilo. Esta torsión se observaba por medio de un tubo y de un espejito, que también iba sujeto al hilo. Comparando las torsiones que se producían al iluminar la aleta negra y la brillante, P. N. Liébedev pudo establecer que la presión que soporta la superficie negra es dos veces menor que

la que sufre la superficie reflectora, lo cual se corresponde perfectamente con la teoría.

Dirigiendo con la lamina P_1 una porción determinada del flujo luminoso sobre el termoelemento T, se podía medir la magnitud de la energía luminosa incidente y comprobar cuantitativamente los datos teóricos. Según las mediciones realizadas por Liébedev, la magnitud de la presión luminosa resultó encontrarse dentro de los límites del error de observación y coincidía con la calculada por la fórmula (2).

La presión luminosa era muy difícil de descubrir experimentalmente y aún más de medir con exactitud, puesto que el giro de la suspensión podía estar determinado por toda una serie de causas secundarias. En primer lugar, entre estas causas hay que incluir el llamado efecto radiométrico, producido por el calentamiento junto a la superficie de la aleta de los restos del gas que contenía el recipiente.

Posteriormente (en 1908) Liébedev resolvió otro problema experimental aún más difícil, el de descubrir y medir la presión luminosa sobre los gases. Este trabajo confirmó la exactitud de la hipótesis de F. Bredíjin, que consideraba que la formación de las colas de los cometas se debe a las fuerzas que tienden a alejar del Sol las partículas que las constituyen. Estas fuerzas repulsivas vienen determinadas por la presión que sobre dichas partículas ejercen los rayos solares.

CAPITULO XXIII

Interferencia y difracción de la luz

§ 261. Procedimientos para observar la interferencia de la luz. En el capítulo anterior se indicó que las ondas luminosas son vibraciones electromagnéticas. No obstante, para explicar los fenómenos fundamentales de la interferencia y de la difracción de la luz basta conocer el carácter ondulatorio de su propagación, sin necesidad de tener en cuenta la naturaleza electromagnética de este proceso. Por esta razón, en los párrafos siguientes nos ocuparemos de las ondas luminosas caracterizándolas únicamente por su amplitud, fase, longitud de onda y velocidad de propagación, haciendo caso omiso de que para su definición exacta hay que considerar la existencia de dos vectores, es decir, del vector intensidad de campo E y del vector excitación magnética H.

En el § 256 señalábamos que dos focos luminosos independientes, por ejemplo, dos lámparas eléctricas, no son coherentes y, por consiguiente, no pueden servir para observar el fenómeno de la interferencia. A continuación vamos a examinar una serie de experimentos en las cuales se crean artificialmente focos coherentes.

1. Espejos de Fresnel. Fresnel propuso utilizar como focos coherentes las dos imágenes que una misma fuente real de luz produce en dos espejos planos. El esquema de este experimento de Fresnel se muestra en la fig. 43, donde A_1O y A_2O son dos espejos planos colocados formando un ángulo φ; S es el foco luminoso, que se encuentra a una distancia r del punto de contacto de los dos espejos O. Para construir las imágenes que el foco S produce en los dos espejos partiremos del hecho de que la imagen virtual que reproduce todo espejo plano se encuentra aparentemente detrás de él y a una distancia de su superficie igual a la que media por delante entre el objeto y dicha superficie (véase el § 251). Tomando como centro el punto O, tracemos una circunferencia de radio $r = OS$ y bajemos desde el punto S una perpendicular a la prolongación de la recta OA_1; el punto B_1 de intersección de la prolongación de esta perpendicular con la circunferencia nos dará la imagen del punto S en el primer espejo OA. De la misma forma construiremos la imagen B_2 que produce en el segundo espejo OA_1. Por otra parte, la imagen B_2 se encuentra en el mismo punto a que se trasladaría la B_1 si el primer espejo OA_1 girara en un ángulo φ. Por lo tanto, $\angle B_1OB_2 = 2\varphi$ (véase el § 251) y la distancia lineal t entre B_1 y B_2 será aproximadamente igual a $2\varphi r$:

$$t \approx 2\varphi r. \qquad (1)$$

La luz de ambas imágenes B_1 y B_2 incide sobre la pantalla DD', que se encuentra a una distancia L_0 de los espejos. La pantalla E impide que llegue a la DD' la luz directa del foco S. Como quiera que ambas imágenes B_1 y B_2 reproducen las vibraciones de un mismo foco real, son coherentes, y en la pantalla DD' se observan las franjas de interferencia. Según la fórmula (4a) del § 256, la distancia entre estas franjas

$$\Delta l = \frac{\lambda}{t} L,$$

donde L es la distancia desde los focos hasta el sitio en que se observan las franjas. Poniendo en esta fórmula en lugar de t su valor

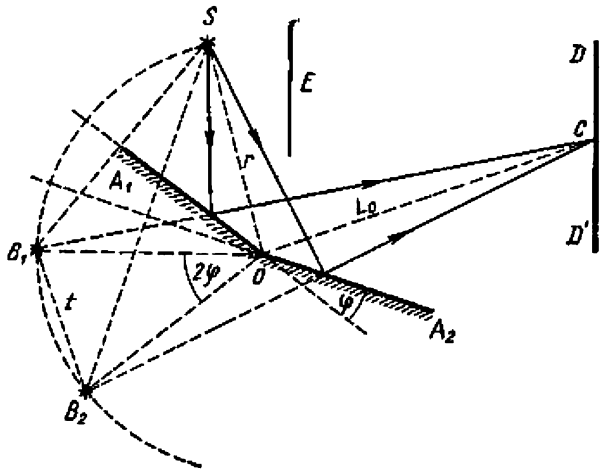

Fig. 43. Espejos de Fresnel.

según (1) y teniendo en cuenta que, aproximadamente, $L = L_0 + r$, obtenemos que

$$\Delta l = \frac{L_0 + r}{2\varphi r}\lambda, \quad \text{de donde} \quad \lambda = \frac{2\varphi r}{L_0 + r}\Delta l.$$

Como en esta última fórmula todas las magnitudes del segundo miembro pueden medirse, es evidente que el experimento con los espejos de Fresnel hace posible la medición de la longitud de las ondas luminosas λ.

En el experimento de Fresnel hay que poner los espejos de manera que formen entre sí un ángulo φ muy pequeño, ya que de lo contrario las franjas resultan demasiado estrechas. El foco luminoso se toma en forma de una rendija estrecha paralela a la arista O que forman los espejos. En estas condiciones los máximos de la interferencia tienen el aspecto de franjas rectas paralelas. Si la observación se hace con luz blanca, se obtiene una franja central blanca

($k = 0$ y se refuerzan los rayos de todas las longitudes de onda λ) y todas las demás coloreadas.

2. **Biprisma de Fresnel.** Este experimento es una variante simplificada del anterior. La luz procedente de un foco S se refracta en dos prismas con pequeños ángulos de refracción A y A' (fig. 44), unidos por sus bases. Estos prismas desvían los rayos en sentidos

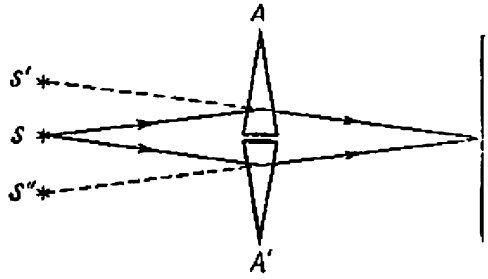

Fig. 44. Biprisma de Fresnel.

opuestos y, de esta forma, se producen los dos focos coherentes virtuales S' y S''. Los rayos de estos focos, al superponerse en la región D, producen las franjas de interferencia.

3. **Espejo de Lloyd.** En el experimento propuesto por Lloyd interfieren los rayos que proceden directamente de un foco S (fig. 45)

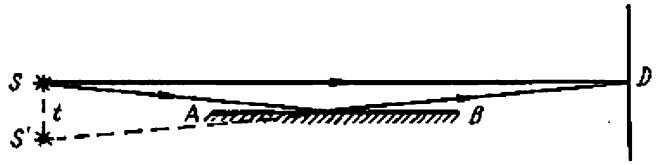

Fig. 45. Esquema del experimento de Lloyd.

con los que se reflejan en la superficie del espejo AB. Estos últimos se comportan como si vinieran del foco virtual S', coherente con el S. Para que la distancia t entre S y S' sea suficientemente pequeña, los rayos deben reflejarse en el espejo formando un ángulo de reflexión de cerca de 90°. Como foco luminoso se emplea una rendija paralela al plano del espejo.

Una particularidad de las figuras de interferencia que se observan con el espejo de Lloyd es la de que la *franja central que se obtiene no es brillante, sino oscura*. Esto indica que los rayos que recorren un mismo camino geométrico se encuentran, en el experimento de Lloyd, con una diferencia de marcha de $\lambda/2$. Esta *«pérdida» de una semionda* (o en otras palabras, *esta variación de fase en* π) *se*

produce cuando la luz se refleja en la superficie del vidrio, cuyo índice de refracción es mayor que el del aire. Más adelante veremos en qué casos se produce la pérdida de una semionda al reflejarse la luz en medios transparentes.

4. Experimento de Línnik. En todos los experimentos para estudiar la interferencia que hemos descrito hasta ahora los dos focos coherentes se encontraban en una recta perpendicular a la dirección media de propagación de la luz. El primero en proponer un experimento en el que los focos coherentes S y S' se encuentran en la misma línea a lo largo de la cual se propaga la luz fue el físico soviético V. P. Línnik, en 1935. El esquema de este experimento es el siguiente: la luz procedente de un foco puntual S (fig. 46) produce una onda esférica AB. En el camino que recorre la onda AB se interpone una lámina semitransparente de caras planas y paralelas que, aunque debilita un poco la onda AB, no deforma su superficie. En esta lámina se practica un pequeño orificio S', el cual, de acuerdo con el principio de Huygens, hace las veces de origen de una nueva onda esférica $A'B'$ cuyo centro es S'. Las ondas AB y $A'B'$ son coherentes y producen en la pantalla D franjas de interferencia en forma de anillos.

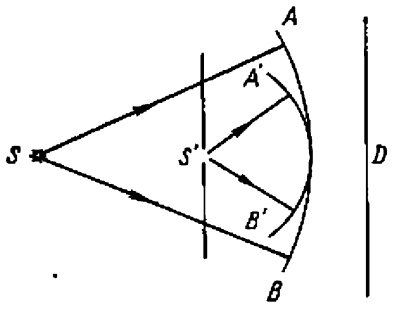

Fig. 46. Esquema del experimento de V. P. Línnik.

El foco S puede tomarse también en forma de raya delgada (de rendija iluminada en una pantalla opaca) y el orificio S' en forma de rendija paralela a aquélla. En este caso las franjas de interferencia que se producen en la pantalla D tienen la forma de líneas paralelas.

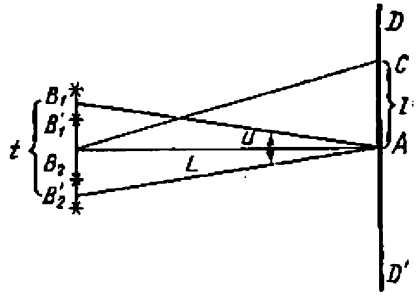

Fig. 47. Esquema para el cálculo de las dimensiones tolerables de los focos.

En todas las consideraciones anteriores hemos partido de que el foco luminoso era puntual. Solamente en este caso las franjas de interferencia que se obtienen son perfectamente definidas. Si las fuentes de luz tienen dimensiones finitas, esto da lugar a que las franjas de interferencia pierdan nitidez o desaparezcan por completo. Con objeto de establecer las dimensiones tolerables de los focos examinaremos el esquema del experimento de interferencia más simple, es decir, el correspondiente a la fig. 27. Pero ahora vamos a considerar que los focos coherentes B_1B_1' y B_2B_2' (fig. 47) tienen una extensión finita d. Dividiendo cada uno de estos focos en dos partes iguales, cuya extensión será $d/2$, consideremos estas mitades como si fueran focos

luminosos puntuales. Cada pareja de focos puntuales producirá un sistema de franjas de interferencia.

Estos dos sistemas de franjas de interferencia estarán desviados entre sí en una magnitud igual a la distancia que hay entre las mitades de cada uno de los focos B_1B_1' y B_2B_2', es decir, en la magnitud

$$\delta l = \frac{d}{2}. \tag{2}$$

Las franjas brillantes de cada uno de los sistemas estarán separadas entre sí, según la fórmula (4a) del § 256, por una distancia

$$\Delta l = \frac{\lambda}{t} L, \tag{3}$$

donde t es la distancia entre los focos, L es la distancia desde los focos hasta la pantalla y λ la longitud de onda de la luz que interfiere.

Si la desviación δl de una de las figuras de interferencia con respecto a la otra es igual a $1/2\Delta l$, las franjas brillantes de uno de los sistemas coincidirán con las oscuras del otro y la figura de interferencia se desvanecerá por completo. Generalmente se admite que las franjas son aún suficientemente nítidas cuando la desviación de una de las figuras de interferencia con respecto a la otra es igual a $1/4\Delta l$. Basándonos en esto y aplicando las fórmulas (2) y (3) obtenemos la siguiente condición cuyo cumplimiento garantiza que las franjas de interferencia pueden observarse:

$$d \leqslant \frac{1}{2} \frac{\lambda}{t} L \tag{4}$$

Para valorar las dimensiones tolerables que deben tener los focos supongamos que $t = 5$ mm y $L = 1$ m. Entonces, para $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm, de acuerdo con (4) tendremos que

$$d \leqslant \frac{1}{2} \frac{5 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^{-1}} \cdot 10^2 \text{ cm} = 0{,}05 \text{ mm}.$$

Transformemos la fórmula (4) introduciendo en ella el ángulo u, bajo el cual se ve la distancia t entre los focos cuando se mira desde el centro de la pantalla A (fig. 47). Entonces

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = \frac{t/2}{L}.$$

Considerando que el ángulo u es pequeño obtendremos, aproximadamente, que $u = t/L$, lo que nos permite escribir la fórmula (4) de la forma:

$$d \leqslant \frac{1}{2} \frac{\lambda}{u}. \tag{4a}$$

De la fórmula (4a) se deduce que cuanto mayor sea el ángulo u tanto menores deberán ser las dimensiones de los focos que permiten ver aún la figura de interferencia.

§ 262. Interferencia por reflexión en una lámina transparente. Son muy frecuentes los casos de interferencia que se producen cuando un haz de rayos luminosos se refleja en las dos superficies de una lámina transparente. Estudiaremos separadamente dos de estos casos: primero, el de la interferencia de haces paralelos producidos

por reflexión en las superficies también paralelas de una lámina plana y, segundo, el de la interferencia de los haces que se originan por reflexión en las superficies de una lámina cuyo espesor varía de un punto a otro. En el primer caso se producen las llamadas *franjas de interferencia de igual inclinación* y, en el segundo, *franjas de interferencia de igual espesor*.

1. Franjas de interferencia de igual inclinación. Examinemos el caso de una lámina homogénea de espesor t (fig. 48) cuyas superficies planas AA' y BB' son paralelas entre sí. Supongamos que con el foco puntual S y una lente L_1 se obtiene un haz de rayos paralelos aa_1,

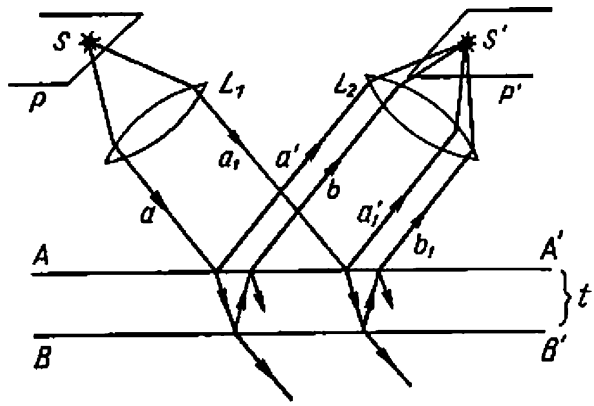

Fig. 48. Interferencia de dos haces al reflejarse en una lámina de caras planas y paralelas.

Este haz pasa parcialmente a través de la lámina transparente y parcialmente se refleja en ella. Como quiera que la reflexión tiene lugar en las superficies AA' y BB', se producen dos haces reflejados $a'a_1'$ y bb_1 con una diferencia de marcha determinada. Estos haces se encuentran después en el punto S', del plano focal principal de la lente L_2. Veamos el resultado de su interferencia en este punto. Según el valor que tenga la diferencia de marcha, las vibraciones de ambos haces se reforzarán o se debilitarán más o menos entre sí.

Para calcular la diferencia de marcha tomaremos del haz el rayo a (fig. 49), que incide sobre la primera superficie en el punto A formando un ángulo de incidencia i_1. Este rayo se refleja parcialmente, formando el rayo a', y parcialmente se refracta, después de lo cual incide sobre la segunda superficie de la lámina en el punto B. Aquí vuelve a refractarse y reflejarse parcialmente. Lo mismo ocurre en el punto C, en el cual se produce un rayo refractado b que será paralelo al a'. Tracemos desde el punto C una perpendicular CE a la dirección del rayo a'. Entonces, considerando que el índice de refracción de la lámina es n y que el del medio que la rodea (el

aire) es igual a la unidad, obtenemos que la diferencia de marcha Δ entre los rayos a' y b será:

$$\Delta = (AB + BC)\, n - \left(AE + \frac{1}{2}\lambda\right), \qquad (1)$$

donde λ es la longitud de onda de la luz que se emplea. La magnitud $\lambda/2$ representa una diferencia de marcha complementaria que se produce al reflejarse el rayo a en el límite entre el aire y la lámina

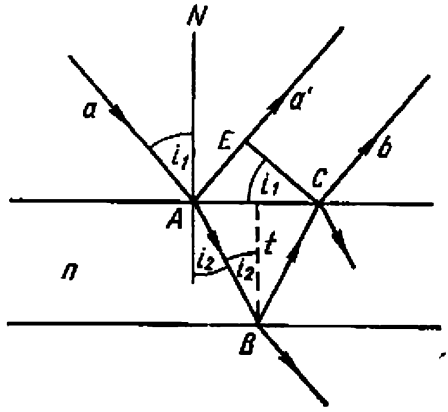

Fig. 49. Esquema para el cálculo de la diferencia de marcha entre los rayos reflejados en una lámina de caras planas y paralelas.

(compárese con lo dicho en el § 261); si el medio que rodea a la lámina tuviera un índice de refracción mayor que el de ella, la pérdida de esta semionda se produciría al reflejarse el rayo en el punto B. De acuerdo con la fig. 49 tenemos

$$AB = BC = \frac{t}{\cos i_2}, \qquad (2)$$

siendo t el espesor de la lámina y i_2 el ángulo de refracción. También se deduce de la figura que

$$AE = AC \operatorname{sen} i_1 = 2t \cdot \operatorname{tg} i_2 \cdot \operatorname{sen} i_1.$$

Aplicando la ley de la refracción: $\operatorname{sen} i_1 = n \operatorname{sen} i_2$, escribamos la expresión de AE en la forma:

$$AE = 2tn \frac{\operatorname{sen}^2 i_2}{\cos i_2}. \qquad (3)$$

Poniendo en la expresión de la diferencia de marcha (1) en lugar de AB, BC y AE sus valores según (2) y (3), hallamos:

$$\Delta = 2tn \frac{1 - \operatorname{sen}^2 i_2}{\cos i_2} - 1/2\lambda$$

o

$$\Delta = 2tn \cos i_2 - 1/2\lambda. \qquad (4)$$

Esta expresión también puede transformarse un poco introduciendo en ella, en lugar del ángulo de refracción i_2, el ángulo de incidencia i_1. Aplicando la ley de la refracción hallaremos:

$$\cos i_2 = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 i_2} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}^2 i_1},$$

después de lo cual la expresión (4) toma el aspecto:

$$\Delta = 2t \sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i_1} - 1/2\lambda. \qquad (4a)$$

Como la lente no modifica en absoluto la diferencia de marcha (véase el § 253), tendremos que Δ representa la diferencia de marcha con que los rayos convergen en el punto S'. Si $\Delta = k\lambda$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots$, en el punto S' se produce un máximo, si $\Delta = (2k + 1)\,\lambda/2$, en el punto S' se obtiene un mínimo. De esta forma, como resultado de la interferencia de los rayos reflejados en las superficies AA' y BB', la imagen resultante del punto depende de la diferencia de marchas*) y puede ser más o menos brillante.

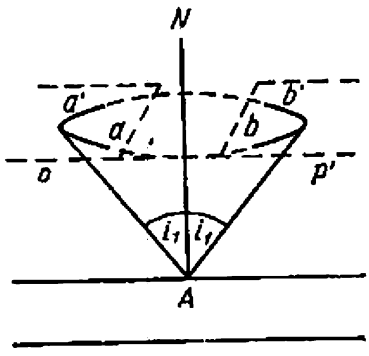

Fig. 50. Formación de las curvas de igual inclinación.

Supongamos ahora que como fuente de luz (fig. 48) no tomamos un punto aislado S, sino una porción de superficie luminosa P. De no existir interferencia (por ejemplo, si en lugar de la lámina $AA'BB'$ pusiéramos un espejo metálico plano) en el plano focal principal de la lente L_2 obtendríamos una imagen de la superficie P que tendría la forma de la superficie P'. Pero debido a la interferencia de los haces reflejados en la lámina sólo se reproducen claramente aquellos puntos luminosos de la superficie P que tienen $\Delta = k\lambda$, donde Δ viene dada por la fórmula (4a). El número entero k se llama orden de la interferencia. Cuando $k = k_0$ esta serie de puntos, según (4a), debe satisfacer la condición $i_1 = \text{const}$; esta serie de puntos se encuentra en la curva aa' formada por la intersección de la superficie P (fig. 50) con un cono cuyo eje es la per-

*) Cuando $\Delta = (2k + 1)\,\lambda/2$ la intensidad de la imagen S' no será igual a cero, puesto que las amplitudes de las ondas que interfieren, producidas por la reflexión en las superficies AA' y BB', no son exactamente iguales entre sí.

pendicular AN y cuyo ángulo de abertura es igual a $2i_1$. A esta curva le corresponde en el plano P' la franja brillante bb'. Para otros valores de k, diferentes de k_0, se producen otras franjas brillantes. Entre ellas se encuentran franjas más oscuras. De esta manera, en el plano focal principal de la lente L_2 se forma un sistema de franjas de interferencia. Cada una de estas franjas corresponde a un valor constante del ángulo i_1, es decir, igual a la inclinación de los rayos con respecto a la perpendicular AN. He aquí por qué las franjas de interferencia que estamos estudiando se denominan *franjas de igual inclinación*. De lo expuesto se deduce que las franjas de igual inclinación se producen en el plano focal principal de la lente L_2 y que para poderlas observar se necesita que la fuente luminosa sea ancha (es decir, una porción de superficie luminosa P).

La interferencia también se produce con los rayos que pasan a través de la lámina, pero en este caso la figura ofrece menos nitidez debido a que la intensidad de los haces luminosos que atraviesan la lámina es mucho mayor que la del rayo que experimenta la doble refracción en las superficies BB' y AA' (en el § 272 nos referimos a la posibilidad de obtener con estos rayos franjas de interferencia bien definidas).

La figura de interferencia que acabamos de estudiar es la que se observa con luz monocromática de longitud de onda λ determinada. Cuando la luz no es monocromática y está comprendida en cierto intervalo de longitudes de onda, cada ángulo de incidencia i_1 da lugar a un máximo para cada una de las longitudes de onda λ_1, λ_2, λ_3, . . ., que cumplen la condición:

$$\Delta = k\lambda_1 = (k+1)\lambda_2 = (k+2)\lambda_3 = \ldots \qquad (5)$$

De esto resulta, que las franjas de diferente longitud de onda se superponen unas a otras. Cuanto mayor sea el espesor t de la lámina, tanto mayor será el valor del número entero k y, por consiguiente, de acuerdo con (5), será menor la diferencia entre las longitudes de onda λ_1, λ_2, λ_3, . . ., cuyas franjas se superponen. Para una misma longitud de onda λ las franjas de los diferentes órdenes estarán tanto más próximas unas a otras cuanto más gruesa sea la lámina. Por esta razón, resumiendo, podemos decir: cuanto más gruesa sea la lámina más próximas se encontrarán las franjas y más intensa será la superposición de las que tienen diferentes longitudes de onda. Esta superposición de las franjas hace que, cuando una lámina gruesa se ilumina con luz blanca, en el plano focal de la lente L_2 se produzca una iluminación más o menos homogénea y que las franjas de interferencia no se perciban. De esta forma, las franjas de interferencia de igual inclinación producidas por una lámina gruesa solamente pueden observarse cuando la luz es monocromática en grado suficiente. Además, como las dimensiones generales de las láminas gruesas son grandes, es más difícil conseguir que sean homo-

géneas (es decir, que tengan un índice de refracción constante) y que sus caras sean planas y paralelas. Por esto es mucho más sencillo observar las franjas de interferencia que se forman por reflexión de la luz en las superficies de una lámina delgada. Para las láminas muy delgadas el orden de la interferencia es pequeño y las franjas pueden verse incluso cuando la luz que se emplea para la iluminación es blanca, en cuyo caso las franjas resultan coloreadas.

En los fenómenos de interferencia provocados por dos focos luminosos de pequeñas dimensiones (espejos de Fresnel, etc.), en todas las regiones en que las ondas procedentes de dichos focos se superponen pueden distinguirse los sitios en que las vibraciones tienen un máximo o un mínimo. Esto permite observar las franjas de interferencia directamente en una pantalla, sin necesidad de lentes. Pero para observar las franjas de igual inclinación, como vimos anteriormente, se necesita un foco luminoso ancho. Esto da lugar a que en cada punto de la región en que se superponen los haces luminosos, reflejados en las dos superficies planas y paralelas de la lámina, converjan ondas procedentes de diferentes puntos del foco luminoso y a que las franjas no puedan observarse directamente. Estas franjas de interferencia, como ya vimos, se observan únicamente en el *plano focal principal de la lente* L_2. En otras palabras, la lente L_2 debe estar «enfocada al infinito». Por esto suele decirse que *las franjas de igual inclinación están localizadas en el infinito.*

Para demostrar las franjas de interferencia de igual inclinación se puede utilizar una hoja delgada de mica homogénea. Las superficies de las hojas de

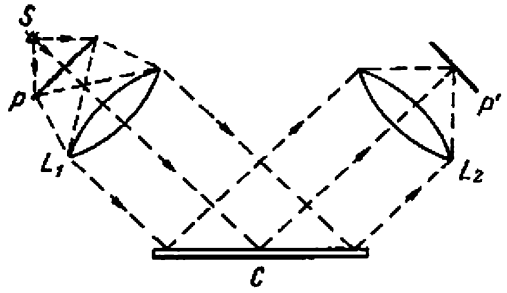

Fig. 51. Esquema para la observación de las franjas de igual inclinación cuando los rayos se reflejan en las superficies de una lámina de mica.

mica suelen ser suficientemente planas y paralelas. El esquema general de la instalación se muestra en la fig. 51. Como foco luminoso se emplea una lámpara de mercurio S. La luz de esta lámpara produce un espectro que tiene un número reducido de rayas espectrales de longitudes de onda determinadas, capaces de producir franjas de interferencia bien definidas. El vidrio esmerilado P, iluminado por la lámpara de mercurio, hace las veces de fuente luminosa ancha. La lente L_1 proporciona haces de luz paralelos que inciden sobre la hoja de mica C. Colocando la pantalla P' en el plano focal principal de la lente L_2 se pueden

observar en ella las franjas de igual inclinación. Para que las franjas de interferencia se vean bien en la pantalla, ésta debe colocarse, como ya hemos dicho, en el plano focal principal de la lente L_2.

La lente L_2 y la pantalla pueden sustituirse directamente por el ojo del observador. En este caso el papel de la lente L_2 lo desempeña el sistema refractor del ojo (el cristalino y la córnea). Si el ojo no está acomodado, es decir, si está dispuesto para ver los objetos que se encuentran muy alejados (en el «infinito»), las franjas de igual inclinación se forman sobre la retina, sin necesidad de lentes de ninguna clase.

2. Franjas de interferencia de igual espesor. Veamos ahora el caso de una lámina transparente cuyas caras no sean paralelas entre sí. En este caso también se producen rayos reflejados en las dos superficies AA' y BB'. Supongamos que un rayo a, procedente

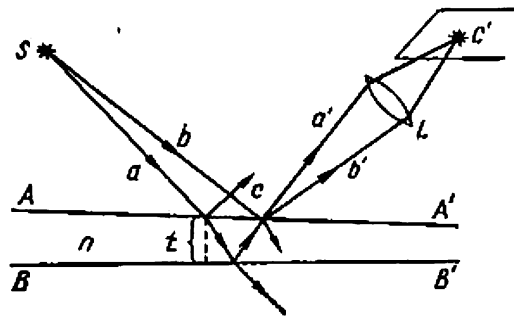

Fig. 52. Interferencia de los rayos al reflejarse en una lámina de caras no paralelas.

de un foco puntual S (fig. 52), después de reflejarse en la superficie BB' y de sufrir una doble refracción AA', da lugar a la formación de un rayo a', que pasando por el punto C incide sobre la lente L. Como quiera que los rayos del foco S tienen direcciones diversas, entre ellos habrá alguno, como el b, que incidirá sobre el punto C de la superficie AA'. En este punto el rayo se reflejará en parte (y en parte se refractará, pero esto último no nos interesa ahora) y da lugar a un rayo b', que formará con el rayo a' un ángulo determinado. Los rayos a' y b', después de pasar por la lente L, vuelven a cortarse en el punto C', que será la imagen del punto C. Tanto el rayo a' como el b' proceden de un mismo foco puntual S, por lo tanto son coherentes y deben interferir. El hecho de que en el punto C' se produzca un máximo o un mínimo depende de que la diferencia de marcha Δ entre los rayos a' y b' sea igual a un número par o impar de semiondas.

Si el ángulo que forman las superficies AA' y BB' es pequeño y el foco luminoso S se encuentra lejos de la lámina, la diferencia de marcha Δ viene expresada, aproximadamente, por la fórmula (4a). Cuando el foco se encuentra lejos de la lámina, los ángulos que forman los rayos al incidir sobre ella son casi iguales entre sí

y, por lo tanto, la diferencia de marcha Δ se debe únicamente al espesor de la lámina t. En estas condiciones, si al punto C le corresponde un máximo en el C', situado, en el plano focal de la lente L conjugada con la superficie AA' de la lámina, también le corresponderá un máximo al conjunto de todos los puntos C_i de la superficie AA' de dicha lámina que se encuentran en los sitios en que ésta tiene igual espesor. De esta forma, las franjas de interferencia que se obtienen en el plano focal de la lente L corresponden a los sitios en que la lámina tiene el mismo espesor, por cuya razón se les da la denominación de *franjas de igual espesor*. Es evidente que si la lámina tiene forma de cuña las franjas de interferencia de igual espesor serán rectas paralelas a la arista de la cuña.

Como hemos dicho, las franjas de igual espesor se observan en el plano focal de la lente L, conjugada con la superficie AA' de la lámina. En otras palabras, para que en la pantalla aparezcan claramente estas franjas de interferencia la lente L debe estar enfocada a la superficie AA' de la lámina, es decir:

Las franjas de interferencia de igual espesor están localizadas en la superficie reflectora de la lámina.

Las franjas de igual espesor pueden observarse a simple vista, sin necesidad de la lente L. En este caso el papel de lente lo desempeña el sistema refractor del ojo, el cual deberá enfocarse (acomodarse) a la superficie de la lámina.

Si la luz que se emplea no es monocromática las franjas correspondientes a las diferentes longitudes de onda se superponen de la misma forma que esto ocurre cuando se trata de franjas de igual inclinación. Por esto, si las láminas son gruesas y su espesor variable, las franjas de interferencia sólo se pueden observar con luz monocromática. La falta de paralelismo entre las caras de las láminas debe ser pequeña, ya que de lo contrario las franjas de igual espesor se encontrarán demasiado próximas unas a otras. En las láminas muy delgadas las franjas pueden verse incluso con luz blanca. En este caso las franjas son irisadas. Supongamos que en un lugar cualquiera el espesor de la lámina es tal, que la diferencia de marcha Δ en el punto C_1 (fig. 53) es igual a λ para los rayos rojos que tienen, por ejemplo, una longitud de onda de 0,70 μ. A estos rayos les corresponde, por consiguiente, un máximo en el punto C_1. Pero en este caso la diferencia de marcha en este mismo punto C_1 será igual a 2λ para los rayos ultravioletas de longitud de onda igual a 0,35 μ y estos rayos también producirán un máximo. Todos los rayos visibles cuyas longitudes de onda sean distintas de 0,70 μ se debilitarán entre sí en mayor o menor grado. De esta forma, el punto dado de la lámina da lugar a un máximo de color rojo. Análogamente los demás puntos de la lámina que producen diferencias de marcha dan lugar a máximos de otros colores (por ejemplo, el punto C_2).

Admitamos que una lámina delgada tiene en una de sus partes un espesor constante t_1 y en otra parte un espesor, también constante, t_2 (fig. 54). Entonces, toda la primera parte de la lámina

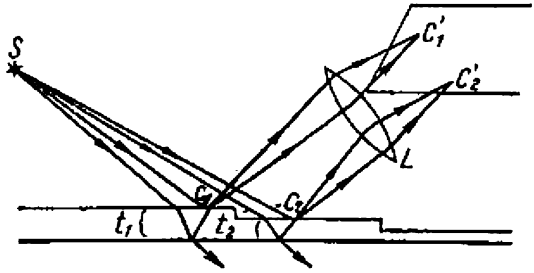

Fig. 53. Formación de los máximos correspondientes a diferentes espesores de la lámina, t_1 y t_2.

(siempre que el ángulo de incidencia i_1 sea constante) producirá una diferencia de marcha Δ_1, mientras que la segunda parte ocasionará una diferencia de marcha Δ_2. De acuerdo con lo expuesto anteriormente, cuando esta lámina se ilumine con luz blanca sus dos partes darán máximos con rayos de diferente longitud de onda

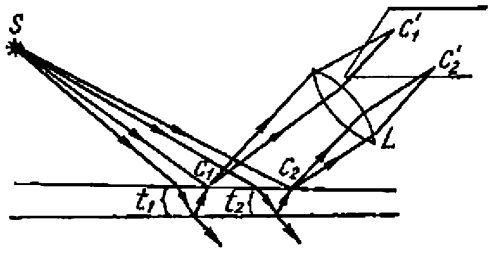

Fig. 54. Aparición de los colores en las láminas delgadas.

y sus coloraciones parecerán diferentes. Esta coloración producida por la interferencia de los rayos reflejados recibe el nombre de *colores de las láminas delgadas*. Es evidente que si varía el ángulo de incidencia de la luz i_1 variará también la diferencia de marcha y, por consiguiente, cambiará el color de la lámina.

Los colores de las láminas delgadas pueden observarse fácilmente en las películas jabonosas (pompas de jabón), en las delgadísimas capas de aceite que se forman sobre el agua, en las capas de aire que quedan entre dos láminas transparentes, etc.

Examinemos varios casos particulares de franjas de igual espesor.

Ejemplo 1. Las caras de una cuña de vidrio ($n = 1{,}5$) forman entre sí un ángulo $\alpha = 0{,}1'$. Sobre la superficie de la cuña incide normalmente un haz

de rayos monocromáticos (fig. 55) cuya longitud de onda $\lambda = 0{,}5\mu$. Hallar la distancia que hay entre las franjas.

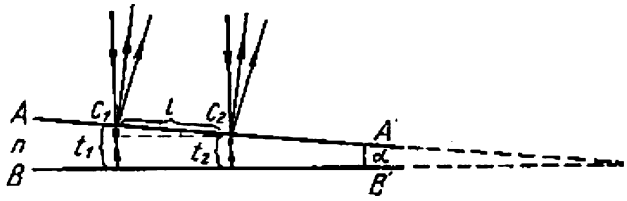

Fig. 55. Interferencia producida por una cuña.

Solución. En este caso el ángulo $i_1 = 0$ y según la fórmula (4a) la diferencia de marcha Δ será aproximadamente igual a

$$\Delta = 2tn - 1/2\lambda.$$

Supongamos que los puntos C_1 y C_2 correspondon a dos franjas brillantes consecutivas; entonces, en estos puntos tendremos unas diferencias de marcha Δ_1 y Δ_2.

$$\Delta_1 = 2t_1 n - 1/2\lambda = k\lambda,$$
$$\Delta_2 = 2t_2 n - 1/2\lambda = (k-1)\lambda,$$

donde t_1 y t_2 son los espesores de la cuña en los puntos C_1 y C_2 (suponiendo que $t_2 < t_1$). Restando miembro a miembro estas dos igualdades, hallamos

$$2n(t_1 - t_2) = \lambda,$$

de donde obtenemos que

$$t_1 - t_2 = \frac{\lambda}{2n}. \qquad (6)$$

Llamando l a la distancia entre las franjas que buscamos, de acuerdo con la fig. 55, tendremos

$$l \cong \frac{t_1 - t_2}{\alpha},$$

donde el ángulo α deberá expresarse en radianes. Poniendo en esta igualdad en lugar de $t_1 - t_2$ su valor según (6), obtenemos

$$l \cong \frac{\lambda}{2n\alpha} = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-5}} \text{ cm} = 0{,}56 \text{ cm}.$$

Es decir, las franjas se encuentran en la superficie de la cuña a una distancia entre sí de 5,6 mm. Este problema puede resolverse en sentido contrario, o sea, conociendo la distancia entre las franjas de interferencia de igual espesor se puede hallar el ángulo α de la cuña. Este procedimiento se utiliza en la práctica para hallar los ángulos de las cuñas cuando estos ángulos son muy pequeños.

Ejemplo 2. Sobre la superficie plana BB' de un vidrio (fig. 56) se encuentra una lente planoconvexa AA' cuyo radio de curvatura es R. Entre la lente y la superficie del vidrio queda una capa de aire. Hallar la forma que tendrán las franjas de igual espesor que se produzcan al reflejarse la luz en las superficies que limitan esta capa de aire. Considerar que la luz incide sobre la lente normalmente.

Solución. Los sitios en que la capa de aire tiene igual espesor forman círculos de radio r con centro en O, que es el punto de contacto de la lente con la superficie BB'. Cuando $r \ll R$ y los rayos inciden perpendicularmente, la diferencia de marcha Δ viene determinada, aproximadamente, por la fórmula (4a). Considerando que el índice de refracción del aire $n = 1$, obtenemos:

$$\Delta = 2t + \lambda/2.$$

Delante de $\lambda/2$ ponemos ahora el signo más, porque la pérdida de la media onda se produce al reflejarse la luz en el límite entre la capa de aire y la superficie del vidrio BB'. La condición para que se formen franjas de interferencia brillantes será:

$$\Delta = 2t + \lambda/2 = k\lambda, \qquad (7)$$

donde k es un número entero. De acuerdo con la figura tenemos que cuando $r \ll R$ aproximadamente,

$$t = \frac{r^2}{2R}.$$

Poniendo este valor de t en (7), hallamos

$$\frac{r^2}{R} = (k - 1/2)\,\lambda,$$

de donde

$$r = \sqrt{(k - 1/2)\,\lambda R}. \qquad (8)$$

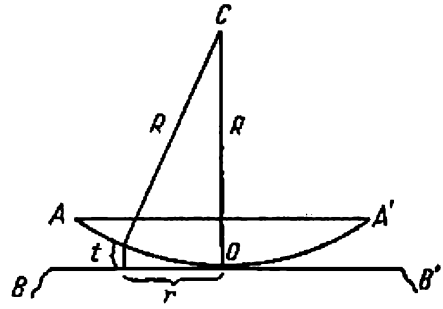

Fig. 56. Formación de los anillos de Newton.

Es decir, las franjas de interferencia de igual espesor tendrán en este caso la forma de anillos concéntricos cuyos radios vienen dados por la fórmula (8). En el punto de contacto de la lente con la superficie del vidrio plano queda una capa muy delgada de aire cuyo espesor es mucho menor que la longitud de onda. Por esto, la diferencia de marcha entre los rayos, en este punto, es debida exclusivamente a la pérdida de la semionda que se produce al reflejarse en la superficie BB'. Como resultado de esto Δ resulta igual a $\lambda/2$ y en el centro de la figura de interferencia, es decir, en el punto O, se observa una mancha oscura.

Cuando se emplea luz blanca las franjas de interferencia son irisadas y el número de anillos que se ven es pequeño, puesto que cuando k es grande los anillos de las diferentes longitudes de onda se superponen entre sí y se desvanecen.

Newton fue el primero que observó y descubrió este tipo de franjas de interferencia de igual espesor, que se conocen con el nombre de *anillos de Newton*. Pero como Newton no conocía aún la interferencia de las ondas luminosas, no pudo dar una explicación exacta a este fenómeno y tuvo que admitir que la luz tiene «períodos de reflexión fácil y períodos de paso fácil» (véase el § 250).

§ 263. Aplicación de los fenómenos de interferencia. En el párrafo anterior indicamos que por medio de la interferencia de la luz se podían medir ángulos pequeños formados por dos planos. Pero los fenómenos de interferencia pueden utilizarse también para toda una serie de mediciones exactas; su campo de aplicación en los experimentos físicos y en la producción se amplía rápidamente. En este

párrafo vamos a estudiar algunas aplicaciones elementales de la interferencia.

1. Inspección de la calidad de las superficies. En los aparatos ópticos se exige una gran precisión en el acabado de las superficies. Como ya dijimos, las superficies planas de los espejos o las esféricas de las lentes no deben diferir de las correspondientes superficies geométricas ideales en más de una pequeña fracción (1/4 o menos) de la longitud de la onda luminosa. La comprobación de esta alta calidad de las superficies se realiza por medio de interferencias.

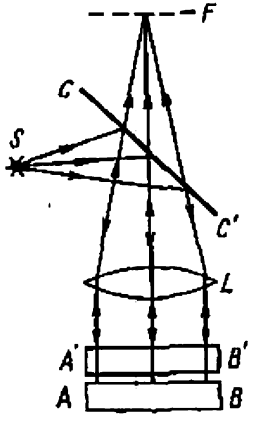

Fig. 57. Aparato para comprobar la calidad de las superficies.

Examinemos un problema sencillo de determinación del grado de aproximación de la superficie de una lámina de vidrio a la de un plano ideal. Esta determinación se realiza con un «vidrio de prueba» de alta calidad, una de cuyas superficies difiere de la del plano geométrico ideal en una magnitud no mayor de 1/20 de la longitud de la onda luminosa. La superficie que se ensaya se aprieta contra la del «vidrio de prueba» de manera que entre ellas queda una capa de aire delgada. Al pasar la luz a través de esta capa de aire se producen franjas de interferencia de igual espesor. Para observarlas se utiliza el simple dispositivo que muestra la fig. 57, en el cual S es el foco luminoso, CC' es un espejo semiplateado y L es la lente que proporciona el haz de rayos paralelos que sirve para iluminar la lámina que se ensaya y que está colocada sobre el «vidrio de prueba». Los rayos reflejados en la superficie AB del «vidrio de prueba» y en la $A'B'$ de la lámina que se ensaya, pasan a través del espejo semiplateado CC' y forman en el plano focal F de la lente L franjas de igual espesor. La forma más simple de estas franjas es la que se obtiene cuando la capa de aire que hay entre las superficies AB y $A'B'$ tiene la forma de cuña de ángulo pequeño. Esto se puede conseguir si después de quitarles bien el polvo se aprietan más por un lado al colocarlas una sobre otra. Cuando las dos superficies son idealmente planas entre ellas queda una tenue capa de aire en forma de cuña y las franjas de igual espesor tienen el aspecto de rectas paralelas a la arista de la cuña. Cualquier divergencia respecto al plano ideal da lugar a que se curven las franjas de interferencia. En la fig. 58, a y b pueden verse las formas que toman dichas franjas cuando la superficie que se ensaya tiene una prominencia o una cavidad. Apretando un extremo u otro de la lámina se puede variar la posición de la arista de la cuña y de esta manera analizar la calidad de la superficie en todos los sitios.

Para conseguir que las franjas de interferencia sean nítidas hay que utilizar luz monocromática. Para esto se emplea como foco luminoso S (fig. 57) una lámpara de mercurio, la cual produce un espectro que, en la región visible, consta de un pequeño número de rayas bastante alejadas entre sí. La luz de una de estas rayas (generalmente la verde) se selecciona por medio de un filtro.

2. Medición de pequeñas variaciones de longitud. Las franjas de igual espesor se utilizan también para medir variaciones muy pequeñas en el espesor de cualquier capa. Si dos superficies cualesquiera forman entre sí una cuña, como ya hemos visto, la luz reflejada en ellas produce franjas de igual espesor en forma de rectas paralelas entre sí. La diferencia de marcha en el punto en que se produce una franja brillante es igual a

$$\Delta_1 = 2d_1 n - \frac{1}{2}\lambda = k\lambda.$$

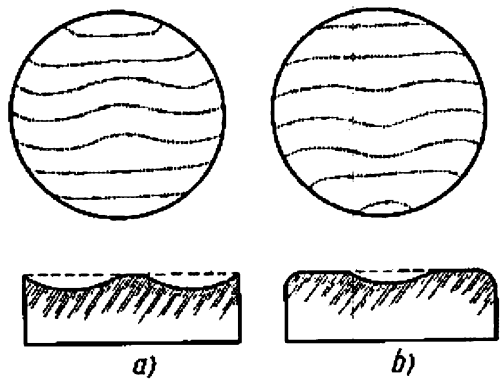

Fig. 58. Formas que presentan las franjas de interferencia de igual espesor cuando la superficie tiene una prominencia (*a*) o una cavidad (*b*).

Si estas superficies se alejan la una de la otra conservando el ángulo α que forman entre sí, el espesor d_1 de la cuña en el punto dado comenzará a aumentar y la diferencia de marcha Δ_1 dejará de ser igual a $k\lambda$. Es evidente que la diferencia de marcha Δ_1 será ahora igual a $k\lambda$ en un punto más cercano a la arista de la cuña y, por consiguiente, las franjas se desplazarán hacia el lado en que se encuentra dicha arista. Cuando el espesor d alcanza un valor d_2, para el que la diferencia de marcha Δ es igual a $(k+1)\lambda$, en el punto dado vuelve a encontrarse una franja brillante, con la particularidad de que en este caso se cumplirá la igualdad

$$\Delta_2 = 2d_2 n - \frac{1}{2}\lambda = (k+1)\lambda.$$

De las dos últimas igualdades se deduce que al desplazamiento de la figura de interferencia en una franja corresponde una variación del espesor de la cuña en el punto dado igual a la magnitud

$$d_2 - d_1 = \frac{\lambda}{2n}.$$

Si el desplazamiento de dicha figura es de $\varkappa$ franjas, la variación del espesor será igual a

$$d_{\varkappa+1} - d_1 = \varkappa \frac{\lambda}{2n}.$$

Como la longitud de onda λ es una magnitud del orden de $5 \cdot 10^{-5}$ cm, el desplazamiento de las franjas de interferencia permite medir variaciones de espesor del orden de 10^{-5} cm.

Este procedimiento se utiliza, por ejemplo, para medir con exactitud el coeficiente de dilatación térmica de sólidos cuyas probetas tienen pequeñas dimensiones. Para esto se emplea un aparato llamado dilatómetro de interferencia, cuyo esquema se muestra en la fig. 59. Este aparato consta de un anillo CC', que generalmente es de cuarzo fundido que tiene un coeficiente de dilatación térmica muy pequeño y perfectamente medido. Sobre este anillo descansa una lámina de vidrio cuyas caras son planas. El cuerpo D que se ensaya, después de haber pulimentado perfectamente sus caras superior e inferior, se coloca dentro del anillo. Este cuerpo D se sitúa de tal manera que entre su cara superior y la superficie AB de la lámina de vidrio quede una capa de aire en forma de cuña. Cuando el aparato se ilumina desde arriba se observan las franjas de igual espesor. Si en estas condiciones se calienta el conjunto, como el coeficiente de dilatación térmica del cuerpo D es diferente del que tiene el anillo CC', varía el espesor de la capa de aire y las franjas de interferencia se desplazan. Por el desplazamiento de las franjas puede medirse la variación de las dimensiones del cuerpo y, por consiguiente, calcular su coeficiente de dilatación térmica.

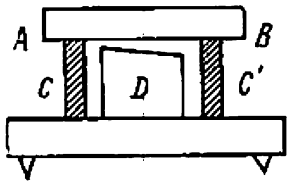

fig. 59. Dilatómetro de interferencias.

El procedimiento de las interferencias se utiliza también para medir pequeñas variaciones de longitud provocadas por otras causas, como son: el alargamiento mecánico, la flexión, etc. V. P. Línnik construyó un aparato especial, llamado microinterferómetro, que sirve para medir la profundidad de los arañazos, abolladuras y otros defectos de las superficies pulimentadas.

§ 264. Interferómetros. Su utilización. Estudiemos ahora una serie de aparatos llamados *interferómetros* cuya principal aplicación es medir índices de refracción. El más simple de los aparatos de este tipo es el *interferómetro de Jamin*, cuyo esquema puede verse en la fig. 60. Este interferómetro está formado por dos gruesas láminas de vidrio de caras planas y paralelas $ABB'A'$ y $CDD'C'$ de igual espesor t. Un rayo procedente del foco luminoso S incide sobre la cara AB de la primera lámina y es parcialmente reflejado y parcialmente refractado. El rayo refractado se refleja en la cara posterior $A'B'$. Como resultado aparecen dos rayos *1* y *2* que van a incidir sobre la segunda lámina y que vuelven a reflejarse parcialmente en su cara delantera CD y parcialmente en su cara trasera $C'D'$.

Gracias a todas estas reflexiones tenemos cuatro rayos *1'*, *1*, *2* y *2'*, de los cuales el *1°* y el *2°* se superponen e interfieren.

Al reflejarse en la lámina $ABB'A'$, entre los rayos *1* y *2* se produce una diferencia de marcha Δ_1 [véase la fórmula (4) del § 262],

$$\Delta_1 = 2tn \cos i_2 - \frac{1}{2}\lambda,$$

donde i_2 es el ángulo de incidencia del rayo sobre la cara $A'B'$ de la lámina y n es el índice de refracción del material de que está

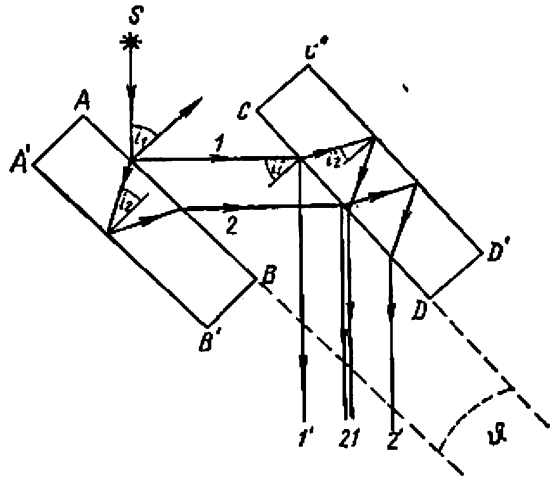

Fig. 60. Esquema del interferómetro de Jamin.

hecha. Al reflejarse en la segunda lámina, entre los rayos *1* y *2* se produce una diferencia de marcha

$$\Delta_2 = 2tn \cos i_2' - \frac{1}{2}\lambda,$$

donde i_2' es el ángulo de incidencia del rayo sobre la cara $C'D'$ de la segunda lámina.

La diferencia de marcha total Δ entre estos rayos, producida por la reflexión en ambas láminas será:

$$\Delta = \Delta_2 - \Delta_1 = 2tn (\cos i_2' - \cos i_2). \qquad (1)$$

Si las dos láminas son perfectamente paralelas entre sí $i_2' = i_2$ y $\Delta = 0$, es decir, entre los rayos *1* y *2* no se produce diferencia de marcha y, por consiguiente, se refuerzan mutuamente. Si las láminas forman entre sí un ángulo θ, diferente de cero, los rayos *1* y *2* adquirirán una diferencia de marcha Δ, que dependerá de θ y del ángulo de incidencia de la luz i_1 sobre la superficie AB.

Por la fórmula (1) tenemos:

$$\Delta = 4tn \operatorname{sen} \frac{i_2 + i_2'}{2} \operatorname{sen} \frac{i_2 - i_2'}{2}.$$

Cuando el ángulo θ entre las láminas es pequeño, los ángulos i_2' e i_2 se diferencian poco entre sí y de la última fórmula obtenemos aproximadamente

$$\Delta = 2tn \operatorname{sen} i_2 \cdot \delta i_2, \tag{2}$$

donde δi_2 es la diferencia entre los ángulos $i_2 - i_2'$.

La magnitud δi_2 puede relacionarse con el ángulo θ entre las láminas del modo siguiente: suponiendo que i_1 e i_1' son respectivamente los ángulos de incidencia de la luz sobre las láminas $ABB'A'$ y $CDD'C'$, tendremos que $i_1' = i_1 - \theta$, y por la ley de la refracción,

$$\operatorname{sen} i_1 = n \operatorname{sen} i_2,$$

$$\operatorname{sen} i_1' = \operatorname{sen} (i_1 - \theta) = n \operatorname{sen} i_2'.$$

Restando miembro a miembro estas dos igualdades, hallamos

$$\operatorname{sen} i_1 - \operatorname{sen} (i_1 - \theta) = n (\operatorname{sen} i_2 - \operatorname{sen} i_2'),$$

o, aproximadamente, cuando θ es pequeño,

$$\cos i_1 \cdot \theta = n \cos i_2 \cdot \delta i_2,$$

de donde se obtiene que

$$\delta i_2 = \frac{1}{n} \frac{\cos i_1}{\cos i_2} \cdot \theta. \tag{3}$$

Esta expresión puede transformarse teniendo en cuenta que

$$\frac{\cos i_1}{\cos i_2} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 i_1}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 i_2}} = n \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 i_1}}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i_1}}.$$

Poniendo este valor de $\cos i_1 / \cos i_2$ en la fórmula (3), hallamos:

$$\delta i_2 = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 i_1}}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i_1}} \theta. \tag{4}$$

En el interferómetro, por lo general, el ángulo de incidencia de los rayos $i_1 = 45°$ y el índice de refracción del vidrio es aproximadamente igual a 1,55. Partiendo de estos valores numéricos de i_1 y de n, de la fórmula (4) se deduce aproximadamente que

$$\delta i_2 = \frac{1}{2} \theta. \tag{4a}$$

Poniendo este valor de δi_2 en la fórmula (2) obtenemos la siguiente expresión aproximada de la diferencia de marcha Δ entre los rayos *1* y *2*.

$$\Delta = tn \operatorname{sen} i_2 \cdot \theta. \tag{5}$$

Si la primera lámina del interferómetro se ilumina con un haz de rayos paralelos de luz monocromática, cualquiera que sea el par de rayos se producirá una misma diferencia de marcha. Después de refle-

jarse los rayos en ambas láminas se obtiene un campo uniformemente iluminado cuya brillantez depende del valor de Δ. La brillantez es máxima cuando la diferencia de marcha Δ es igual a un número entero de longitudes de onda y mínima cuando esta diferencia Δ es igual a un número impar divisible por λ/2. Si sobre la primera lámina incide un haz de rayos divergentes a cada par de estos rayos le corresponderá un valor diferente del ángulo i_2 y, según la fórmula (5), un valor diferente de Δ. Como resultado se produce un sistema de franjas de interferencia en el que cada una de ellas corresponde a un valor determinado de i_2, es decir, es una franja de igual inclinación.

Las láminas del interferómetro de Jamin son gruesas para que los haces de rayos *1* y *2* queden bien separados entre sí. Esto hace posible interponer en la trayectoria de uno de estos haces cualquier sustancia refractora y de esta forma provocar una diferencia de marcha complementaria Δ' entre dichos haces. Supongamos, por ejemplo, que a uno de los haces se le interpone una capa de una sustancia cuyo espesor es l y cuyo índice de refracción es n_2. Entonces, entre los rayos se producirá una diferencia complementaria de marcha

$$\Delta' = l(n_2 - n_1), \tag{6}$$

siendo n_1 el índice de refracción del aire. Si esta diferencia de marcha $\Delta' = k\lambda$, la figura de interferencia se desplazará en k franjas. La magnitud k también puede ser, evidentemente, un número quebrado. Determinando k y conociendo el espesor de la lámina l, se puede hallar por medio de la fórmula (6) la diferencia entre los índices de refracción $n_2 - n_1$. Este procedimiento da la posibilidad de descubrir diferencias muy pequeñas entre los índices de refracción. Por ejemplo, si la figura de interferencia se desplaza en 1/5 de franja, siendo $l = 10$ cm y $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm, tenemos que

$$n_2 - n_1 = \frac{k\lambda}{l} = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10} = 10^{-6}.$$

Este interferómetro se emplea por su gran sensibilidad para medir los índices de refracción de los gases que se diferencian muy poco de la unidad. Para esto se le interpone a cada uno de los haces una cubeta. Las dos cubetas son exactamente iguales y se cierran por ambos extremos con tapas de vidrio de caras planas y paralelas también iguales. Una de las cubetas se llena del gas que se analiza, mientras que de la otra se extrae el aire. En estas condiciones, en la fórmula (6) n_1 debe tomarse igual a la unidad, con lo que para el índice de refracción n_2 que se busca obtenemos

$$n_2 = \frac{\Delta'}{l},$$

donde l es la longitud de la cubeta.

Otro tipo de interferómetro es *el de Michelson.*

En este aparato interfieren dos haces luminosos *I* y *II* (fig. 61) que se producen al reflejarse en el espejo semitransparente G_1 la luz que procede del foco *S*. El haz *I* incide normalmente sobre el espejo plano fijo M_1, se refleja en él y, después de atravesar el espejo semitransparente G_1, va a parar al anteojo *A*. El haz *II* incide perpendicularmente sobre el espejo plano M_{II}. Este último espejo puede desplazarse por unas guías, paralelamente a sí mismo, por medio de un tornillo micrométrico. Después de reflejarse en el espejo M_{II} y en el semitransparente G_1, el haz *II* también va a parar al anteojo *A*. El haz *II* pasa tres veces a través del espesor de la lámina G_1, mientras que el haz *I* solamente la atraviesa una vez (consideramos que la cara plateada del espejo semitransparente G_1 está vuelta hacia el foco *S*). Para compensar la diferencia de marcha que esta circunstancia produce entre los haces, en el camino que sigue el haz *I* se interpone una segunda lámina transparente de caras planas y paralelas G_2, cuyo espesor es exactamente igual que el de la lámina G_1.

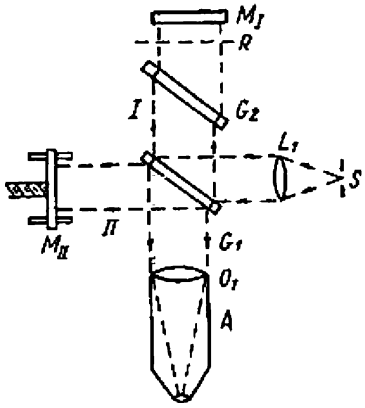

Fig. 61. Esquema del interferómetro de Michelson.

Llamando *R* a la imagen del espejo M_{II} en el espejo semitransparente G_1, puede decirse que en el anteojo *A* se observa una figura de interferencia que es el resultado de la reflexión de la luz en dos planos: en el *R* y en el M_I. Por esto la figura que se observa coincide con la que se produce al reflejarse la luz en una lámina transparente (§ 262). Si los planos *R* y M_I son rigurosamente paralelos entre sí, en el interferómetro se observan franjas de igual inclinación en forma de círculos. La diferencia de marcha entre los haces *I* y *II* es $\Delta = 2t \cos \varphi$, donde *t* es la distancia entre los planos *R* y M_I, y φ es el ángulo de incidencia que forman los rayos con el espejo M_I. Los anillos brillantes se producen donde los valores de φ cumplen la condición: $2t \cos \varphi = k\lambda$, siendo *k* un número entero. Si los planos *R* y M_I están situados formando ángulo agudo entre sí actuarán lo mismo que una cuña y en el interferómetro podrán observarse franjas de igual espesor en forma de rectas paralelas a la arista de la cuña.

Las superficies de las lentes (objetivos) pueden inspeccionarse con un interferómetro de Michelson. Para esto el objetivo que se comprueba se introduce en una de las ramas del interferómetro a la vez que el espejo plano se sustituye por uno convexo cuyo centro coincide con el foco del objetivo *F*. En estas condiciones el haz de rayos paralelos, después de pasar por el objetivo y de reflejarse

en el espejo convexo, pasa de nuevo por el objetivo y sus rayos vuelven a ser paralelos. Si el objetivo carece totalmente de aberraciones los haces de luz de las dos ramas del interferómetro producen al encontrarse un campo uniformemente iluminado. Si el objetivo tiene aberraciones se ven anillos oscuros en aquellos sitios en que dicho objetivo produce una diferencia de marcha complementaria. Este procedimiento da la posibilidad de descubrir no sólo las discrepancias del objetivo respecto a la forma que se exige, sino también los defectos originados por la falta de homogeneidad del vidrio.

Los objetivos pueden comprobarse de una forma análoga realizando la interferencia de dos frentes de onda por el procedimiento de Linnik (§ 261). Para ello, entre el foco luminoso S y la lámina con el orificio S' (fig. 46) se coloca la lente L que se ensaya. El frente de onda que se origina junto al orificio puntual S' tiene forma de esfera regular, mientras que el frente de onda producido por la lente L, si ésta tiene aberraciones, estará deformado. Estas deformaciones del frente de onda pueden determinarse por las formas que tienen las franjas de interferencia que se observan.

§ 265. Interferometría. El desarrollo de la ciencia y de la técnica planteó ante la metrología la necesidad de realizar mediciones de extraordinaria precisión. En muchas ramas de la producción en serie, en las que tiene gran importancia que las piezas sean intercambiables, las diferencias entre las dimensiones de estas últimas no pueden exceder de algunas micras. Esto a su vez plantea la cuestión de crear patrones exactos de las magnitudes físicas y en particular un patrón de longitud.

Cuando se estableció el sistema de unidades «absolutas» *CGS* (t. I, § 3) se intentó elegir una unidad «natural» de longitud que con el tiempo no pudiera variar ni perderse. En calidad de esta unidad se propuso tomar una fracción determinada de la longitud de un meridiano terrestre. Pero la verificación de los patrones de longitud prácticamente utilizables con la longitud del meridiano terrestre representa un problema muy difícil y que no se puede resolver con la exactitud necesaria. Por esta razón, más adelante, se tomó como prototipo de patrón de longitud la distancia que hay entre dos trazos practicados en una regla especial de platino iridiado que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Sévres (Francia). Esta regla fue el patrón primario del metro. Al mismo tiempo que el patrón primario se fabricaron 32 patrones tipo que se distribuyeron entre diversos países. En la URSS se conservan dos de estos metros tipo a los que corresponden respectivamente los números 11 y 28. Con el tiempo se apreció cierta diferencia entre las longitudes de los distintos patrones, diferencia que llegó a alcanzar 0,7 μ. Estas diferencias se deben probablemente a una variación lenta de la estructura de la aleación platino-iridio. Y como es evidente que ninguna regla patrón sólida puede garantizarse contra estas variaciones, es lógico adoptar un nuevo patrón de longitud. En calidad de tal puede tomarse la longitud de onda de cualquier raya del espectro excitada en determinadas condiciones. La longitud de las ondas luminosas depende únicamente de las

leyes físicas fundamentales y, por consiguiente, sobre ella no influyen las propiedades casuales de los materiales. Finalmente, las ondas luminosas son cómodas de utilizar en la práctica a pesar de que sus longitudes son pequeñas. El procedimiento interferencial permite comparar con la longitud de una onda luminosa o entre sí longitudes grandes (del orden de un metro) garantizando una gran exactitud.

De esta forma surgió una nueva rama de la metrología, la interferometría que utiliza para las mediciones exactas y para la comparación de longitudes la interferencia de la luz.

La primera comparación de la longitud de una onda luminosa con la longitud de un metro normal fue realizada por Michelson

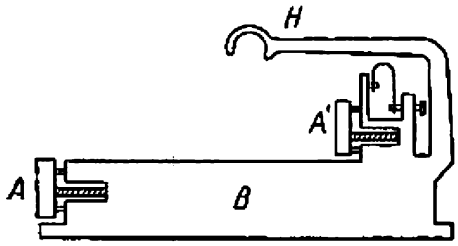

Fig. 62. Patrón de longitud.

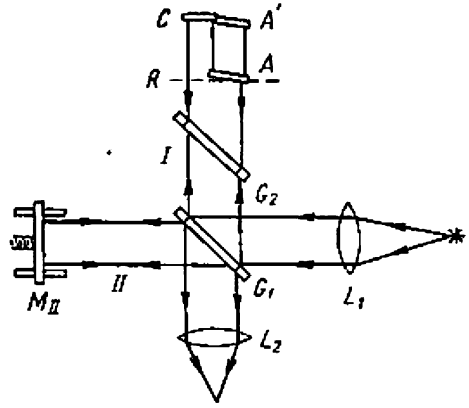

Fig. 63. Esquema del experimento para comparar la longitud de una onda luminosa con la de un patrón de longitud.

en 1890—1895. La longitud del metro normal fue comparada con la de la onda de la raya roja del cadmio. Se eligió esta raya por su gran nitidez. La comparación se llevó a cabo con un interferómetro de Michelson. La idea del método que se siguió para la medición consistió en contar el número de anillos de interferencia de igual inclinación que se desplazan al trasladar el espejo del interferómetro en una magnitud igual a la longitud de un patrón. La longitud de este patrón se tomó igual a 0,39 mm, ya que de ser ésta mayor hubiera sido fácil equivocarse al contar los anillos.

El aspecto exterior del patrón de longitud se muestra en la fig. 62.

Un robusto prisma metálico B soporta dos espejos A y A', los cuales pueden colocarse de forma que queden paralelos entre sí. El brazo H sirve para desplazar el patrón. La distancia entre las

superficies reflectoras de los espejos A y A' determina la longitud del patrón.

El patrón AA' se coloca en el interferómetro en lugar del espejo fijo y junto a él se sitúa un espejo plano C (fig. 63). El interferómetro puede iluminarse si se desea con luz blanca o con la luz de la raya roja del cadmio. La superficie del espejo C se coloca de forma que quede rigurosamente paralela al plano R, el cual representa la imagen del espejo móvil M_{II} obtenida por medio de la lámina semiplateada G_1. Los espejos del patrón A y A' (paralelos entre sí) se colocan formando un pequeño ángulo con el plano R y, al principio, de tal manera que el espejo A corte al plano R según una línea vertical.

Como quiera que el plano R es la imagen del espejo M_{II}, para determinar el tipo de la figura de interferencia se puede tomar en consideración en lugar de la diferencia de marcha entre los haces I y II, la que hay entre el espejo dado (A, A' o C) y el «espejo» R.

Cuando el plano R se encuentra en la posición indicada se pueden observar, con la luz blanca, las franjas de interferencia de igual espesor que se producen debido a la diferencia de marcha entre el espejo del patrón A y el plano R o, con la luz de la raya del cadmio, los anillos de interferencia de igual inclinación del espejo C, paralelo al plano R. Primeramente el aparato se ilumina con la luz blanca y se observan las franjas de igual espesor. La existencia entre ellas de una franja nula indica que el plano R corta en realidad al espejo A. Desplazando un poco el espejo M_{II} puede conseguirse que la línea de corte coincida con el centro del espejo A. Hecho esto, el aparato se ilumina con la luz roja de la raya del cadmio y se observan los anillos de igual inclinación. Mientras se observan estos anillos se empieza a separar el espejo móvil M_{II} de manera que el plano R se traslade en la dirección que va desde el primer espejo A (del patrón) hasta el segundo espejo A'. Con esto los anillos se van aproximando al centro y desaparecen en él. A cada uno de los anillos desaparecidos le corresponde un desplazamiento del plano R igual a $\lambda/2$. El número de anillos que desaparecen se va contando y se sigue desplazando el espejo M_{II} hasta que el plano R corta al espejo A'. La colocación de este último puede hacerse valiéndose de las franjas de interferencia de igual espesor producidas por la luz blanca, de manera análoga a como se hizo para conseguir que el plano R cortara al espejo A. De esta forma queda establecido que el plano R se ha trasladado una magnitud igual a la distancia que hay entre los espejos del patrón A y A'. El número de anillos llegados al centro da el de longitudes de onda de la raya roja del cadmio que caben en dicha distancia.

Las mediciones llevadas a cabo demostraron que al desplazarse el plano R desde el espejo A hasta el A' del patrón de 0,39 mm de longitud desaparecieron 1 212,35 anillos, de donde se deduce

que la longitud de este patrón l_1 era:

$$l_1 = \frac{1\,212{,}35}{2}\lambda_{Cd},$$

donde λ_{Cd} es la longitud de onda de la línea roja del cadmio.

La segunda parte del trabajo consistió en comparar la longitud del patrón de 0,39 mm con la de otros patrones sucesivos, los cuales se hicieron de tal manera que la longitud de cada uno de los siguientes era igual aproximadamente al doble de la del anterior. Las longitudes de estos patrones también se compararon entre sí por medio del interferómetro. La longitud del patrón máximo se tomó igual a 10 cm. Este último se comparó con la longitud del metro normal trasladándolo diez veces en una magnitud igual a su propia longitud. Michelson halló por este procedimiento que en la longitud del metro normal caben 1 553 163,5 longitudes de onda de la raya roja del cadmio, de donde resulta que la longitud de onda de esta raya es $\lambda_{Cd} = 6\,438{,}4722 \cdot 10^{-10}$ m.

Poco tiempo después Fabry y Perot repitieron la comparación del metro normal con la longitud de una onda luminosa utilizando para ello los nítidos anillos de interferencia que producía el patrón ideado por ellos (§ 272). Esta medición dio como resultado que la longitud de la onda de la raya roja del cadmio $\lambda_{Cd} = 6\,438{,}6496 \times \times 10^{-10}$ m. La notable diferencia entre este valor y el obtenido por Michelson no se debe a errores de uno u otros autores, sino a que este último resultado corresponde al aire seco a la temperatura de 15° C y presión de 760 mm Hg, mientras que Michelson no introdujo la corrección correspondiente a la humedad del aire. Si la longitud de la onda luminosa se refiere al vacío, resulta que el metro normal contiene 1 552 734,8 longitudes de onda de la raya roja del cadmio.

En el año 1960 la Conferencia Internacional de Pesas y Medidas tomó la resolución de admitir como unidad primaria de longitud la longitud de onda de la raya anaranjada del isótopo 86 del criptón (Kr^{86}). Esta sustitución de la raya roja del cadmio por la anaranjada del criptón se debe a que esta última es más homogénea (monocromática) y con ella se pueden observar franjas de interferencia nítidas cuando las diferencias de marcha son grandes. Por medio de la interferometría se ha comparado con gran exactitud la longitud de onda de la raya anaranjada del criptón 86 con la del antiguo patrón. La nueva definición del metro en el sistema internacional (t. I, § 3) se basa en la relación que existe entre la longitud del metro y la de la onda de la raya anaranjada del Kr^{86} referida al vacío:

$$1\,\text{m} = 1\,650\,763{,}73\lambda(Kr^{86}).$$

La longitud de este nuevo metro se aproxima mucho a la del metro antiguo determinado por medio de la regla de platino iridiado.

La longitud de onda de la raya anaranjada del Kr^{86}, expresada en metros y referida al vacío, es igual a

$$\lambda_{vac} = 6\,057{,}8021 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Expresándola como generalmente se hace en angstrom (1 Å $= 10^{-10}$ m) y refiriéndola al aire, se obtiene:

$$\lambda_{aire} = 6\,056.1122 \text{Å}.$$

La posibilidad de comparar grandes longitudes con la de una onda luminosa ha permitido un nuevo planteamiento del problema de los patrones del metro. El metro patrón a que nos referimos al principio de este párrafo se definía como la distancia entre *dos trazos* grabados en una regla de platino iridiado. Este tipo de patrón se llama *de trazos*. Sus defectos desde el punto de vista moderno son evidentes. Por el procedimiento de las interferencias sólo se puede comparar la longitud de una onda luminosa con la distancia que hay entre dos superficies especulares reflectoras con la particularidad de que esta distancia puede determinarse con una precisión de hasta pequeñas fracciones de longitud de onda. Los trazos hechos en la regla son mucho más gruesos: su anchura mide varias micras. Por esta razón en todas las medidas realizadas el mayor error se cometía en la última etapa, es decir, al comparar la longitud de uno de los patrones intermedios con la longitud del metro patrón.

Mucho más moderna es la medida *de caras paralelas* en forma de barra metálica cuyos extremos tienen superficies pulimentadas como espejos, lisas hasta fracciones de longitud de onda y paralelas entre sí hasta esta misma exactitud. En las medidas de caras paralelas se toma como longitud la distancia entre sus superficies extremas.

En la actualidad las mediciones se ven facilitadas por el hecho de que la longitud de onda de muchas rayas espectrales se conoce ya con un alto grado de exactitud. Esto evita el tener que contar directamente la cantidad de ondas que caben en la longitud dada. Así, por ejemplo, la longitud del patrón de Fabry y Perot (es decir, la distancia entre sus espejos; véase el § 272) puede compararse fácilmente con la longitud de una onda luminosa haciendo coincidir los anillos de interferencia de dos rayas espectrales distintas. Para simplificar supongamos que al observar en el patrón los anillos de igual inclinación de dos rayas cuyas respectivas longitudes de onda son λ y λ', ambas producen en el centro del patrón una mancha brillante. En este caso tendremos las correlaciones

$$2t = k\lambda, \qquad 2t = k'\lambda', \tag{1}$$

donde k y k' son números enteros. Si conocemos de antemano las magnitudes t, λ y λ' con suficiente precisión, la determinación de los dos números enteros k y k' capaces de satisfacer las igualdades (1) se hace unívoca. Pero al determinar el valor del número entero k expresamos al mismo tiempo la longitud t del patrón en longitudes de onda λ. Si la elección de los números enteros resulta insegura por cualquier causa, debe utilizarse una tercera raya. Este procedimiento puede adaptarse también para comparar la longitud de dos medidas (galgas) de caras paralelas.

El procedimiento de la coincidencia simplifica mucho el trabajo de comparación de la longitud del metro patrón con la longitud de una onda luminosa. En la URSS un grupo de científicos bajo la dirección de M. F. Románova realizó la comparación de un metro tipo de caras (extremos) paralelas con la longitud de onda de la raya roja del cadmio valiéndose de un solo patrón intermedio. Este último era del tipo de los patrones de Fabry y Perot y estaba formado por un tubo metálico en cuyos extremos iban sujetos por contacto óptico dos espejos semiplateados. En el patrón se podía hacer el vacío. Su longitud era igual a 111,6 mm. Esta longitud se comparó por el procedimiento de la coincidencia con la onda de la raya roja del cadmio. Como segunda raya se tomó, la verde del

cadmio, cuya longitud de onda $\lambda = 5\,085{,}8210 \cdot 10^{-10}$ m, y como control se adoptaron tres rayas del criptón. El segundo patrón también era tubular y tenía una longitud 9 veces mayor que la del primero. La construcción de los patrones fue tan exacta que la longitud del segundo sólo difería en 0,5μ de la del primero multiplicada por nueve. Esto hizo posible observar las franjas de interferencia con luz blanca, pasando el haz luminoso sucesivamente por los dos patrones. Las franjas se producían gracias a la pequeña diferencia de marcha que había entre los rayos, los cuales experimentaban nuevo reflexiones en el patrón pequeño y una en el grande. La observación de estas franjas permitía comparar la longitud de los patrones.

La longitud del patrón grande era algo mayor que un metro. El metro tipo de caras paralelas se colocaba dentro de este patrón. Entre los extremos de este metro y los dos espejos del patrón quedaban unos espacios estrechos que también se medían por el procedimiento de la coincidencia. Así se halló la longitud del metro de caras paralelas expresada en longitudes de onda de la raya roja del cadmio.

§ 266. Principio de Huygens-Fresnel. Una característica común a la propagación de todas las ondas es su propiedad de desviarse al pasar un obstáculo (es decir, producir difracción). Pero las proporciones de esta desviación dependen de la relación que existe entre las dimensiones del obstáculo y la longitud de onda. Por ejemplo, las ondas grandes que se propagan por la superficie del agua rodean por completo a un pilote, mientras que las olas pequeñas (cabrillas) forman detrás del pilote una zona de «sombra» bien definida.

El principio de Huygens permite construir la nueva posición del frente de onda trazando la envolvente a las ondas elementales que se producen en cualquier punto de la posición que ocupaba dicho frente en un momento anterior. Esta construcción demuestra la desviación que sufre la onda después de pasar un obstáculo (compárese con lo dicho en el t. I, § 107). La fig. 64 representa una onda plana BB' que incide sobre un obstáculo AA' provisto de un orificio a. Parte del frente de esta onda llega al orificio a y cada uno de los puntos de dicho orificio se convierte en una fuente de ondas hemiesféricas elementales. La envolvente de estas ondas elementales es plana solamente en su parte central, mientras que en los bordes se curva. De acuerdo con esto, los rayos (perpendiculares a la superficie de onda) se tuercen, es decir, se difractan en los bordes del orificio. No obstante, la descripción que nos da el principio de Huygens dista mucho de ser completa, puesto que no nos da la posibilidad de hallar la amplitud de las oscilaciones que se propagan en distintos sentidos. Y como la energía de las vibraciones viene dada por el cuadrado de la amplitud, la intensidad de las ondas que se tuercen queda indeterminada. Este defecto del principio de Huygens se subsana por medio del procedimiento de cálculo propuesto por Fresnel que está basado en un conocimiento más profundo del proceso ondulatorio y en el cual se tienen en cuenta las amplitudes y las fases de las vibraciones.

Supongamos que la superficie S (fig. 65) representa la posición de un frente de onda en un momento dado. *Para determinar la vibración en el punto P que se encuentra delante del frente a una distancia r_0, según Fresnel, hay que hallar las vibraciones que llegan al punto P de todos los elementos de la superficie S, y después sumarlas teniendo en cuenta sus amplitudes y fases.* La amplitud de las

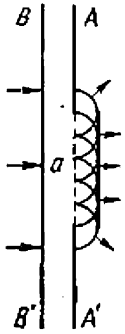

Fig. 64. Difracción de una onda plana al pasar por el orificio a del obstáculo AA'.

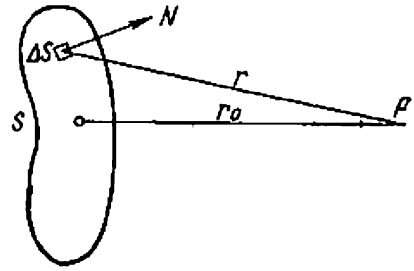

Fig. 65. Las vibraciones en el punto P se determinan sumando las que provienen de cada uno de los elementos de la superficie S.

vibraciones que llegan al punto P procedentes del elemento de superficie ΔS depende de las dimensiones de este elemento, de la distancia r y del ángulo que forma la dirección r con la perpendicular a la superficie N. La fase de la vibración se determina por el camino r recorrido por las ondas. La suma de estas vibraciones elementales es problema que atañe al cálculo integral y que, en términos generales, puede ser muy complicado. Pero en los casos más simples, es decir, en aquellos en que existe simetría, como demostró Fresnel, la integración puede sustituirse por una simple suma algebraica o gráfica.

Analicemos el caso del paso de la luz por un orificio redondo. Sea A (fig. 66) un foco puntual de luz y $C'C''$ un orificio redondo practicado en una pantalla opaca que se encuentra a una distancia R de A. Este orificio deja pasar únicamente una parte de la onda esférica procedente de A. Determinemos el efecto que produce esta onda en el punto P que se encuentra a una distancia r_0 del orificio $C'C''$ en la recta AA' que pasa por el centro del mismo. Para esto dividimos mentalmente la superficie de onda S en *zonas anulares* (*zonas de Fresnel*) de tal forma que las distancias que separen del punto P los bordes de dos zonas contiguas se diferencien entre sí en una semionda:

$$B_1P - B_0P = B_2P - B_1P = B_3P - B_2P = \ldots = \frac{\lambda}{2}. \qquad (1)$$

Entonces *las vibraciones que llegan al punto P desde las partes correspondientes a dos zonas contiguas tendrán una diferencia de marcha de* $\lambda/2$, *es decir, llegarán al punto P en fases opuestas.*

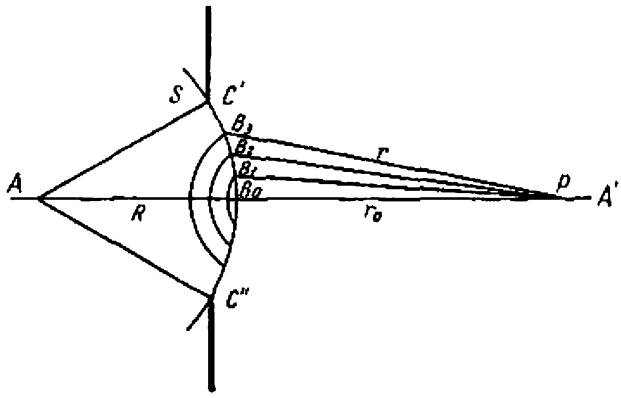

Fig. 66. Construcción de las zonas anulares.

La amplitud de las vibraciones procedentes de una zona tomada aisladamente depende del área de dicha zona, de la distancia r que hay desde ella hasta el punto P y del ángulo de inclinación que

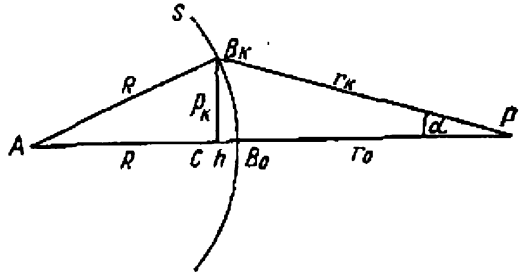

Fig. 67. Esquema para el cálculo de las dimensiones de las zonas anulares.

existe entre r y la perpendicular a la superficie de la zona. Demostremos ante todo que las áreas de las distintas zonas son aproximadamente iguales.

Llamemos ρ_k al radio de la zona k. De acuerdo con la fig. 67 tenemos

$$\rho_k^2 = R^2 - (R-h)^2 = r_k^2 - (r_0+h)^2, \tag{1a}$$

de donde

$$h = \frac{r_k^2 - r_0^2}{2(R+r_0)}. \tag{2}$$

Pero según (1) la distancia que hay hasta la zona k, es decir r_k, es mayor que la distancia r_0 en la magnitud $k\frac{\lambda}{2}$:

$$r_k = r_0 + k\frac{\lambda}{2}; \text{ de donde } r_k^2 - r_0^2 = kr_0\lambda + k^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2.$$

Considerando que la longitud de onda λ es mucho menor que la distancia r_0, obtenemos aproximadamente:

$$r_k^2 - r_0^2 = kr_0\lambda, \tag{3}$$

después de lo cual la igualdad (2) tomará la forma

$$h = k\frac{r_0}{R+r_0}\frac{\lambda}{2}. \tag{2a}$$

El área del segmento circular de radio ρ_k es igual a

$$\Delta S_k = 2\pi Rh.$$

Poniendo aquí en lugar de h su valor según (2a), obtenemos:

$$\Delta S_k = k\frac{2\pi Rr_0}{R+r_0}\frac{\lambda}{2}.$$

Dentro de los límites de este segmento caben k zonas anulares, por lo que el área de una zona ΔS puede representarse como la diferencia entre el área de este segmento y la del segmento que abarca $(k-1)$ zonas:

$$\Delta S = \Delta S_k - \Delta S_{k-1} = k\frac{2\pi Rr_0}{R+r_0}\frac{\lambda}{2} - (k-1)\frac{2\pi Rr_0}{R+r_0}\frac{\lambda}{2},$$

de donde

$$\Delta S = \frac{\pi Rr_0}{R+r_0}\lambda.$$

Por lo tanto, el área de la zona con la aproximación indicada no depende de su número k, es decir, las áreas de todas las zonas son aproximadamente iguales. Por consiguiente, la amplitud de las vibraciones que llegan al punto P procedentes de las distintas zonas sólo depende de la distancia r_k y del ángulo que la dirección r_k forma con la perpendicular a la superficie de la zona. Al aumentar el número de la zona k aumentará también la distancia r_k y el ángulo de inclinación, por lo que las amplitudes a_k de las vibraciones que llegan hasta el punto P de las distintas zonas deben disminuir monótonamente al ir aumentando el número k de dichas zonas:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots > a_k > a_{k+1} > \ldots$$

Como quiera que las fases de las vibraciones que llegan al punto P procedentes de dos zonas contiguas son contrarias, la amplitud A_k de la vibración resultante, producida por la acción de k zonas,

será:

$$A_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots \pm a_k, \qquad (4)$$

donde el signo del último miembro será positivo cuando k sea impar y negativo cuando k sea par. Es evidente que si el número de zonas es par, su efecto se debilita por parejas y la amplitud de la vibración resultante A_k en el punto P será insignificante; cuando el número de zonas es impar el efecto de una de las zonas queda sin debilitarse y la amplitud A_k será mayor que cuando dicho número es par.

El valor de la amplitud A_k de la vibración resultante puede obtenerse con más exactitud dividiendo todos los términos impares de la suma (4) en dos sumandos: $a_1 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2}$; $a_3 = \frac{a_3}{2} + \frac{a_3}{2}$, etc. De esta forma, cuando k es impar obtenemos:

$$A_k = \frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1}{2} - a_2 + \frac{a_3}{2}\right) + \left(\frac{a_3}{2} - a_4 + \frac{a_5}{2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{a_{k-2}}{2} - a_{k-1} + \frac{a_k}{2}\right) + \frac{a_k}{2}. \qquad (4a)$$

Si k es par obtenemos

$$A_k = \frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1}{2} - a_2 + \frac{a_3}{2}\right) + \left(\frac{a_3}{2} - a_4 + \frac{a_5}{2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{a_{k-3}}{2} - a_{k-2} + \frac{a_{k-1}}{2}\right) + \frac{a_{k-1}}{2} - a_k. \qquad (4b)$$

Como las amplitudes a_k, según hemos dicho, disminuyen monótonamente al aumentar el número k, aproximadamente podemos admitir que la amplitud de las vibraciones producidas por una zona cualquiera k es igual a la semisuma de las amplitudes de las vibraciones que producen las zonas $(k-1)$ y $(k+1)$:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2},$$

de donde todos los sumandos de las series (4a) y (4b) encerrados entre paréntesis serán iguales a cero y, por consiguiente, cuando k es impar:

$$A_k = \frac{a_1}{2} + \frac{a_k}{2}, \qquad (5)$$

y cuando k es par:

$$A_k = \frac{a_1}{2} + \frac{a_{k-1}}{2} - a_k. \qquad (5a)$$

Si el número de zonas k es suficientemente grande, las amplitudes de las oscilaciones producidas por las zonas $(k-1)$ y k se diferenciarán poco entre sí, de donde aproximadamente

$$\frac{a_{k-1}}{2} - a_k = -\frac{a_k}{2}.$$

De esta forma, las igualdades (5) y (5a) toman el aspecto:

$$A_k = \frac{a_1}{2} \pm \frac{a_k}{2}, \tag{6}$$

donde el signo más corresponde a un número impar de zonas y el signo menos a un número par de las mismas.

El número de zonas que cabe en la parte del frente de onda que la pantalla no cierra depende de la relación que existe entre las dimensiones del orificio y la longitud de onda λ y del sitio en que aquél se encuentre. Según la fórmula (1a) el radio ρ_k de la zona k viene determinado por la igualdad

$$\rho_k^2 = r_k^2 - (r_0 + h)^2 = r_k^2 - r_0^2 - 2r_0h - h^2.$$

Suponiendo que h es mucho menor que r_0, podemos despreciar el miembro h^2, entonces

$$\rho_k^2 = r_k^2 - r_0^2 - 2r_0h.$$

Poniendo en esta igualdad en lugar de h su valor según (2a), obtenemos

$$\rho_k^2 = r_k^2 - r_0^2 - k\frac{r_0^2}{R + r_0}\lambda,$$

y finalmente, sustituyendo, según (3), $r_k^2 - r_0^2$ por $kr_0\lambda$, hallamos

$$\rho_k^2 = k\frac{r_0R}{R + r_0}\lambda,$$

de donde

$$\rho_k = \sqrt{k\frac{r_0R}{R + r_0}}. \tag{7}$$

Evidentemonte ρ_k es al mismo tiempo el radio del orificio de la pantalla que analizamos. De aquí resulta que un orificio de radio ρ abre una parte del frente de onda en la cual cabe un número de zonas

$$k = \frac{\rho}{\lambda}\frac{\rho(R + r_0)}{r_0R}. \tag{8}$$

Cuando el frente de onda que llega a la pantalla es plano ($R = \infty$) la fórmula (8) toma la forma:

$$k = \frac{\rho}{\lambda}\frac{\rho}{r_0}.$$

o

$$k = \frac{\rho}{\lambda}\alpha, \tag{8a}$$

donde $\alpha = \frac{\rho}{r_0}$ es el ángulo bajo el cual se observa el orificio de la pantalla desde el punto P.

La amplitud de la vibración resultante en el punto P depende del número de zonas abiertas k. Cuando se dan la longitud de onda,

la distancia a que se encuentra la pantalla y las dimensiones del orificio que hay en ésta (λ, R y ρ), el número de zonas abiertas k viene determinado por la posición del punto P. Para diferentes puntos P el número k será distinto. En aquellos puntos P para los que k es impar la amplitud de la vibración resultante A_k será mayor, y en aquellos puntos P para los que k sea par, será menor. El cuadrado de la amplitud determina la energía de la vibración. A su vez la energía de las vibraciones luminosas determina la iluminación. De esta forma, al avanzar a lo largo de la recta B_0A' (fig. 66) nos encontraremos unas veces con mayor iluminación y otras con menor.

Cuando se dan R y r_0, es decir, la posición del foco luminoso, la pantalla con el orificio y el punto de observación P, la iluminación de este último dependerá de las dimensiones del orificio ρ y de la relación que exista entre éstas y la longitud de onda λ.

De esta forma llegamos a la conclusión de que *la luz no se propaga en línea recta; la iluminación en el punto P depende de las dimensiones y de la posición que tenga el orificio C'C" y viene determinada por la acción de todos los puntos que se encuentran en la parte abierta del frente de onda.*

Si las dimensiones del orificio $C'C''$ se aumentan hasta el infinito, es decir, si se deja abierta toda la superficie del frente de onda S, la acción de la última zona a_k se hará infinitamente pequeña y, de acuerdo con (6), la amplitud de la vibración resultante A_∞, en el punto P, será igual a

$$A_\infty = \frac{a_1}{2}.$$

Si las dimensiones del orificio $C'C''$ son tales que, con relación al punto P, en la superficie del orificio cabe un número de zonas impar, la amplitud de las vibraciones en el punto P será

$$A_k = \frac{a_1}{2} + \frac{a_k}{2},$$

es decir, *mayor* que cuando el frente está abierto por completo. El valor de A_k será máximo en un punto P para el cual en la superficie del orificio solamente quepa la primera zona. En este caso $A_1 = a_1$, es decir, será dos veces mayor que A_∞.

Cuando el número de zonas abiertas es grande, $\frac{a_k}{2}$ será pequeño y la amplitud de la vibración resultante A_k se diferenciará poco de la amplitud A_∞ correspondiente al frente abierto por completo. De aquí se deduce que las dimensiones del orificio $C'C''$ dejan de influir en la iluminación del punto P cuando el número de zonas abiertas es grande. Si la luz se propagara en línea recta, las dimensiones del orificio no deberían influir en absoluto en la iluminación del punto P. De aquí deducimos que *las conclusiones a que conducen la teoría ondulatoria y la idea de la propagación rectilínea de*

la luz comienzan a coincidir cuando el número de zonas abiertas es grande. Aplicando las expresiones de k que hemos deducido es fácil calcular en qué condiciones puede ser grande el número de zonas que caben en la superficie del orificio. Por ejemplo, en el caso del frente de onda plano ($R = \infty$), para un punto P situado a una distancia $r_0 = 50$ cm de un orificio de radio $\rho = 5$ mm y siendo la longitud de onda de la luz $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm, de acuerdo con (8a)

$$k = \frac{0{,}5}{5 \cdot 10^{-5}} \frac{0{,}5}{50} = 100.$$

Es decir, en estas condiciones en el área del orificio cabe ya un número suficiente de zonas y aunque se continúen aumentando las dimensiones de aquél esto no influirá prácticamente en la iluminación del punto P, es decir, el resultado será el mismo que si la luz se propagara en línea recta. Pero para un punto P que se encuentre a 50 m de distancia de este mismo orificio de radio $\rho = 5$ mm, en el área de este último sólo cabrá una zona y la influencia del carácter ondulatorio de la propagación de la luz se dejará sentir claramente.

Los resultados obtenidos por Fresnel pueden comprobarse fácilmente con un experimento cuyo esquema se muestra en la fig. 68. Una fuente de luz muy intensa S (por ejemplo, el cráter de un arco voltaico) se proyecta por medio de

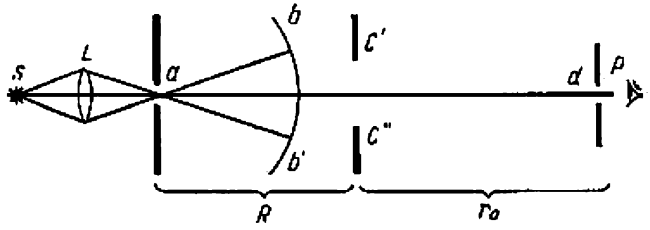

Fig. 68. Esquema para demostrar que la iluminación depende del número de zonas de Fresnel abiertas.

la lente L sobre una pantalla opaca en la que hay un pequeño orificio a. Este orificio sirve a su vez de foco puntual de luz y produce un frente de onda esférico bb'. Para observar la acción de este frente colocaremos un ojo en el punto P. Con objeto de fijar el ojo en una dirección perfectamente determinada es conveniente colocar delante de él una pantalla opaca provista de un orificio d y mirar a través del mismo. En el camino a recorrer por el frente de onda se interpone un diafragma de iris cuya abertura es el orificio $C'C''$. Al variar las dimensiones del orificio del diafragma llegarán al ojo las vibraciones correspondientes a un número de zonas par o impar y harán que éste perciba unas veces más luz y otras menos.

Las dimensiones convenientes del orificio del diafragma pueden calcularse por la fórmula (7). Si desde el foco principal a hasta el diafragma se toma una distancia $R = 10$ m y la distancia r_0 desde dicho diafragma hasta el ojo del

observador es también igual a 10 m, según (7), tendremos que si $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm

$$\rho_k = \sqrt{\frac{10^3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3} \cdot 5 \cdot 10^{-5}} \cdot \sqrt{k} \text{ cm} \approx 0{,}17 \cdot \sqrt{k} \text{ cm}.$$

Como puede verse, en estas condiciones el radio de la zona central es igual a 1,7 mm y el de la novena zona igual a 5,1 mm. Estas dimensiones del orificio son fáciles de conseguir con un buen diafragma de iris, y a medida que van aumentando no es difícil apreciar a simple vista los reforzamientos y debilitaciones periódicas de la luz.

§ 267. Composición gráfica de las amplitudes. A las mismas conclusiones que sacamos en el § 266 se puede llegar también por el procedimiento de la composición gráfica de las vibraciones, con la particularidad de que para esto no es necesario construir las zonas anulares de forma que las vibraciones que de ellas proceden lleguen al punto P (fig. 67) en fases opuestas. Podemos examinar zonas tan estrechas como se desee.

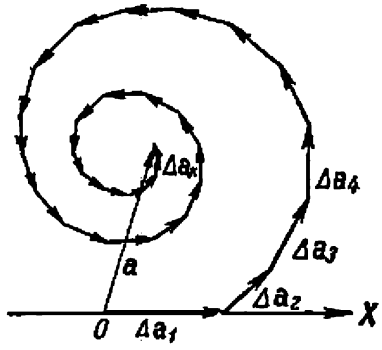

Fig. 69. Suma gráfica de los vectores amplitud de las vibraciones procedentes de las distintas zonas.

Para la composición gráfica de las vibraciones aplicaremos el concepto de vector amplitud a (véase el t. I, § 100). Se entiende por vector amplitud un vector a cuya longitud es igual a la amplitud y que forma con un eje OX dado un ángulo α correspondiente a la fase inicial de la vibración que se estudia. Cuando se suman varios movimientos vibratorios representados por medio de vectores $\mathbf{a}_i$, la vibración resultante estará representada por un vector $\mathbf{a}$ igual a la suma vectorial de los vectores $\mathbf{a}_i$; la longitud del vector $\mathbf{a}$ nos dará la amplitud y el ángulo que forme con el eje OX expresará la fase inicial de la vibración resultante.

Dividamos la superficie libre del frente de onda en zonas anulares muy estrechas. La vibración que llega al punto P desde la primera zona estará representada por un vector $\Delta \mathbf{a}_1$. Supongamos que la fase inicial de esta vibración es igual a cero. En este caso, en la fig. 69 el vector $\Delta \mathbf{a}_1$ se situará a lo largo del eje OX. La amplitud de la vibración que llega al punto P procedente de la segunda zona es algo menor que la de la primera zona: además esta vibración estará un poco retardada en fase respecto a la vibración producida por la primera zona. Por lo tanto, la vibración que la segunda zona produce en el punto P se representará con el vector $\Delta \mathbf{a}_2$, cuya longitud será menor que la del vector $\Delta \mathbf{a}_1$, y el cual formará un ángulo algo mayor con el eje OX. Tracemos este vector a partir del extremo

del Δa_1, como se muestra en la fig. 69. La vibración debida a la tercera zona se representa con el vector Δa_3, cuya longitud es más pequeña aún y que forma un ángulo un poco mayor con el eje OX, y así sucesivamente. El conjunto de los vectores Δa_i forma una línea quebrada en espiral. La vibración resultante en el punto P vendrá representada por el vector a, que une el punto O con el extremo del vector Δa_k correspondiente a la vibración procedente de la última zona abierta.

Supongamos que las zonas se han trazado de tal forma que la diferencia de fases entre las vibraciones de las zonas contiguas es constante e igual, por ejemplo, a $\pi/6$. En la fig. 70, *a* puede verse la suma de los primeros seis vectores Δa_i. En este caso el último de los

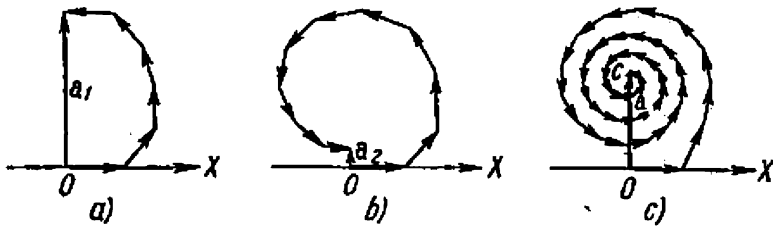

Fig. 70. Suma de los vectores amplitud de las vibraciones procedentes: de la primera zona (*a*), de las dos primeras zonas (*b*) y del frente de onda abierto por completo (*c*).

seis vectores tiene fase opuesta a la del vector Δa_1, de donde las primeras seis zonas examinadas corresponderán en este caso a la primera zona de Fresnel. De esta forma el vector a_1 corresponde a la vibración que produce la primera zona de Fresnel. De la misma forma, el vector a_2 (fig. 70, *b*) representa la vibración debida a las dos primeras zonas de Fresnel, y así sucesivamente. Como puede verse, la longitud del vector a_2 es menor que la del vector a_1, lo que está de acuerdo con la deducción sacada en el párrafo anterior, según la cual la amplitud de la vibración en el punto P es mayor cuando sólo hay una zona abierta que cuando hay dos. En general, el valor de la amplitud de la vibración que obtenemos en el punto P será unas veces mayor y otras menor, dependiendo del número de zonas abiertas. A un frente de onda abierto por completo le corresponderá un número de zonas infinitamente grande y una convergencia asintótica de la quebrada hacia el centro C (fig. 70, *c*). De aquí se deduce que la longitud del vector a_∞ que une los puntos O y C, da la amplitud de las vibraciones producidas en el punto P por un frente de onda abierto por completo. Comparando las figuras 70, *a* y 70, *c* puede verse que $a_\infty = \frac{a_1}{2}$, lo que coincide con el resultado de la suma algébrica realizada en el § 266.

En el límite, tomando zonas infinitamente estrechas, se obtiene un número infinitamente grande de vectores Δa_i de longitud infinitamente pequeña y cada uno de ellos formará un ángulo infinitamente pequeño con el vector anterior. Como resultado de esto la línea quebrada de la fig. 70, *c* se convierte en la espiral representada en la fig. 71.

Estudiemos ahora el caso de un frente de onda plano que incide sobre una pantalla opaca en la que hay un orificio redondo. En este caso, según la fórmula (8a) del § 266, a cada punto de la espiral, por ejemplo, al punto B de la fig. 71, le corresponderá un valor determinado de la relación $\frac{\rho}{\lambda}\alpha$, donde ρ es el radio del orificio y α el ángulo bajo el cual se observa este orificio desde el punto P (fig. 67). La longitud del vector a, que une el punto O con el B, da la amplitud de las vibraciones que produce en el punto P toda la parte del frente de onda que deja abierta el orificio redondo que estudiamos. Supongamos, por ejemplo, que mientras permanece invariable el radio ρ del orificio, se traslada el punto P a lo largo del eje AA' (fig. 66), es decir, que varía el ángulo α. A este traslado le corresponderá un desplazamiento continuo del punto B por la espiral. Al ocurrir esto, la longitud del vector $\mathbf{OB} = a$ aumentará o disminuirá periódicamente, hecho que indica cómo la iluminación varía periódicamente a lo largo del eje AA' (fig. 66). A este mismo resultado llegamos en el párrafo 266 por medio de la suma algébrica, con la única diferencia de que allí la construcción de las zonas de Fresnel solamente permitía hallar las amplitudes de la iluminación en aquellos puntos P para los que el número de zonas abiertas era igual a un número entero. Ahora, gracias a que las zonas consideradas son infinitamente pequeñas, podemos hallar la amplitud de las vibraciones en cualquier punto P.

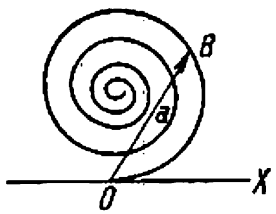

Fig. 71. Cuando las zonas se toman infinitamente estrechas la línea quebrada que forman los vectores amplitud se convierte en una espiral.

En adelante, cuando estudiemos los diferentes casos de difracción, emplearemos este procedimiento gráfico de composición de las vibraciones.

En el procedimiento de cálculo propuesto por Fresnel existen algunas confusiones de principio. Figurémonos un foco puntual A (fig. 72) en torno al cual se forma un frente de onda esférico $BCED$ en un momento dado. Para determinar la amplitud de las vibraciones en el punto P tendremos que componer en este punto las vibraciones que llegan a él procedentes de todas las partes del frente de onda CBD. La parte DEC del frente (es decir, la parte «posterior») no se tiene en cuenta en el cálculo. Si trazamos una perpen-

dicular externa N a la superficie, según lo dicho anteriormente, la amplitud de las vibraciones que llegan al punto P depende del valor del ángulo γ que forma la dirección r con la perpendicular N. Las vibraciones que tienen mayor amplitud son las que llegan a P procedentes del elemento de superficie que se encuentra junto al punto B, donde el ángulo $\gamma = 0$. Las amplitudes de las vibraciones que proceden de los elementos de superficie próximos a los puntos C y D, donde $\gamma = \pi/2$, son iguales a cero. También hay que considerar iguales a cero las amplitudes de las vibraciones

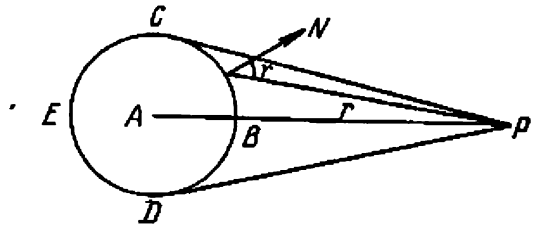

Fig. 72. El método de Fresnel tiene en cuenta únicamente las vibraciones procedentes de la mitad «delantera» CBD del frente de onda esférico.

producidas por todos aquellos elementos de superficie en que $\gamma > \pi/2$. De esta forma no se tienen en cuenta las vibraciones de la mitad «posterior» de la superficie de onda. Esta es una de las circunstancias que la teoría de Fresnel no fundamenta.

El segundo defecto del procedimiento de Fresnel consiste en que da un valor falso de la fase inicial de la vibración en el punto P. El valor de la fase de la vibración resultante en el punto P, hallado por el medio de la composición gráfica de las vibraciones que llegan de las diferentes zonas de un frente abierto por completo, se diferencia en $\pi/2$ del valor real.

Efectivamente, supongamos que sobre una pantalla con un orificio incide una onda plana. Si el orificio es tan pequeño que con relación a un punto determinado P solamente está abierta una pequeña parte de la zona central de Fresnel, la vibración en el punto P estará representada en la fig. 70, *c* por la primera flecha (vector), paralela al eje OX. Cuando el frente está abierto por completo la vibración en el punto P se representará por el vector a_∞, perpendicular al eje OX. Según esto la fase de las vibraciones procedentes de un frente de onda plano infinito debería retrasarse en $\pi/2$ respecto a la fase de las vibraciones procedentes de un orificio pequeño, es decir, de las vibraciones que se propagan en forma de onda hemisférica elemental.

No obstante, el procedimiento de Fresnel es útil, puesto que con él se consiguen valores exactos de las amplitudes de las vibraciones y, por consiguiente, de la iluminación. Y en la mayoría de

los problemas lo importante es precisamente conocer la iluminación.

El cálculo exacto de la difracción sólo puede obtenerse basándose en la teoría electromagnética de la luz. El resultado depende en parte del carácter del material de que está hecha la pantalla que bordean las ondas. Para cuerpos conductores de formas geométricas simples los cálculos exactos fueron realizados por V. A. Fok.

§ 268. Difracción por obstáculos opacos. Como ya dijimos, los fenómenos de difracción se observan cuando los haces luminosos son interceptados parcialmente por obstáculos opacos. La difracción que se observa en estas condiciones directamente, sin necesidad de emplear sistemas ópticos, se llama *difracción de Fresnel*. Estos casos de difracción pueden analizarse por el procedimiento de las zonas que expusimos en el párrafo anterior. Estudiemos algunos casos particulares de difracción de Fresnel.

1. Difracción por un orificio circular. Sea A un foco puntual de luz (fig. 73), B una pantalla opaca con un orificio circular D,

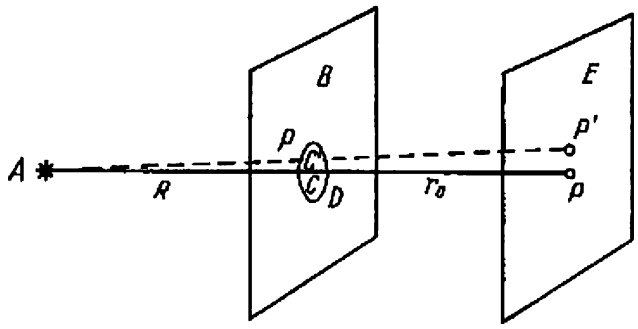

Fig. 73. Esquema del experimento para observar la difracción producida por un orificio redondo.

cuyo centro es C, y finalmente, sea E la pantalla en que se observa la iluminación. Si la luz se propagara en línea recta obtendríamos en la pantalla E un círculo iluminado con bordes nítidos. Pero en realidad se produce una figura más compleja. El efecto del frente de onda que pasa por el orificio D en el punto P del eje AC ya lo determinamos antes. El hecho de que la iluminación en el punto P sea mayor o menor que la que produciría el mismo frente si no estuviera cerrado depende de que el número de zonas de Fresnel que caben en el orificio D, en las condiciones concretas en que se hace el experimento, sea impar o par. Para hallar la iluminación en un punto cualquiera P', que no se encuentre en el eje AC, deberemos razonar de la manera siguiente. Si la pantalla B no existiera, determinaríamos la acción del frente de onda en el punto P' cons-

truyendo las zonas anulares de Fresnel con centro en el punto C'. Cuando existe la pantalla B el orificio D se encuentra descontrado con relación a estas zonas. La parte abierta de las zonas tendrá el aspecto que se representa en la fig. 74, donde para mayor claridad las zonas impares se han rayado. La acción de estas zonas en el punto P' viene determinada no sólo por su número, sino también por la parte de cada zona que queda abierta. El cálculo exacto de la amplitud de la vibración resultante en el punto P' es muy complicado, pero está claro que a medida que nos alejamos del punto P encontraremos periódicamente sitios en que la iluminación es mayor y sitios en que es menor. Pero como quiera que el conjunto de esta figura debe tener simetría circular, alrededor del punto P se formarán anillos brillantes y oscuros que se suceden unos a otros. En la parte inferior de la foto 2 (véase el apéndice) puede verse la difracción producida por orificios circulares de distintas dimensiones (el número n indica el de zonas que caben dentro de los límites del orificio). En la parte superior de esta misma foto se dan las curvas de distribución de la intensidad luminosa correspondiente a las figuras de la parte inferior. El número de anillos brillantes y oscuros que se observan y la posición de los mismos depende del número de zonas que caben en el área del orificio D en las condiciones en que se hace la observación. Según la fórmula (8) del § 266, en un orificio de radio ρ cabe un número de zonas k que viene determinado por la igualdad

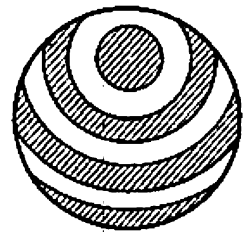

Fig. 74. Disposición de las zonas correspondiente a la dirección «oblicua».

$$k = \frac{\rho}{\lambda} \frac{\rho\,(R + r_0)}{r_0 R}. \qquad (1)$$

Como puede verse, este número k depende de la relación que existe entre el radio del orificio ρ y la longitud de onda λ y entre la distancia R, desde el foco hasta la pantalla, y la r_0, desde la pantalla hasta el sitio de observación. Cuando la distancia R aumenta hasta el infinito la fórmula (1) se transforma en la (8a) del § 266. El número de zonas k puede ser pequeño, aun cuando las dimensiones del orificio D sean considerables, siempre que las distancias R y r_0 sean suficientemente grandes. Si el área del orificio es cubierta solamente por la zona central de Fresnel o por parte de ella, en la pantalla E se obtiene una mancha difusa a cuyo alrededor no habrá anillos claros ni oscuros. Cuando en el área del orificio cabe un gran número de zonas de Fresnel, la iluminación en las proximidades del punto P será prácticamente uniforme y solamente junto a los bordes de la sombra geométrica se observarán unas franjas claras y oscuras, bastante estrechas, que se suceden entre sí.

Todos estos razonamientos se basan en la suposición de que el foco luminoso A es puntual. Pero cualquier fuente real de luz tiene extensión. En este caso tenemos que dividir dicha fuente de luz en una serie de focos puntuales y considerar que cada uno de ellos produce su figura de difracción. Estas figuras de difracción estarán algo desviadas entre sí. Las dimensiones de la fuente luminosa deberán ser tan pequeñas que las franjas claras y oscuras producidas por los diferentes focos puntuales no se superpongan, puesto que de ocurrir esto las figuras de difracción se desvanecerían por completo.

2. Difracción por una pantalla circular opaca. Sea A otra vez un foco puntual luminoso y D un disco opaco con centro en el punto C (fig. 75). Determinemos en primer lugar el efecto que produce el frente de onda en el punto P situado en el eje AC. Supongamos que

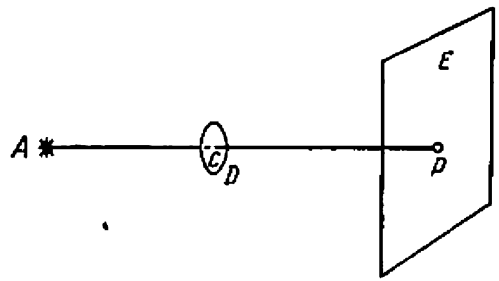

Fig. 75. Esquema del experimento para observar la difracción producida por un disco opaco.

la pantalla D cubre las k primeras zonas. Entonces al punto P llegarán las vibraciones de todas las demás zonas, comenzando por la $(k + 1)$. Componiendo la acción de todas estas zonas, de la misma forma que lo hicimos en el § 266, llegaremos a la conclusión de que la amplitud de la vibración A_P en el punto P será igual a la mitad de la amplitud de las vibraciones procedentes de la zona $(k + 1)$:

$$A_P = \frac{a_{k+1}}{2}.$$

Es decir, independientemente de las dimensiones que tenga y de la posición que ocupe el disco opaco, en el centro de su sombra geométrica siempre habrá luz. El número de zonas cubiertas solamente influye en la intensidad de esta luz. Cuando el disco cubre muchas zonas, $\frac{a_{k+1}}{2}$ es pequeña, y por consiguiente, es pequeña la iluminación en el punto P.

Para los puntos que no se encuentran en el eje AC el disco resultará descentrado con relación a las zonas. La amplitud resultante será entonces mayor o menor en función de la parte de las

zonas cubiertas. De esta forma llegamos a la conclusión de que el punto brillante central estará rodeado de una serie de anillos claros y oscuros alternativos. Si el disco cubre únicamente una parte pequeña de la zona central, las ondas lo bordean totalmente y no produce sombra.

A la deducción de que debía existir una mancha brillante en el centro de la sombra producida por un disco se llegó inmediatamente después de haber aparecido el primer trabajo de Fresnel sobre el método de componer las vibraciones procedentes de las diferentes zonas de un frente de onda. Esta deducción resultó tan inesperada que llegó a utilizarse como argumento en contra de la teoría de Fresnel. Pero poco tiempo después fue demostrada experimentalmente la existencia de la mancha brillante en el centro de la sombra.

La figura de difracción que produce un disco opaco se puede intentar determinar comparándola con la figura de difracción que produce un orificio circular que tenga las mismas dimensiones y la misma posición respecto a la fuente luminosa y al sitio de observación. Dos pantallas construidas de forma que la parte transparente de una corresponda a la opaca de la otra y viceversa se llaman *complementarias*. Puede parecer que dos pantallas complementarias deben producir figuras de difracción que se complementen entre sí, es decir, que donde la una produce una franja brillante la otra producirá una oscura. Pero esto, en general, no es cierto.

Efectivamente, sea a la amplitud de la vibración que produce en el punto P un frente de onda abierto por completo, a_1 la amplitud de la vibración que produce en el mismo punto P dicho frente de onda cuando se interpone una pantalla determinada, y a_2 la amplitud de la vibración cuando se interpone otra pantalla complementaria de la primera.

En estas condiciones, representando cada una de estas vibraciones por su vector amplitud $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, obtendremos:

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}. \qquad (2)$$

Esta igualdad, que relaciona entre sí los tres vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, permite hallar el efecto de una pantalla cualquiera si se conoce el de la pantalla complementaria. Pero en la igualdad (2) puede verse que para determinar una de las amplitudes, por ejemplo, la a_2, hay que conocer además de las amplitudes a_1 y a, las *fases* de las tres vibraciones. Es decir, la aplicación práctica de la igualdad (2) no es fácil. Solamente existe un caso particular en que no es necesario conocer las fases: cuando uno de los vectores amplitud, por ejemplo, el $\mathbf{a}_1$, es igual a cero, en cuyo caso, según (2), $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$. Esto significa que si en un punto cualquiera no existen en absoluto vibraciones cuando se halla interpuesta una pantalla determinada, al interponer la pantalla complementaria, en este mismo punto, se producirá una iluminación igual a la que produciría el frente de onda abierto. Pero la deducción inversa es falsa: si con una pantalla determinada la amplitud $a_1 = a$ en un punto dado, al interponer la pantalla complementaria, en este mismo punto la amplitud a_2 puede tener cualquier valor comprendido entre 0 y $2a_1$. Esto último ocurre cuando las fases de las vibraciones $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son opuestas.

3. Difracción por el borde rectilíneo de un semiplano. Sea un semiplano opaco con borde rectilíneo (fig. 76). Supongamos que sobre este semiplano incide un frente de onda luminosa paralelo

a él. Si la luz se propagara en línea recta, en la pantalla obtendríamos una sombra nítida del semiplano. Pero en realidad, debido a la naturaleza ondulatoria de la luz, en la pantalla D se observa una figura de difracción compleja. Para determinar esta figura utilizaremos el método del Fresnel de composición de las vibraciones procedentes de diferentes zonas del frente de onda. Como en el caso que estudiamos el frente de onda carece de simetría esférica, en lugar de las zonas anulares tomaremos zonas en forma de franjas.

Veamos lo que ocurre con las vibraciones procedentes del frente de onda al llegar a un punto cualquiera P de la pantalla D. Levantemos desde el punto P una perpendicular PB_0 al frente de onda.

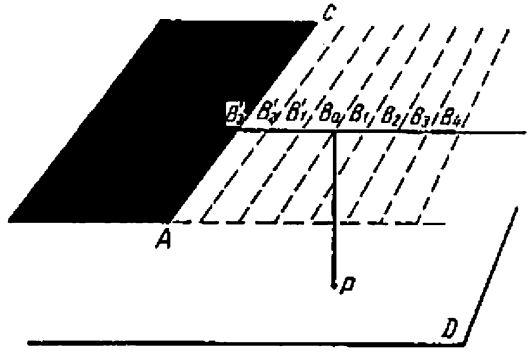

Fig. 76. Esquema del experimento para observar la difracción producida por el semiplano AC.

Tracemos una serie de zonas, en forma de franjas de igual anchura dispuestas simétricamente a derecha e izquierda del punto B_0, tan estrechas que las vibraciones que llegan al punto P procedentes de dos zonas contiguas sólo tengan una pequeña diferencia de fase. Para hallar la amplitud de la vibración resultante en el punto P emplearemos el método gráfico de la suma de los vectores amplitud (§ 267). El vector amplitud Δa_1, de las vibraciones que llegan al punto P procedentes de la primera zona B_0B_1, lo trazaremos en la gráfica (fig. 77) a lo largo del eje OX, hacia la derecha. El vector amplitud de las vibraciones procedentes de la segunda zona B_1B_2 será algo más corto y tendrá cierto retraso de fase. Por esto lo representaremos con la flecha Δa_2. De la misma manera el vector amplitud de las vibraciones procedentes de la tercera zona vendrá representado por la flecha Δa_3 y así sucesivamente. En nuestro caso el frente de onda se extiende por la derecha hasta el infinito, por lo tanto, el número de zonas que se encuentran a la derecha del punto B_0 será infinitamente grande y los vectores amplitud de las vibraciones procedentes de todas estas zonas formarán una línea

quebrada en forma de espiral OM_1. Las vibraciones que llegan al punto P desde la zona B_0B_1', que se encuentra a la izquierda del punto B_0, coincidirán en fase con la vibración Δa_1. Por esta razón su vector amplitud se representa por la flecha $\Delta a_1'$, trazada en el mismo sentido que el vector Δa_1 (fig. 77). De la misma forma, los vectores amplitud de las vibraciones procedentes de la zonas segunda y tercera de la izquierda se representarán por las flechas $\Delta a_2'$ y $\Delta a_3'$.

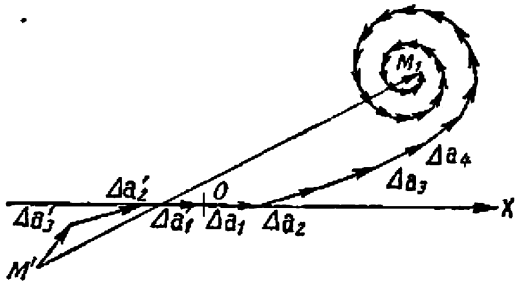

Fig. 77. Suma gráfica de los vectores amplitud de las vibraciones procedentes de las zonas en forma de franjas.

Por la parte izquierda el frente sólo está descubierto parcialmente, por lo tanto, el número de zonas descubiertas a la izquierda es limitado. El vector amplitud $\mathbf{A}_P$ de la vibración resultante en el punto P vendrá dado por la suma:

$$\mathbf{A}_P = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta \mathbf{a}_k + \sum_{k=1}^{n} \Delta \mathbf{a}_k'.$$

En el caso que representa la fig. 76 el número de zonas descubiertas de la izquierda es igual a tres solamente. Por esto el vector amplitud de la vibración resultante en el punto P estará representado por el segmento que une los puntos $M'M_1$ en la fig. 77. La iluminación en el punto P es igual al cuadrado de la longitud de este segmento. El número de zonas descubiertas puede ser diferente, puesto que depende de la posición del punto P. A un frente de onda totalmente descubierto le corresponde un número infinito de zonas descubiertas a la derecha y a la izquierda. El conjunto de los vectores amplitud correspondientes forman en este caso la doble espiral representada en la fig. 78. El cuadrado de la longitud del vector resultante M_2M_1 determina la iluminación que produce un frente descubierto totalmente. Esta misma espiral permite hallar la iluminación de cualquier punto P. Efectivamente, supongamos que el punto P se encuentra en el borde de la sombra geométrica. En este caso todas las zonas de la izquierda estarán cubiertas y todas las de la derecha descubiertas. La vibración resultante en el punto P estará determinada por el segmento MM_1. Si el punto P se

desplaza hacia la derecha del borde de la sombra geométrica, es decir, por la región en que si la luz se propagara en línea recta la iluminación sería uniforme, el número de zonas descubiertas a la izquierda comienza a aumentar. A esto le corresponderá en la fig. 78 un desplazamiento del punto M hacia la izquierda, siguiendo la línea espiral. La iluminación alcanzará un máximo en un punto P al que corresponde el vector resultante $M'M_1$. Si el punto P continúa desplazándose, la longitud del vector resultante aumentará

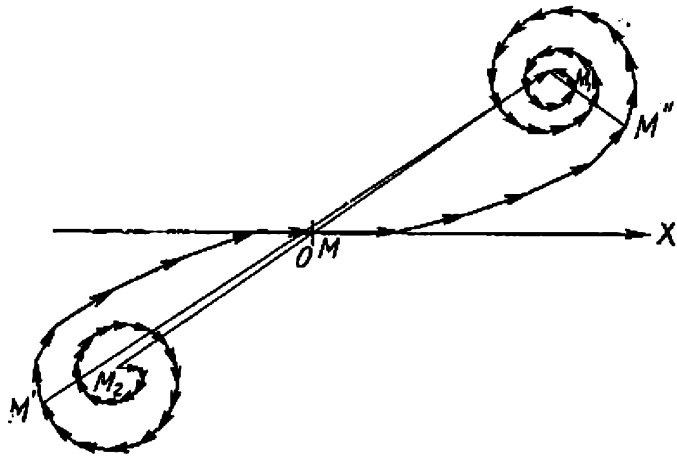

Fig. 78. Suma gráfica de los vectores amplitud: el vector resultante representa la amplitud de la vibración correspondiente al frente de onda totalmente descubierto

unas veces y disminuirá otras, ya que el punto M' avanzará siguiendo las espiras de la parte izquierda de la doble espiral. De esta forma vemos que en la región situada fuera de la sombra geométrica, en lugar de una iluminación homogénea se observan franjas alternativas más claras y más oscuras.

Con relación a los puntos P situados en la región de la sombra geométrica, todas las zonas de la izquierda y parte de las de la derecha se encuentran cubiertas. Cuanto más metido en la región de la sombra se encuentra el punto P tanto mayor será el número de zonas cubiertas. Al avance en la región de la sombra le corresponde en la fig. 78 un desplazamiento del punto M hacia la derecha, siguiendo la línea espiral; este desplazamiento hace que la longitud del vector resultante $M''M_1$ disminuya continuamonte. Por consiguiente, en la región de la sombra geométrica tiene lugar una disminución continua de la iluminación.

Para que el cálculo de la iluminación sea exacto hay que tomar zonas infinitamente estrechas. Entonces la línea quebrada de la fig. 78 se convierte en una doble espiral curvilínea llamada espiral

Cornu. El aspecto de esta espiral puede verse en la fig. 79. Para su construcción se ha empleado una escala en que se toma como unidad

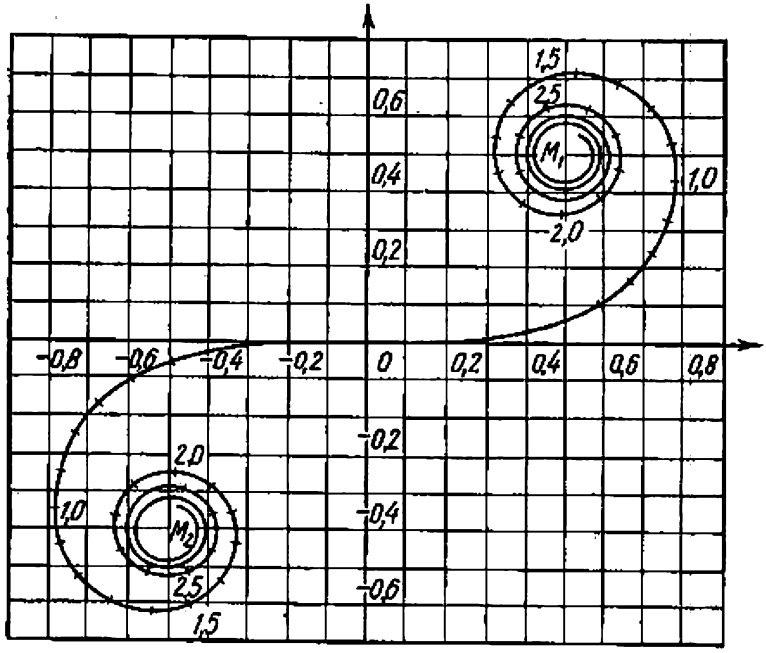

Fig. 79. Espiral Cornu.

la iluminación que produce un frente de onda totalmente descubierto. Las cifras a lo largo de la curva expresan el valor del pará-

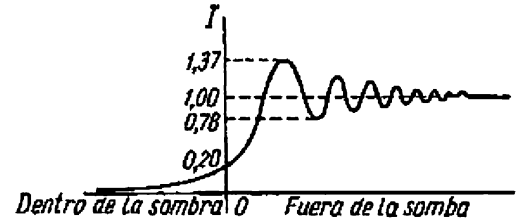

Fig. 80. Distribución de la iluminación junto al borde de la sombra geométrica producida por el semiplano.

metro $v = x\sqrt{\frac{2}{b\lambda}}$, donde x es la distancia contada a partir de la sombra geométrica, b es la distancia desde la pantalla hasta la superficie en que se observa la figura de difracción, y λ es la longitud de onda.

En la fig. 80 se da la distribución de la iluminación, junto al borde de la sombra geométrica producida por el semiplano, calcu-

lada por medio de la espiral Cornu. El punto O corresponde al borde de la sombra geométrica. Como unidad se toma la iluminación producida por el frente de onda totalmente descubierto. Como puede verse, junto al mismo borde de la sombra geométrica la iluminación es igual a 0,2, y después va disminuyendo suavemente, al adentrarse en la sombra, hasta llegar a cero. Por el lado contrario se encuentra una serie de máximos, en el primero de los cuales la iluminación alcanza a 1,37. Al irse alejando del borde de la sombra los máximos se hallan más próximos unos a otros y se hacen menos marcados.

Ejemplo. La difracción por el borde de una pantalla se observa con luz roja de longitud de onda $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ cm. La observación se hace a una distancia de 1 m 20 cm de dicha pantalla. Determinar por medio de la espiral Cornu (fig. 79) las posiciones que ocupan las cuatro primeras franjas brillantes.

Solución. Aplicando la relación, citada en el texto, que existe entre la coordenada x, indicadora de la posición del punto de observación respecto al borde de la sombra geométrica, y el parámetro v, tenemos para este caso concreto que

$$x = v\sqrt{\frac{b\lambda}{2}} = v\sqrt{\frac{120 \cdot 6 \cdot 10^{-5}}{2}}\ \text{cm} = 0{,}06\, v\ \text{cm}. \qquad (3)$$

En la fig. 79 vemos que a los primeros cuatro máximos les corresponden aproximadamente los valores del parámetro $v = 1{,}2$; 2,35; 3,1 y 3,7; de donde, de acuerdo con (3), obtenemos que los cuatro primeros máximos se encontrarán respectivamente a las distancias de 0,08; 0,14; 0,19 y 0,22 cm del borde de la sombra geométrica.

§ 269. Difracción de rayos paralelos. Los fenómenos de difracción que hemos estudiado hasta ahora se observan sin necesidad de

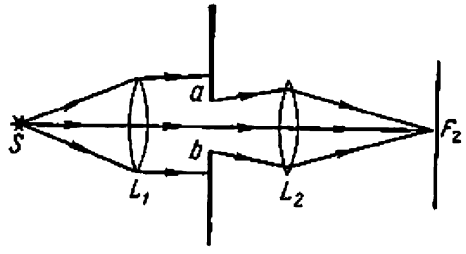

Fig. 81. Esquema para observar la difracción de rayos paralelos.

aparatos ópticos: en el camino que sigue el frente de la onda luminosa se interpone sólamente una pantalla opaca que cubre parcialmente dicho frente. Pero Fraunhofer propuso un nuevo procedimiento para observar los fenómenos de la difracción. Este procedimiento consiste en observar la figura que se produce en el plano focal principal de una lente que concentra ondas luminosas planas, cubiertas parcialmente por una pantalla opaca. El esquema que se emplea para observar la *difracción de Fraunhofer* es el que repro-

duce la fig. 81. El foco puntual de luz S se encuentra en el plano focal principal de la lente L_1. De esta lente sale un haz de rayos paralelos en cuyo camino se interpone una pantalla opaca en la que hay un orificio ab. Esta pantalla cubre parcialmente el haz de rayos luminosos, el cual incide después sobre una segunda lente L_2. Si la luz se propagara en línea recta los rayos, después de pasar por el orificio ab, seguirían formando un haz paralelo y serían recogidos por la segunda lente L_2 en un punto que coincidiría con su plano focal principal (considerando que ambas lentes son ideales). Pero en realidad, en el plano focal F_2 de la lente L_2 se observa una figura de difracción cuya forma depende de la forma y dimensiones que tenga el orificio de la pantalla y de la longitud de la onda incidente.

Los fenómenos de difracción de Fraunhofer también pueden estudiarse por el método gráfico de composición de las vibraciones procedentes de distintas zonas de un frente de onda. Examinemos algunos casos particulares de difracción de Fraunhofer.

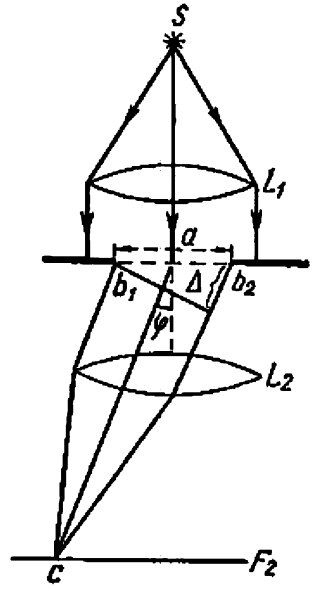

Fig. 82. Difracción por una rendija.

1. Difracción por una rendija. Supongamos que sobre la rendija b_1b_2, cuya anchura es a (fig. 82), incide un haz de rayos paralelos. Consideremos que esta rendija se prolonga indefinidamente en la dirección perpendicular al plano del dibujo. Detrás de la rendija hay una lente L_2 que concentra los rayos en el plano focal principal. Cuando el foco S es una línea luminosa paralela a los bordes de la rendija b_1b_2, si la luz se propagara en línea recta obtendríamos una franja luminosa infinitamente estrecha en el plano focal de la lente L_2. Pero en realidad cada uno de los puntos del frente de onda, al llegar a la rendija, se convierte en una fuente de vibraciones que se propagan en todos los sentidos. Los rayos que forman un ángulo φ con la dirección primitiva se encuentran en el punto C del plano focal de la lente L_2. Para poder calcular la amplitud de las vibraciones en el punto C, dividamos el frente de onda en zonas, en forma de franjas estrechas de igual anchura, paralelas a los bordes de la rendija. Supongamos que las vibraciones procedentes de cada zona se representan por el vector amplitud Δa_i. Entonces el vector amplitud de la vibración resultante en el punto C será:

$$A_\varphi = \sum \Delta a_i.$$

Gráficamente este vector amplitud de la vibración resultante A_φ estará representado por el segmento que une los puntos inicial y final de la línea quebrada formada por los vectores Δa_i (fig. 83). Supongamos que la fase inicial de las vibraciones que llegan al punto C procedentes de la zona extrema izquierda (rayo b_1C de la fig. 82) es igual a cero, y calculemos la fase inicial de las vibraciones que llegan a este mismo punto procedentes de la zona extrema derecha (rayo b_2C). Para esto tendremos que hallar la diferencia de marcha Δ entre los rayos b_2C y b_1C. Por la fig. 82 tenemos:

$$\Delta = a \operatorname{sen} \varphi,$$

siendo a la anchura de la rendija. Como entre la fase inicial δ y la diferencia de marcha (véase el § 109 del t. I) existe la correlación

$$\sigma = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda},$$

donde λ es la longitud de onda, tenemos que

$$\delta = 2 \frac{\pi a \operatorname{sen} \varphi}{\lambda}. \qquad (1)$$

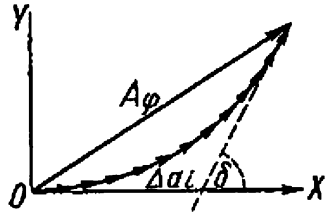

Fig. 83. Suma gráfica de los vectores amplitud de las vibraciones procedentes de una rendija.

En la fig. 83 esta fase inicial de las vibraciones procedentes de la zona extrema derecha está representada por el ángulo δ que forma la dirección del último vector Δa_i con el eje OX. Y como hemos considerado que la fase inicial de las vibraciones procedentes de la zona extrema izquierda es igual a cero, δ nos da la *diferencia* de fase de las vibraciones que llegan al punto C procedentes de las zonas extremas.

La amplitud de la vibración resultante en el punto C viene representada por la longitud del segmento A_φ que une los extremos de la línea quebrada formada por los vectores Δa_i.

En el § 266 y siguientes, al sumar la acción de las diferentes zonas consideramos que las amplitudes de las vibraciones procedentes de dichas zonas dependen del ángulo que forma la dirección en que se propaga la vibración con la perpendicular a la zona correspondiente. Por consiguiente, en nuestro caso la amplitud de las vibraciones Δa_i deberá depender del ángulo φ. Pero si nos limitamos a operar con ángulos φ pequeños podemos despreciar esta dependencia y considerar que todas las vibraciones tienen igual amplitud Δa_i. En estas condiciones tampoco dependerá del ángulo φ la longitud total de la línea quebrada que forman todos los vectores Δa_i. La variación del valor del ángulo φ (y, por consiguiente, la variación del valor de la diferencia de fase δ) solamente influirá en el grado de torcimiento de la línea quebrada. El aspecto que

toma esta línea quebrada para distintos valores de la diferencia de fase δ se muestra en la fig. 84.

Al valor del ángulo $\varphi = 0$ le corresponde $\delta = 0$, lo que indica que todos los vectores Δa_i están dirigidos en el mismo sentido (fig. 84, *a*). En este caso la amplitud de la vibración resultante $A_0 = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \ldots$, etc. toma el valor máximo posible. Por lo tanto, *en el centro de la figura se obtiene la iluminación máxima.*

Cuando $\delta = 2\pi$ la línea quebrada que forman los vectores Δa_i se cierra (fig. 84, *b*). A este caso le corresponde $A_\varphi = 0$, es decir,

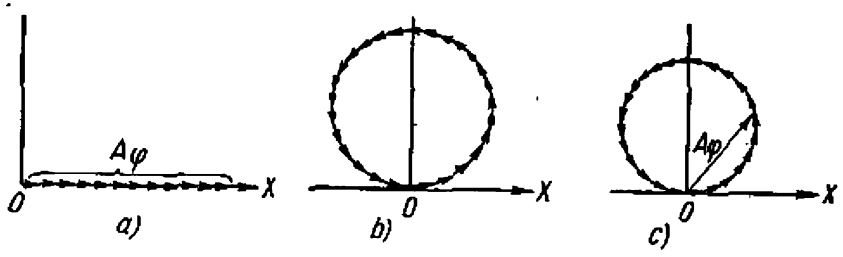

Fig. 84. Sumas gráficas de los vectores amplitud correspondientes a distintos valores del ángulo φ: *a*) $\delta = 0$, *b*) $\delta = 2\pi$, *c*) $\delta = \frac{9}{4}\pi$.

el valor mínimo de la iluminación, igual a cero. La posición de este mínimo se determina, según (1), por el valor del ángulo φ que satisface la condición $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\lambda}{a}$. Es evidente que un mínimo igual se encontrará al otro lado del máximo central, cuando $\operatorname{sen}\varphi = -\frac{\lambda}{a}$.

Si la diferencia de fase δ sigue aumentando la línea quebrada se superpondrá parcialmente a sí misma (fig. 84, *c*). La amplitud resultante A_φ será igual a cero cada vez que $\delta = \pm 2k\pi$, donde k es un número entero. Estos valores de $A_\varphi = 0$ son mínimos. Entre cada dos mínimos contiguos se encuentran máximos relativos.

Cuando se trata de obtener una expresión cuantitativa de la iluminación, dentro de los límites de la figura de difracción por una sola rendija, hay que tomar zonas infinitamente estrechas. Entonces la línea quebrada de la fig. 83 pasa a ser la parte del arco de circunferencia *OB* (fig. 85). El valor de la amplitud resultante *A* viene representada por la cuerda que une los extremos del arco *OB*. Como ya dijimos, cuando los ángulos φ son pequeños, la longitud del arco *OB* puede considerarse independiente de φ. Llamemos *R* al radio de la circunferencia a que pertenece el arco *OB*, entonces

$$A_\varphi = 2R \operatorname{sen} \frac{\angle OCB}{2},$$

pero el $\angle OCB = \delta$, de donde

$$A_\varphi = 2R \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}. \qquad (2)$$

El valor del radio R podemos representarlo por medio de la longitud del arco $\overset{\smile}{OB}$:

$$R = \frac{\overset{\smile}{OB}}{\angle OCB} = \frac{\overset{\smile}{OB}}{\delta}.$$

Poniendo este valor de R en (2), obtenemos:

$$A_\varphi = \overset{\smile}{OB} \frac{\operatorname{sen} \delta/2}{\delta/2}. \qquad (3)$$

Cuando $\varphi = 0$ también $\delta = 0$, de donde $A_0 = \overset{\smile}{OB}$, es decir, la longitud del arco da la amplitud de la vibración en el máximo central. Introduciendo este valor de $\overset{\smile}{OB}$ en (3) y designando $\delta/2$ por medio de u, hallamos

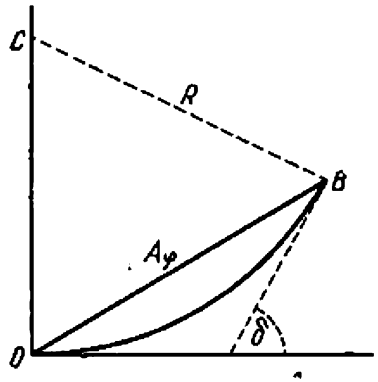

Fig. 85. Determinación gráfica de la amplitud A_φ.

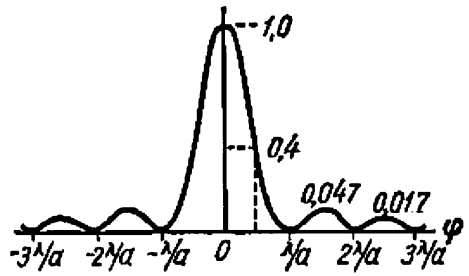

Fig. 86. Curva de la distribución de la intensidad en la figura de difracción producida por una rendija.

$$A_\varphi = A_0 \frac{\operatorname{sen} u}{u}.$$

La iluminación en el plano focal de la lente L_2 (véase la fig. 82) se determina por el cuadrado de la amplitud, por lo tanto

$$I_\varphi = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}, \qquad (4)$$

donde, de acuerdo con (1),

$$u = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi a \operatorname{sen} \varphi}{\lambda}. \qquad (5)$$

Es decir, la distribución de la iluminación en el plano focal de la lente L_2 viene dada por las variaciones de la función $\frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}$. Esta distribución se representa en la fig. 86. La posición de los mínimos,

iguales a cero, se determina por los valores de $u = \pm k\pi$, donde $k = 1, 2, 3, \ldots$ o de acuerdo con la correlación (5), por los valores del ángulo φ que cumplen la condición

$$\operatorname{sen} \varphi = \pm k \frac{\lambda}{a}. \qquad (6)$$

La franja brillante central ocupa la región que hay entre los mínimos derecho e izquierdo más próximos, es decir, la región que se encuentra, según (6), entre $\varphi = -\frac{\lambda}{a}$ y $\varphi = +\frac{\lambda}{a}$. Por lo tanto, *la franja brillante central será tanto más ancha cuanto mayor sea la longitud de onda λ y menor la anchura de la rendija a.* De la misma forma los máximos secundarios se encontrarán tanto más lejos unos de otros cuanto mayor sea el cociente $\frac{\lambda}{a}$.

Conviene señalar por su importancia el hecho de que dentro de los límites de la propia franja central la iluminación disminuye con bastante rapidez del centro a los extremos. Cuando $\varphi = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{a}$ la iluminación es igual a 0,4 de la máxima.

Resumiendo podemos decir, que la figura de difracción de Fraunhofer que produce una sola rendija tiene el siguiente aspecto: en el centro hay una franja brillante con un máximo de iluminación; a los lados, unos máximos secundarios relativamente débiles separados entre sí por mínimos en los cuales la iluminación es igual a cero. La figura en su conjunto es tanto más ancha cuanto mayor es la longitud de onda y menor la anchura de la rendija.

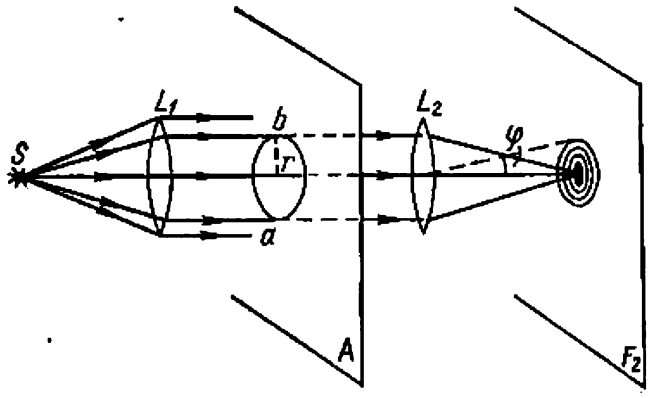

Fig. 87. Esquema del experimento para observar la difracción de los rayos paralelos por un orificio circular.

2. Difracción por un orificio circular. Si la luz se propagara en línea recta, un haz de rayos paralelos que pasase por el orificio circular *ab* practicado en la pantalla opaca *A* (fig. 87) y después

por la lente L_2, debería concentrarse en un punto en el plano focal F_2 de esta lente. Pero debido a la naturaleza ondulatoria de la luz, en el plano focal principal F_2 se obtiene una figura compleja de difracción. La forma de esta figura también puede determinarse componiendo las acciones de las distintas zonas. Tomando zonas anulares puede verse fácilmente que en el punto central se suman las acciones de todas las zonas produciéndose el máximo principal. En cuanto a los rayos oblicuos, razonando análogamente a como lo hicimos al estudiar la difracción de Fresnel por un orificio circular, podemos llegar a la conclusión de que producen anillos claros y oscuros alternativamente. Los cálculos correspondientes demuestran que el primer anillo oscuro se obtiene cuando el ángulo φ satisface la correlación

$$\operatorname{sen} \varphi = 0{,}61 \frac{\lambda}{r}, \qquad (7)$$

donde r es el radio del orificio. El segundo anillo oscuro se encuentra allí donde el ángulo φ cumple la condición $\operatorname{sen} \varphi = 1{,}116 \frac{\lambda}{r}$, y así sucesivamente. En los mínimos la iluminación es igual a cero. Entre los anillos oscuros contiguos hay otros más claros, pero mucho más débiles que la mancha brillante central. Si tomamos como unidad la iluminación del máximo central, la iluminación máxima en el primer anillo claro será igual a 0,0174, y en el segundo a 0,0041. Cerca del 84% de la cantidad total de luz que pasa por el orificio circular de la pantalla A va a parar a la región de la mancha brillante central. El aspecto general de la figura de difracción de Fraunhofer producida por un orificio circular se representa en la fig. 88, *a*, y en la fig. 88, *b* se da la curva de distribución de la iluminación en esta figura a lo largo de la línea punteada OO' que pasa por su centro.

Cuando al ángulo φ es pequeño, según la fórmula (7), el radio angular $\Delta\varphi$ del primer anillo oscuro será igual aproximadamente a

$$\Delta\varphi = 0{,}61 \frac{\lambda}{r} = 1{,}22 \frac{\lambda}{d}, \qquad (7a)$$

donde d es el diámetro del orificio. Dentro de este anillo se encuentra la mancha brillante central. *Las dimensiones de la mancha brillante central son tanto mayores cuanto mayor es el cociente* λ/d, es decir, *cuanto mayor es la longitud de onda* λ *y menor el diámetro del orificio* d. Las dimensiones lineales del radio del primer anillo oscuro, aproximadamente, son:

$$\Delta l = \Delta\varphi \cdot F = 1{,}22 \frac{\lambda}{d} F,$$

donde F es la distancia focal principal de la lente L_2. La iluminación disminuye monótonamente desde el centro de la figura de

difracción hasta el lugar en que se halla el primer anillo oscuro (fig. 88, *b*). Pero cuando la observación se hace a simple vista, por contraste, la mancha brillante central parece menor y su «diámetro»

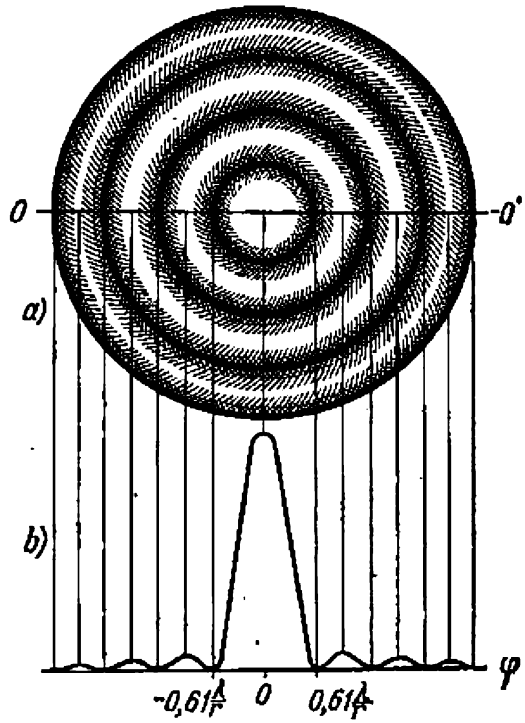

Fig. 88. Difracción por un orificio circular: *a*, aspecto general de la figura de difracción; *b*, curva de la distribución de la iluminación.

puede considerarse aproximadamente igual al radio del primer anillo oscuro, es decir, igual a $1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{d} F$. Por ejemplo, si el orificio tiene un diámetro $d = 0{,}5$ mm y la distancia focal principal de la lente $F = 100$ cm, con la luz visible cuya longitud de onda $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm, obtendremos como dimensión de la mancha brillante central

$$\Delta l = 1{,}22 \frac{5 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^{-2}} \cdot 10^2 \text{ cm} = 0{,}122 \text{ cm}.$$

§ 270. Difracción por varias rendijas. Redes de difracción. En el § 269 estudiamos la difracción de los rayos paralelos por una rendija. Examinemos ahora el caso de varias rendijas paralelas de igual anchura a_0 y situadas entre sí a iguales distancias a_1. La figura de difracción, lo mismo que en el caso anterior, la obtendre-

mos en el plano focal principal de una lente L. Para simplificar consideremos que el haz de rayos coherentes incide perpendicularmente sobre el plano en que se encuentran las rendijas (fig. 89).

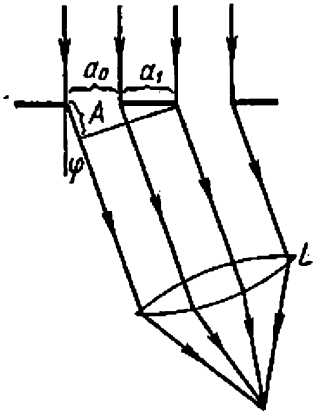

Fig. 89. Red de difracción.

El fenómeno se complica ahora por el hecho de que, además de la *difracción* que produce cada rendija, tiene lugar la composición de las vibraciones de los haces luminosos que llegan al plano focal de la lente L procedentes de cada una de las rendijas, es decir, se produce la *interferencia de varios haces*. Si el número total de rendijas es igual a N, interferirán entre sí N haces.

Estudiemos primeramente el problema de la interferencia de N haces, para lo cual los elegiremos de forma que se propaguen formando un mismo ángulo φ con la perpendicular al plano en que se encuentran las rendijas. En este caso la amplitud de las vibraciones será igual en todos los haces (para un ángulo φ dado); llamemos a al valor de esta amplitud. La diferencia de marcha Δ entre los haces procedentes de dos rendijas contiguas, como puede verse en la fig. 89, será

$$\Delta = (a_0 + a_1) \operatorname{sen} \varphi. \tag{1}$$

Llamando b a la suma $a_0 + a_1$, la fórmula (1) tomará la forma

$$\Delta = b \operatorname{sen} \varphi. \tag{1a}$$

A esta diferencia de marcha le corresponde una diferencia de fase δ igual entre los haces contiguos

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}. \tag{2}$$

Como resultado de la interferencia de las vibraciones, en el plano focal de la lente se produce una vibración resultante cuya amplitud A dependerá de la diferencia de fases δ y, por consiguiente, del ángulo de difracción φ.

Para hallar esta amplitud resultante A aplicaremos el método gráfico de componer amplitudes. Gráficamente A estará representada por el vector que une los extremos de la línea quebrada que forman los vectores amplitud a.

Es evidente que el vector A alcanzará una longitud máxima en todos aquellos casos en que los vectores a se encuentren situados

a lo largo de una línea recta (fig. 90, *a*). Esto ocurre cuando

$$\delta = \pm 2k\pi. \qquad (3)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots$ En estas condiciones la longitud del vector A será $A = Na$. De aquí se deduce que, cuando $\delta = 2k\pi$, la iluminación en el plano focal de la lente L alcanza sus valores máximos

$$I_{máx} = cN^2a^2, \qquad (4)$$

donde c es un coeficiente de proporcionalidad.

El vector A se hará igual a cero cada vez que la quebrada que forman los vectores a se convierta en una línea cerrada (fig. 90, *b*), es decir, cuando el último de los vectores a tenga la misma dirección que el primero. Como quiera que el último de los vectores a forma con el eje OX un ángulo $N\delta$, será paralelo a este eje cuando $N\delta = \pm 2k\pi$, donde $k = 1, 2, \ldots$ De esta forma obtenemos la condición para que se formen mínimos:

$$\delta = \pm 2k\frac{\pi}{N}. \qquad (5)$$

En los mínimos la iluminación es igual a cero:

$$I_{mín} = 0. \qquad (6)$$

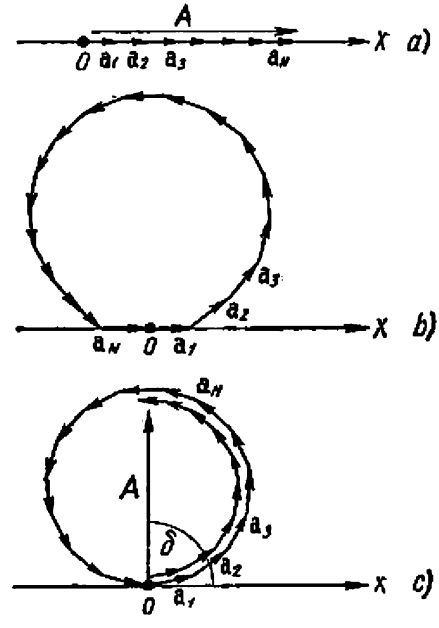

Fig. 90. Suma de los vectores amplitud.

Se forman mínimos cuando δ cumple la condición (5), a excepción de los casos en que $k = 0, N, 2N, 3N, \ldots$, ya que entonces la condición (5) se transforma en la condición de los máximos (3). De lo dicho se desprende que los mínimos $I_{mín} = 0$ se encuentran $(N - 1)$ veces con más frecuencia que los máximos $I_{máx} = cN^2a^2$ que determina la condición (3). Es evidente que entre cada dos mínimos contiguos deberá producirse otro máximo. Estos máximos surgen cuando la línea quebrada que forman los vectores a, superponiéndose parcialmente, no se cierra, es decir, cuando el último de los vectores a no se une con el primero (fig. 90, *c*). Puede demostrarse que estos máximos son considerablemente más débiles que los que hemos visto antes. Por esta razón se llaman *máximos secundarios*, mientras que los máximos que se producen cumpliendo la condición (3) se llaman *máximos principales*. El más intenso de los

máximos secundarios no sobrepasa (cuando N es grande) de 1/23 del valor de los máximos principales.

En definitiva tenemos: cuando interfieren N haces de igual amplitud *se produce una serie de máximos principales iguales en intensidad* $I_{máx} = cN^2a^2$; *entre los máximos principales contiguos se encuentran* $N - 1$ *mínimos* $I_{mín} = 0$; *además de estos mínimos, entre los máximos principales contiguos se encuentran* $N - 2$ *máximos secundarios.* La distribución de la iluminación en el plano focal de la lente L, como función de la diferencia de fases δ, se muestra en la fig. 91 para los casos de dos, tres, cuatro y cinco haces interferentes. Como puede verse, al aumentar el número de haces interferentes los máximos principales son más claros y entre ellos se encuentra un número cada vez mayor de máximos secundarios.

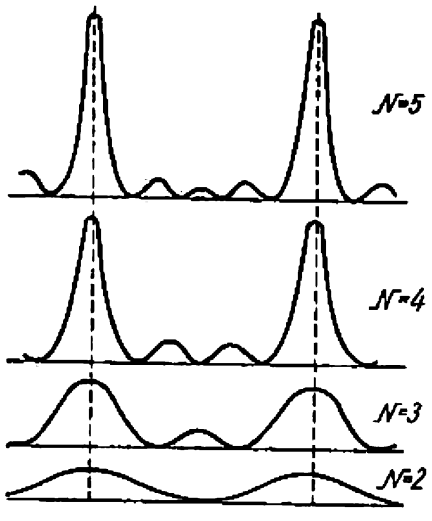

Fig. 91. Distribución de la intensidad cuando interfieren muchos haces.

Teniendo en cuenta la relación que existe entre la diferencia de fases δ y la diferencia de marcha Δ [fórmula (2)] y la expresión (1a), obtenemos que los máximos principales aparecen cuando el ángulo φ toma valores que satisfacen la condición

$$\operatorname{sen}\varphi = \pm k\frac{\lambda}{b}, \tag{7}$$

donde $k = 1, 2, 3, \ldots$, y los mínimos, cuando los valores de φ cumplen la condición

$$\operatorname{sen}\varphi = \pm k\frac{\lambda}{bN}; \tag{8}$$

donde $k = 1, 2, 3, \ldots$, a excepción de $k = N, 2N, 3N$, etc. Si se tiene en cuenta solamente la interferencia de los haces procedentes de distintas rendijas, los máximos principales deberían tener, como hemos dicho, igual intensidad. Pero en realidad, como los rayos que se difractan en cada rendija forman distintos ángulos φ y producen en el plano focal de la lente L vibraciones de diferentes amplitudes, la magnitud de los máximos principales es distinta. Para calcular esta diferencia hay que partir de la figura de difracción por una sola rendija que analizamos en el § 269. Una sola rendija produce en el plano focal de la lente L la distri-

bución de la iluminación I_2 que representa la fig. 92, *b*. El máximo principal se obtiene cuando $\varphi = 0$. Los mínimos $I_{2\,\text{mín}} = 0$ se encuentran allí donde los valores del ángulo φ satisfacen la condición

$$\operatorname{sen} \varphi = \pm k \frac{\lambda}{a_0}, \tag{9}$$

donde a_0 es la anchura de la rendija y $k = 1, 2, 3, \ldots$. Entre los mínimos se hallan los máximos secundarios, de los cuales el de mayor intensidad es igual aproximadamente a 1/23 del máximo

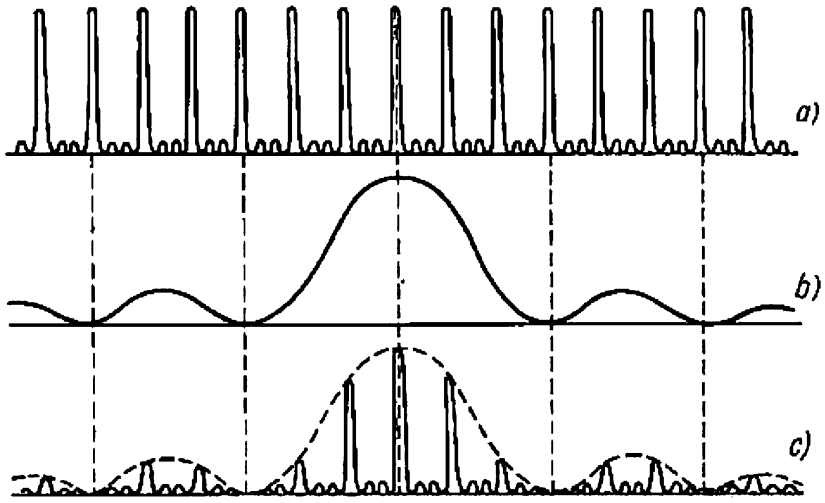

Fig. 92. Situación de los máximos en la figura de difracción por cuatro rendijas: *a*, máximos producidos por la interferencia de los cuatro haces; *b*, distribución de la iluminación en la figura de difracción por una rendija; *c*, distribución de la iluminación por los máximos.

principal (en la fig. 92, *b* se ha exagerado un poco la magnitud de los máximos secundarios para hacerla más clara).

La distribución real de la iluminación I en el plano focal de la lente L viene expresada por el producto

$$I = I_1 \cdot I_2, \tag{10}$$

representado en la fig. 92, *c*. Como puede verse, únicamente serán intensos aquellos máximos principales $I_{1\,\text{máx}}$ que entran en la región del máximo principal de la figura de difracción $I_{2\,\text{máx}}$. Su número dependerá de la relación que exista entre la magnitud b y la anchura de las rendijas a_0. En efecto, el primer mínimo de la curva I_2 (hacia el lado de los ángulos φ positivos) se encuentra allí donde el valor de $\varphi = \varphi_1$ determinado, según (9), por la igualdad

$$\operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{\lambda}{a_0}.$$

A este mismo valor del ángulo φ_1 le corresponde el máximo principal de la curva I_1 cuando cumple la condición

$$\operatorname{sen} \varphi_1 = k \frac{\lambda}{b}.$$

donde k debe ser un número entero. De la comparación de estas dos igualdades deducimos que k queda determinado por la relación

$$k = \frac{b}{a_0}$$

Por lo tanto, si la relación b/a_0 es igual a un número entero, un máximo principal del orden $k = b/a_0$ coincidirá con un mínimo de la curva I_2 igual a cero y se perderá. Como puede advertirse, esto mismo ocurrirá con todos los máximos principales de los órdenes

$$k = \pm k' \frac{b}{a_0}, \tag{11}$$

donde $k' = 1, 2, 3, \ldots$. Dentro de los límites del máximo principal de la curva I_2 caen $2\frac{b}{a_0} - 1$ máximos principales de la curva I_1. Todos los demás máximos de la curva I_1 van a caer sobre los máximos secundarios de la curva I_2. La fig. 92 se refiere al caso de cuatro rendijas equidistantes en que $\frac{b}{a_0} = 3$. Como $b = a_0 + a_1$, de la igualdad $\frac{b}{a} = 3$ se deduce que los intervalos opacos que hay entre las rendijas son dos veces más anchos que estas últimas.

Una serie de rendijas transparentes separadas entre sí por franjas opacas iguales recibe el nombre de *red de difracción*. La magnitud $b = a_0 + a_1$ se llama *constante de la red*.

Cuando el número de rendijas N es grande los máximos principales son muy nítidos, mientras que los secundarios son débiles. Si la luz tiene una longitud de onda λ determinada (*monocromática*) toda la figura producida por la red de difracción en el plano focal principal de la lente L tiene el aspecto de una serie de franjas brillantes, bastante estrechas, separadas entre sí por intervalos prácticamente negros. Si la red se ilumina con luz blanca, en el centro ($\varphi = 0$) se produce una franja blanca, puesto que cuando $\varphi = 0$ la condición (7) se cumple con cualquier λ. A derecha e izquierda de esta franja central blanca aparecen los máximos correspondientes a las distintas longitudes de onda formando ángulos cuyos valores vienen determinados por la igualdad (7) cuando $k = 1$; estos máximos se confunden unos con otros formando franjas irisadas llamadas *espectros*. En cada uno de los espectros los máximos correspondientes a los rayos violetas son los que se encuentran más próximos a la franja central, mientras que los máximos de los rayos rojos son los que se hallan más alejados de ella. Como consecuencia, cuando $k = 1$ aparecen dos espectros (uno derecho y otro

izquierdo) de primer orden dispuestos con sus extremos violetas hacia la franja central. Análogamente, cuando $k = 2, 3, \ldots$ aparecen espectros de segundo, tercero, etc., órdenes dispuestos simétricamente con relación a la franja central blanca.

Si la red se ilumina con luz que solamente contenga ondas de longitudes determinadas λ_i, se obtienen espectros de rayas de diversos órdenes. En este caso la franja central se produce como resultado de la superposición de los máximos de todas las longitudes de onda λ_i.

En la fig. 93 se representa esquemáticamente la posición de la franja central brillante C y la de los espectros visibles de distintos órdenes, los cuales se señalan con los números romanos *I*, *II*, *III*, . . . Los espectros visibles de segundo y tercer orden se superponen parcialmente. Según la igualdad (7) tenemos que sobre el sitio del máximo de orden k y longitud de onda λ se superpone un máximo del orden k' y longitud de onda λ' que satisface la igualdad

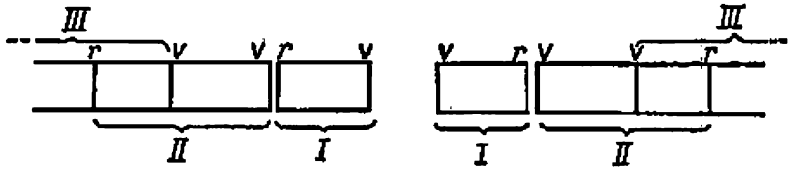

Fig. 93. Posición de los espectros de órdenes diferentes.

$$k\lambda = k'\lambda'. \qquad (12)$$

De la igualdad (12) se deduce, por ejemplo, que sobre cada región del espectro de primer orden ($k = 1$) con longitud de onda λ se superpone una región del espectro de segundo orden ($k' = 2$) con longitud de onda $\lambda' = \frac{1}{2}\lambda$. De la misma forma sobre cada región del espectro de segundo orden se superpone una región del espectro de tercer orden con longitud de onda $\lambda'' = \frac{2}{3}\lambda'$. La distribución de la iluminación por los espectros de distintos órdenes depende de la relación b/a_0 y se determina por la marcha de la curva I_φ. Si, por ejemplo, la anchura de los intervalos opacos que hay entre las rendijas a_1 es igual a la anchura de dichas rendijas a_0 tendremos que $b = 2a_0$ y según la fórmula (11) desaparecen todos los espectros de órdenes pares.

Las redes de difracción fueron empleadas por primera vez en el estudio de los espectros por Fraunhofer en el año 1821. Las primeras redes que él hizo estaban formadas por un gran número de alambritos delgados tensados paralelamente. Los espacios que quedaban entre los alambres hacían el papel de rendijas, cuyo número llegó

a alcanzar hasta 136 por centímetro. Posteriormente Fraunhofer empezó a hacer las redes grabando con un diamante trazos equidistantes sobre una placa de vidrio. Actualmente, además, de este tipo de redes (transparentes), se emplean mucho las *redes reflectoras* que se construyen grabando trazos finos con un diamante sobre la superficie de un espejo metálico o de vidrio. Las propiedades de estas redes dependen en alto grado de la forma y de la profundidad de los trazos grabados con el diamante. En las redes reales la distribución de la iluminación por los distintos órdenes se diferencia mucho de la que obtuvimos al estudiar la red ideal, formada por rendijas de igual anchura separadas por franjas opacas iguales. Recientemente se ha conseguido fabricar redes que solamente producen un espectro claro determinado, por ejemplo, uno de los espectros de primer orden.

§ 271. Dispersión y poder separador de una red de difracción. El espectro producido por una red, lo mismo que el obtenido con cualquier otro instrumento espectral, se caracteriza por las siguientes magnitudes: la dispersión angular y el poder separador.

Se llama *dispersión angular* la magnitud D, igual a la derivada del ángulo de desviación de los rayos φ respecto a la longitud de onda

$$D=\frac{d\varphi}{d\lambda}. \tag{1}$$

Es evidente que las dimensiones angulares $\Delta\varphi$ de la pequeña región del espectro a que corresponde el intervalo de longitudes de onda $\Delta\lambda$ puede representarse aproximadamente de la forma

$$\Delta\varphi = D\cdot\Delta\lambda,$$

de donde se deduce claramente que la dispersión angular caracteriza el grado de alargamiento del espectro en la región próxima a la longitud de onda dada. Derivando la expresión (7) del § 270 obtenemos para la dispersión angular de la red

$$D=\frac{k}{b\cos\varphi}. \tag{2}$$

Como puede verse la dispersión no depende del número de trazos de la red, sino que viene determinada únicamente por su constante b y por el orden del espectro k: cuanto menor sea la constante de la red tanto mayor será su dispersión angular.

Cuando los ángulos φ son pequeños, de acuerdo con (2), aproximadamente:

$$D=\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)_{\varphi\cong 0}=\frac{k}{b}, \tag{2a}$$

es decir, cuando φ se aproxima a cero la dispersión conserva su valor constante: de aquí se deduce que, en estas condiciones, las distancias

angulares entre las rayas espectrales $\Delta\varphi$ serán proporcionales a las diferencias de longitudes de ondas $\Delta\lambda$. El espectro de dispersión constante está uniformemente extendido en todas las regiones, cualesquiera que sean sus longitudes de onda, esto distingue favorablemente este espectro del que se obtiene con los prismas, en el que la parte violeta se extiende mucho más que la roja.

El *poder separador* indica las rayas espectrales, cuyas longitudes de onda se diferencian poco entre sí, que es capaz de separar o resolver la red de difracción. Si la diferencia mínima entre las longitudes de onda de dos rayas contiguas que pueden ser separadas por un instrumento dado es igual a $\delta\lambda$, el poder separador vendrá definido por la magnitud

$$r = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \qquad (3)$$

donde λ es la longitud de onda media de las rayas que se resuelven.

Cada una de las rayas espectrales produce en el espectro de la red un máximo de difracción. Podemos preguntarnos, ¿en qué caso se pueden distinguir aún entre sí dos máximos de difracción correspondientes a las rayas cuyas longitudes de onda son respectivamente λ y $\lambda + \delta\lambda$? En la fig. 94 se representan dos máximos contiguos que se encuentran a diferentes distancias angulares entre sí. La línea punteada da la intensidad resultante de ambos máximos. A medida que disminuye la distancia angular $\Delta\varphi$ la caída de la línea punteada se va haciendo cada vez menor (fig. 94, *c*), hasta que por fin desaparece.

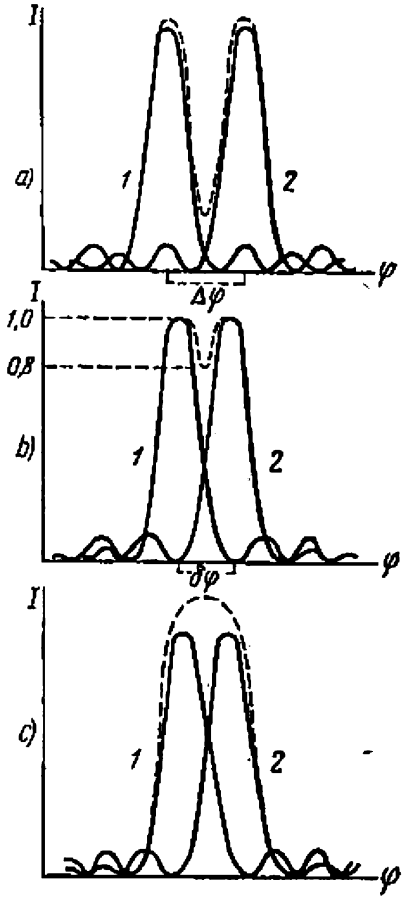

Fig. 94. Condiciones para la separación de dos máximos de difracción.

Rayleigh propuso el criterio práctico siguiente: *dos figuras de difracción pueden considerarse separadas cuando la ordenada del mínimo representa un* 0,8 *de las ordenadas máximas de la curva resultante*. En estas condiciones la caída relativa en el mínimo alcanza un 20%, lo que, por contraste, es percibido por el ojo como un espacio oscuro entre los dos máximos.

Para las curvas representadas en la fig. 94 la caída alcanzará el 20% cuando *el máximo de una de las curvas coincida con el primer mínimo de la otra*. De esta forma, dos rayas espectrales pueden considerarse resueltas cuando la distancia angular $\delta\varphi$ que hay entre ellas sea igual a la distancia angular que hay entre el máximo principal y el mínimo más próximo a él.

Cuando se emplean métodos de observación objetivos (fotográficos o de registro fotoeléctrico) se pueden notar caídas menores del 20% y, por consiguiente, se pueden resolver rayas espectrales cuya diferencia de longitudes de onda $\delta\lambda$ sea menor que la correspondiente al criterio de Rayleigh.

La posición del máximo principal de un orden k se determina por la fórmula (7) del § 270:

$$\operatorname{sen}\varphi = k\frac{\lambda}{b}. \tag{4}$$

El mínimo más próximo a dicho máximo se encuentra, según la fórmula (8) del § 270, allí donde el ángulo $\varphi + \delta\varphi$ satisface la condición

$$\operatorname{sen}(\varphi+\delta\varphi) = k'\frac{\lambda}{bN};$$

donde k' debe considerarse igual a $kN + 1$, siendo N el número total de trazos de la red. Por lo tanto, tenemos que

$$\operatorname{sen}(\varphi+\delta\varphi) = (kN+1)\frac{\lambda}{bN}. \tag{5}$$

Según lo expuesto, la distancia angular entre dos rayas que apenas se distingan separadamente deberá ser igual a $\delta\varphi$. Para hallar $\delta\varphi$, restemos miembro a miembro de la igualdad (5) la igualdad (4). Resultará:

$$\operatorname{sen}(\varphi+\delta\varphi) - \operatorname{sen}\varphi = \frac{\lambda}{bN} \text{ o } 2\operatorname{sen}\frac{\delta\varphi}{2}\cos\frac{2\varphi+\delta\varphi}{2} = \frac{\lambda}{bN}.$$

De donde, teniendo en cuenta que $\delta\varphi$ es una magnitud pequeña, tendremos aproximadamente que

$$\delta\varphi = \frac{\lambda}{Nb\cos\varphi}.$$

A esta distancia angular $\delta\varphi$ le corresponderá una diferencia de longitudes de onda $\delta\lambda$, que podemos hallar aplicando la expresión (2) de la dispersión angular:

$$\delta\lambda = \left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)\delta\varphi = \frac{b\cos\varphi}{k}\frac{\lambda}{Nb\cos\varphi} = \frac{\lambda}{kN}. \tag{6}$$

De la fórmula (6) se deduce que una red de difracción podrá separar rayas espectrales tanto más próximas cuanto mayor sea el número de rendijas N que tenga dicha red y cuanto más alto sea el orden

k del espectro que se observe. Para el poder separador r, según (6), tendremos:

$$r = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN.$$

El poder separador de una red de difracción no depende de la constante b, sino que viene determinado exclusivamente por el número total de rendijas N y por el orden del espectro k.

Para conseguir una gran dispersión angular es necesario que la constante b sea pequeña, es decir, que la red tenga la mayor cantidad de trazos posibles en la unidad de longitud. Para que el poder separador sea grande también debe serlo el número total

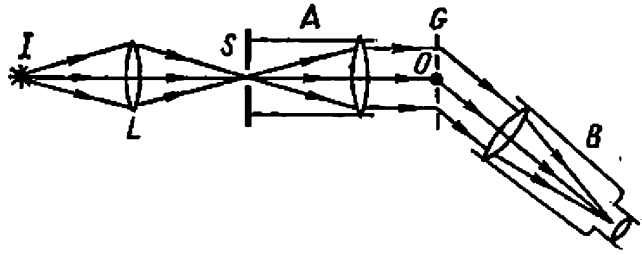

Fig. 95. Esquema de un artificio de difracción con red transparente.

de trazos N. Las redes modernas tienen hasta 1 200 trazos por milímetros, llegando el número total de aquéllos hasta 200 000. Estas redes tienen para el espectro de primer orden un poder separador $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = 200\,000$. Si para obtener el espectro se emplea una red cuyo número de trazos por milímetro sea igual a 1 200, y una lente cuya distancia focal principal $F = 2$ m, la longitud del espectro visible de primer orden será aproximadamente igual a 85 cm.

En la fig. 95 se muestra el esquema de un artificio de difracción muy simple con red transparente donde S es una rendija paralela a los trazos de la red y A es un colimador que proporciona un haz de rayos paralelos. Este haz incide perpendicularmente sobre la red G. La rendija S se ilumina con el foco luminoso I a través de la lente L. El espectro se observa con el anteojo B, que puede girar perpendicularmente al plano del dibujo alrededor del eje O. Este eje pasa por el plano en que se encuentra la red de difracción.

Con la red de difracción se pueden medir las longitudes de las ondas luminosas. De acuerdo con la igualdad (7) del § 270, tenemos

$$\lambda = \frac{b}{k} \operatorname{sen} \varphi. \qquad (7)$$

Midiendo el ángulo φ correspondiente a una raya de un espectro de orden determinado k y conociendo la constante de la red b, pode-

mos hallar la longitud de onda λ de esta raya aplicando la fórmula (7).

Además de las redes reflectoras, que se hacen grabando trazos finos en la superficie de un espejo plano, existen *redes cóncavas*. Estas últimas se hacen grabando en la superficie esférica de un espejo cóncavo trazos finos equidistantes entre sí según sus cuerdas. Las redes cóncavas tienen la propiedad de producir el efecto de enfoque, por lo que pueden utilizarse sin necesidad de lentes, cosa que representa una gran ventaja en comparación con las redes planas. Puede demostrarse que si una rendija S y una red cóncava G (fig. 96) están situadas sobre una circunferencia cuyo diámetro sea igual al radio de curvatura de la red R, el espectro producido estará enfocado sobre esta misma circunferencia.

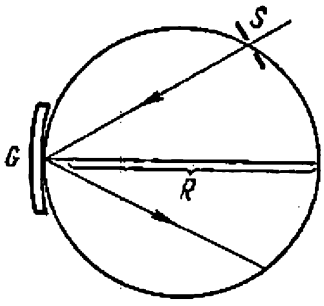

Fig. 96. Red de difracción cóncava.

De la fórmula (4) se deduce que deberá cumplirse la desigualdad $k\frac{\lambda}{b} \leqslant 1$, puesto que el sen φ no puede ser mayor que la unidad. De esta desigualdad obtenemos que la longitud de onda máxima que puede observarse en un espectro de orden k satisfará la desigualdad $\lambda_{max} < \frac{b}{k}$. Para el espectro de primer orden $k = 1$ y la longitud mayor de la onda que se observa, que aún, puede producir un máximo de este orden, deberá ser menor que la constante b de la red (y en el caso en que la luz incida oblicuamente sobre la red $\lambda_{max} < 2b$). Por esta razón las redes que tienen un gran número de trazos por unidad de longitud no sirven para observar los espectros de los rayos infrarrojos. Para estudiar los espectros infrarrojos lejanos se utilizan redes con pocos trazos (2-10) por mm. Estas últimas se denominan redes de escalerilla (échelette). Se hacen sobre la superficie de una lámina de cobre blando aplicando una gran presión sobre el dispositivo grabador de la máquina divisora. Las ranuras así conseguidas tienen forma regular y la superficie forma escalonada. Eligiendo convenientemente la inclinación de los bordes de las ranuras se consigue alcanzar una gran claridad en los espectros de la región infrarroja. Las redes con pocos trazos por unidad de longitud pueden ser útiles también cuando se realizan trabajos en la parte visible del espectro; para esto se pasa a observar los espectros de orden superior (por ejemplo, con $k = 15$ ó $k = 20$).

§ 272. Espectroscopia de gran poder separador. Para resolver muchos problemas relacionados con el estudio de los espectros es

preciso utilizar instrumentos espectrales de gran poder separador. La experiencia demuestra que muchas rayas espectrales tienen estructura, es decir, están formadas por varias componentes muy próximas entre sí, las cuales se caracterizan por tener longitudes de onda λ_i propias. La diferencia de longitudes de onda entre las distintas componentes es tan pequeña que no pueden separarse con los espectrógrafos de prisma ordinarios. También se necesita un gran poder separador para estudiar la influencia que ejerce un campo magnético sobre las rayas espectrales (efecto Zeeman, § 345), para estudiar el contorno de las rayas y para resolver toda una serie de problemas.

Entre los instrumentos espectrales de gran poder separador se encuentran las grandes redes de difracción. Como dijimos en el párrafo anterior, su efecto se basa en el fenómeno de la interferencia de múltiples haces. Existen otros muchos instrumentos especiales en los cuales también se aprovecha la interferencia de muchos haces.

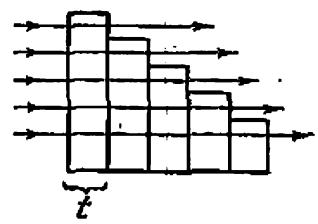

Fig. 97. Retícula de escalones.

En el mismo principio que la red de difracción ordinaria se basa la *retícula de escalones* o «*echelon*» de *Michelson*, que está formado por cierto número de láminas de vidrio de igual espesor acopladas entre sí (fig. 97). Cada lámina es más corta que la anterior, por lo que los haces de luz no atraviesan un número igual de láminas («escalones»). El espesor t de las láminas debe ser igual con una precisión de hasta pequeñas fracciones de longitud de onda. Las láminas se unen entre sí por contacto óptico, es decir, sin que entre ellas se encuentre una capa de aire o de material adhesivo apreciable. En el caso más simple, cuando los rayos de luz inciden perpendicularmente sobre una retícula de escalones, la diferencia de marcha entre los haces contiguos será $\Delta = (n - 1)\, t$, siendo n el índice de refracción del vidrio de que están hechas las láminas. Generalmente el espesor de las láminas t es una magnitud del orden de 1 cm, lo que conduce a órdenes de interferencia k muy grandes. Efectivamente, cuando $t = 1$ cm, $n = 1{,}5$ y $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm, de acuerdo con la correlación que determina los máximos principales:

$$\Delta = (n - 1)\, t = k\lambda,$$

obtenemos para k un valor igual a 10 000. Por lo tanto, la retícula de escalones produce espectros de orden muy elevado. Gracias a esto se puede conseguir un gran poder separador con un número de haces interferentes relativamente pequeño. Las retículas de escalones se hacen generalmente con varias decenas de láminas (30-40).

Otra consecuencia de los altos grados de interferencia es el pequeño valor del intervalo $\Delta\lambda$ libre de la transposición de los espectros. Efectivamente, según la fórmula (12) del § 270, al máximo principal de la longitud de onda λ_1 de orden k se superpone el máximo $k-1$ de la longitud de onda

$$\lambda_2 = \frac{k}{k-1}\lambda_1,$$

de donde obtenemos que $\lambda_1 - \lambda_2 \cong -\frac{\lambda_1}{k}$. Por consiguiente, cuando $k = 10\,000$, la magnitud $|\Delta\lambda| = |\lambda_1 - \lambda_2|$ representará en total 1/10 000 de la longitud de onda λ_1.

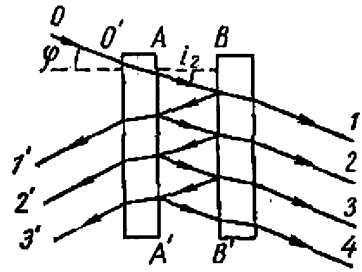

Fig. 98. Esquema del patrón de Fabry y Perot.

El procedimiento más extendido para obtener la interferencia de haces múltiples es el que se basa en la múltiple reflexión de la luz en dos láminas planas y paralelas. Un aparato basado en este principio es el llamado *interferómetro o patrón de Fabry y Perot*.

El patrón de Fabry y Perot consta de dos láminas cuyas superficies AA' y BB' (fig. 98) limitan una capa de aire plana de caras paralelas. Estas superficies AA' y BB' están recubiertas de unas películas especulares semitransparentes de metal. El haz de luz OO' que llega al patrón sufre una reflexión múltiple en las superficies especulares AA' y BB' y forma un sistema de haces emergentes *1*, *2*, *3*, . . . y otro igual de haces reflejados *1'*, *2'*, *3'*, . . . Los haces de rayos de cada sistema son coherentes y se diferencian entre sí por una diferencia de marcha Δ constante. En adelante tendremos en cuenta únicamente los haces *1*, *2*, *3*, . . ., que emergen hacia adelante.

Para que la diferencia de marcha Δ se conserve rigurosamente constante, las superficies opuestas AA' y BB' deberán ser planas con una exactitud de hasta una pequeña fracción de longitud de onda y paralelas entre sí con esta misma precisión. Las otras dos superficies del patrón también se hacen planas, pero deben formar entre sí un ángulo pequeño para evitar la formación de un segundo sistema de franjas de interferencia que podría superponerse al primero. Las láminas del patrón se colocan entre sí a una distancia t determinada, para lo cual suelen apretarse por ambos lados contra un anillo de cuarzo fundido o de invar. Se toman estos materiales porque su coeficiente de dilatación térmica es muy pequeño. También se fabrican aparatos (llamados en este caso interferómetros de Fabry y Perot) en los cuales se puede variar suavemente la distan-

cia t que separa las láminas. Para conseguir esto, una de las láminas es fija, mientras que la otra va montada sobre un carro y puede desplazarse con un tornillo a lo largo de unas guías.

El patrón de Fabry y Perot produce curvas de igual inclinación (§ 262). Debido a que interfiere muchos haces, cuando la luz es monocromática se producen unos estrechos anillos brillantes separados entre sí por espacios obscuros (fig. 99). Estos anillos son tanto más nítidos cuanto mayor es el número de haces que interfiere.

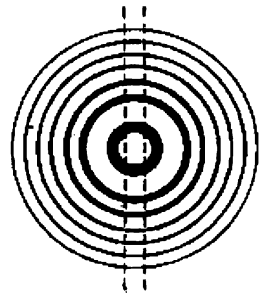

Fig. 99. Aspecto de los anillos de interferencia producidos por el patrón de Fabry y Perot.

La diferencia de marcha entre dos haces contiguos procedentes del patrón es $\Delta = 2t\cos i_2$ (véase el cálculo en el § 262; el índice de refracción del aire que hay entre las láminas del patrón se considera igual a la unidad), donde i_2 es el ángulo de incidencia de los rayos sobre las películas especulares del patrón. Como quiera que las láminas del patrón se aproximan a ser planas y paralelas, el valor del ángulo i_2 se aproximará al valor del ángulo de incidencia de los rayos sobre dicho patrón (fig. 98), que llamaremos φ.

Entonces la condición necesaria para que se formen los máximos principales tomará la forma

$$2t\cos\varphi = k\lambda, \qquad (1)$$

donde k es un número entero.

El orden k de los máximos lo determinamos aplicando la igualdad (1) y suponiendo que, aproximadamente, $\cos\varphi \cong 1$. De esta forma obtenemos que

$$k = \frac{2t}{\lambda}. \qquad (2)$$

Como puede verse, en el caso del patrón, lo mismo que en el de la retícula de escalones y en el de la lámina de Lummer-Gehrke, nos encontramos con máximos de un orden muy elevado. Cuando el espesor del patrón (distancia entre las láminas) $t = 0{,}5$ cm y $\lambda = 5\cdot10^{-5}$ cm tenemos que

$$k = \frac{2\cdot0{,}5}{5\cdot10^{-5}} = 20\,000.$$

Al anillo de longitud de onda λ_1 y de orden k se superpone el de longitud de onda λ_2 de orden $k-1$. Aplicando la fórmula (12) del § 270 obtenemos que esta superposición de anillos tiene lugar cuando se cumple la condición

$$k\lambda_1 = (k-1)\lambda_2,$$

de donde para una diferencia de longitud de onda $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ hallamos

$$\Delta\lambda = -\frac{\lambda_2}{k}.$$

Poniendo aquí en lugar de k su valor según la fórmula (2) y omitiendo el subíndice de λ, obtenemos

$$\Delta\lambda = -\frac{\lambda^2}{2t}. \qquad (3)$$

La magnitud $\Delta\lambda$ representa la diferencia de longitud de onda para la cual a un sistema de anillos de longitud de onda determinada se superpone otro sistema de anillos de otra longitud de onda. Esta magnitud $\Delta\lambda$ se llama «constante» del patrón. La constante $\Delta\lambda$ determina el intervalo de longitudes de onda entre cuyos límites los anillos no se superponen aún. Como vemos por la fórmula (3), esta constante depende del espesor del patrón t: cuanto más grueso es el patrón tanto menor es su constante. Si el patrón tiene un espesor $t = 0{,}5$ cm y $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm obtenemos

$$\Delta\lambda = -\frac{\lambda^2}{2t} = -\frac{(5 \cdot 10^{-5})^2}{2 \cdot 0{,}5} = -2{,}5 \cdot 10^{-9} \text{ cm}.$$

Por consiguiente, en el caso que hemos analizado la constante del patrón $\Delta\lambda = 0{,}25$ Å. Es decir, con este patrón solamente se pueden estudiar, sin que se produzca la transposición de los anillos de distintos órdenes, intervalos del espectro así de estrechos.

Este patrón se utiliza para estudiar la estructura de rayas espectrales aisladas. La raya se aísla del espectro valiéndose de otro aparato espectral cualquiera, por ejemplo, con un espectrógrafo de prisma. El patrón se ilumina con la luz de esta raya. Supongamos, por ejemplo, que sobre el patrón de Fabry y Perot incide luz de dos longitudes de onda muy próximas λ_1 y λ_2. La luz de cada una de estas longitudes de onda produce un sistema de anillos brillantes cuyos radios angulares se diferencian algo entre sí. Como resultado de esto todos los anillos serán dobles. En el § 265 explicamos cómo los patrones de Fabry y Perot se utilizan para fines metrológicos.

§ 273. Difracción por redes espaciales. En el § 270 estudiamos la red de difracción formada por una serie de rendijas paralelas. Cada una de estas rendijas era una fuente de vibraciones que se propagaban formando diferentes ángulos φ. Pero en lugar de estas rendijas pueden considerarse orificios de cualquier forma, por ejemplo, de agujeros redondos pequeños equidistantes entre sí. Los haces de luz procedentes de estos agujeritos, al interferir entre sí, formarán un sistema de máximos, los cuales se situarán a lo largo de curvas determinadas. Finalmente estos orificios pueden sustituirse por una serie de centros de dispersión, por ejemplo, por una serie de esferas

diminutas. Con estos centros de dispersión no sólo se puede conseguir una red plana bidimensional, sino también una red espacial, colocando para ello las esferitas en planos paralelos.

Examinemos previamente una red lineal simple formada por una serie de centros de dispersión idénticos, situados a lo largo de una recta AB a iguales distancias b (fig. 100). Supongamos que sobre esta red incide una serie de rayos paralelos coherentes $O_1, O_2, O_3, \ldots$, que se encuentran en el plano de la figura y que forman un ángulo i con la perpendicular a la red NN'. Bajo la acción de las ondas incidentes los centros de dispersión se convierten en focos de ondas esféricas. De todos los rayos dispersados por los centros en diferentes direcciones tomemos los O_1', O_2', O_3', ... que se encuentran en el plano del dibujo y que forman con la perpendicular NN' un ángulo φ.

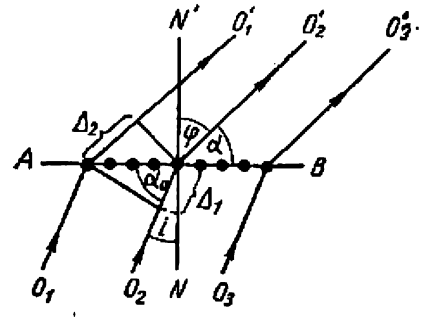

Fig. 100. Difracción por una red lineal.

La diferencia de marcha Δ entre dos rayos contiguos, como puede verse en la fig. 100, será

$$\Delta = \Delta_2 - \Delta_1 = b \operatorname{sen} \varphi - b \operatorname{sen} i.$$

Si en lugar de los ángulos i y φ tomamos los ángulos α_0 y α que forman los rayos con la recta AB, en que se encuentran los centros de dispersión, esta igualdad pasará a tomar la forma

$$\Delta = b(\cos\alpha - \cos\alpha_0). \qquad (1)$$

Y si los rayos O_1', O_2', O_3', ..., se concentran con una lente, en el plano focal de ésta interferirán y producirán máximos principales siempre que la diferencia de marcha Δ sea igual a un número entero de longitudes de onda λ:

$$\Delta = b(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = k\lambda. \qquad (2)$$

El ángulo α tendrá un valor constante para todos aquellos rayos que sigan las direcciones de las generatrices de un cono cuyo eje sea continuación de la recta AB y cuyo ángulo en el vértice sea igual a α (fig. 101). Tomemos aisladamente un haz de rayos dispersos, procedentes de todos los centros de nuestra red lineal y paralelos a una de las generatrices del cono, por ejemplo, a la generatriz que se encuentra en el plano del dibujo. Estos rayos, cuando se cumple la igualdad (2) se refuerzan entre sí en el plano focal principal F de la lente L y producen una mancha brillante P. Los rayos paralelos a las otras generatrices del cono producen también en el plano focal

principal las correspondientes manchas brillantes, las cuales en conjunto dan lugar a la formación de una franja clara $P'PP''$. Para una misma longitud de onda a cada uno de los valores enteros de k le corresponderá, según la fórmula (2), un valor diferente del ángulo α y, por consiguiente, un cono con ángulo de abertura diferente. Como resultado, en el plano focal de la lente se produce el sistema de franjas representado en la fig. 101 con líneas punteadas. Si la lente se encuentra en un plano paralelo a la recta AB, la franja brillante $P'PP''$ será una hipérbola. Cuando el ángulo $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ el valor de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ corresponde a la franja clara de orden nulo ($k = 0$), que tendrá en el plano focal de la lente la forma de una recta. A derecha e izquierda de esta recta se encontrarán las hipérbolas correspondientes a los valores $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ (fig. 102). Si el número de centros de dispersión es grande el de haces interferentes también lo será y las franjas resultarán nítidas.

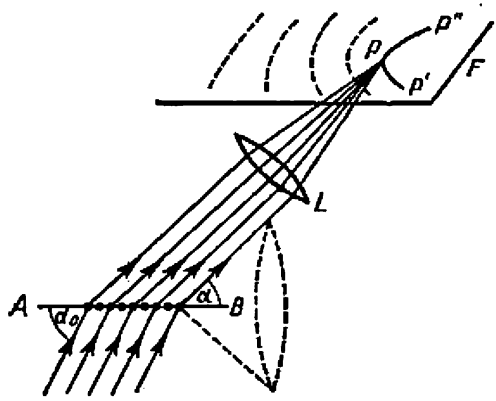

Fig. 101. Franjas brillantes $P'PP''$ que produce la difracción por una red lineal.

Veamos ahora lo que ocurre con una serie de centros de dispersión situados según los nudos de una red bidimensional cuadrada.

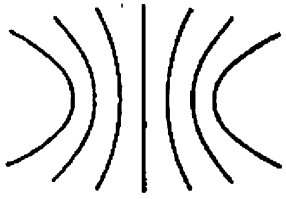

Fig. 102. Hipérbolas que produce la difracción por una red lineal.

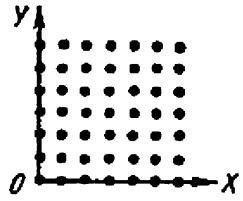

Fig. 103. Red bidimensional.

Tracemos los ejes coordenados OX y OY paralelos a las filas reticulares (fig. 103). Esta *red bidimensional* puede considerarse como la superposición de dos sistemas de redes lineales paralelos a los ejes OX y OY. Supongamos que sobre la red bidimensional incide un haz de rayos paralelos que forma con los ejes OX y OY los ángulos α_0 y β_0 respectivamente. En este caso las ondas dispersadas en los

centros producirán máximos en el plano focal de la lente en aquellas direcciones en que los ángulos α y β satisfagan las condiciones (2):

$$\left.\begin{aligned} b(\cos\alpha - \cos\alpha_0) &= k_1\lambda, \\ b(\cos\beta - \cos\beta_0) &= k_2\lambda, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

donde k_1 y k_2 son números enteros. En el plano focal de la lente, paralelo al plano XOY, a cada una de las condiciones (3) le corresponderá un sistema de hipérbolas (véase la fig. 104, en ella se representan las hipérbolas para el caso en que $\alpha_0 = \beta_0 = \frac{\pi}{2}$). Las dos condiciones (3) se cumplen simultáneamente en los puntos de intersección de las hipérbolas de ambos sistemas. De esta forma, cuando se trata de una red bidimensional y de luz monocromática, los máximos tienen el aspecto de *manchas brillantes aisladas*. Cuando la red bidimensional se ilumina con luz blanca a las diferentes longitudes de onda λ (para unos valores de k_1 y k_2 dados), según (3), les corresponden diferentes valores de α y β, lo que hace que cada mancha se extienda formando un espectro. A distintos valores de los números k_1 y k_2 les corresponden espectros de órdenes diferentes.

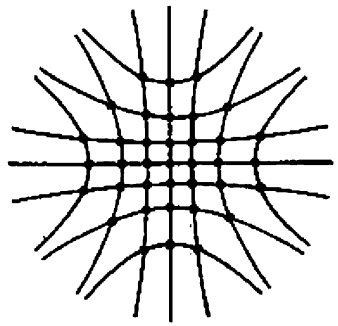

Fig. 104. Sistema de hipérbolas que produce la difracción por una red bidimensional.

Finalmente examinemos una *red espacial* formada por un sistema de centros de dispersión situados en el caso más simple según los nudos de una red cúbica. Esta red puede dividirse en tres sistemas de redes lineales paralelas a los ejes OX, OY y OZ. Los máximos de las vibraciones se obtendrán en las direcciones determinadas por los ángulos α, β y γ que satisfagan simultáneamente las tres condiciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} b(\cos\alpha - \cos\alpha_0) &= k_1\lambda, \\ b(\cos\beta - \cos\beta_0) &= k_2\lambda, \\ b(\cos\gamma - \cos\gamma_0) &= k_3\lambda, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

donde k_1, k_2 y k_3 son números enteros y los ángulos α_0, β_0 y γ_0 son los que caracterizan la dirección en que inciden las ondas.

Como sabemos, los ángulos que forma una dirección cualquiera con los tres ejes de un sistema de coordenadas cartesianas están relacionados entre sí, porque la suma de los cuadrados de sus cosenos es igual a la unidad. Por consiguiente, además de las condiciones (4)

deberán cumplirse las condiciones geométricas:

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\alpha_0+\cos^2\beta_0+\cos^2\gamma_0=1,\\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Pero satisfacer simultáneamente las condiciones (4) y (5) cualquiera que sea el valor de la longitud de onda λ no es posible. Estas condiciones sólo se cumplen simultáneamente para determinados valores de λ. De aquí se deduce que cuando sobre una red espacial incide un haz de rayos coherentes monocromáticos *paralelos* no todas las longitudes de onda producen máximos, sino únicamente algunas perfectamente determinadas. El valor de estas longitudes de onda es fácil de hallar. Para esto escribamos las igualdades (4) de la forma:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha=\cos\alpha_0+k_1\frac{\lambda}{b},\\ \cos\beta=\cos\beta_0+k_2\frac{\lambda}{b},\\ \cos\gamma=\cos\gamma_0+k_3\frac{\lambda}{b}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Elevando al cuadrado las igualdades (6), sumándolas miembro a miembro y teniendo en cuenta las condiciones (5), hallamos:

$$1=1+2\frac{\lambda}{b}(k_1\cos\alpha_0+k_2\cos\beta_0+k_3\cos\gamma_0)+\frac{\lambda^2}{b^2}(k_1^2+k_2^2+k_3^2)$$

de donde la longitud de onda buscada será:

$$\lambda=-2b\frac{k_1\cos\alpha_0+k_2\cos\beta_0+k_3\cos\gamma_0}{k_1^2+k_2^2+k_3^2}. \tag{7}$$

Cuando se conoce la dirección de la onda incidente (dados α_0, β_0 y γ_0) para cada orden de interferencia dado k_1, k_2, k_3, se obtiene según (7) solamente un valor de la longitud de onda λ para el cual la red espacial produce un máximo. La dirección en que se forma este máximo viene determinada por los valores de los ángulos α, β y γ obtenidos de acuerdo con las condiciones (6).

Para ángulos α_0, β_0, y γ_0 determinados, a diferentes números enteros k_1, k_2, k_3, en términos generales, según (7) les corresponderán diferentes valores de λ, es decir, si una longitud de onda λ dada produce un máximo, este máximo será único en una dirección determinada. Pero en algunos casos particulares puede ocurrir que a una misma longitud de onda le correspondan varios máximos de distintos órdenes k_1, k_2, k_3. Efectivamente, supongamos que un haz de rayos paralelos incide perpendicularmente sobre la cara de una red especial cúbica; en este caso, uno de los tres ángulos α_0, β_0 o γ_0 es igual a cero y dos iguales a $\frac{\pi}{2}$. Sea $\alpha_0=0$ y $\beta_0=\gamma_0=\frac{\pi}{2}$; enton-

ces la igualdad (7) tomará la forma:

$$\lambda = -2b\frac{k_1}{k_1^2+k_2^2+k_3^2}.$$

Si esta igualdad se cumple para unos valores determinados de k_1, k_2, y k_3, se cumplirá también para los valores k_1, k_2 y $-k_3$; k_1, $-k_2$ y k_3; k_1, $-k_2$, $-k_3$, es decir, en total para cuatro combinaciones diferentes de k_i. En este caso los rayos de longitud de onda λ producen máximos en cuatro direcciones diferentes.

Evidentemente es difícil seleccionar la longitud de onda λ de manera que cumpla exactamente la igualdad (7). Por esto, para observar la difracción por una red tridimensional se utiliza generalmente la luz blanca. En la luz blanca existen ondas de todas las longitudes posibles y, por consiguiente, entre ellas siempre se encontrarán las longitudes λ_i que pueden satisfacer la igualdad (7) cuando los números enteros k_1, k_2 y k_3 tomen valores diferentes. A cada una de estas longitudes de onda λ_i, según (6), le corresponderán unos valores determinados de α_i, β_i y γ_i, es decir, una dirección en la cual se produce un máximo. En este caso vemos generalmente en el plano focal de la lente una serie de puntos simétricos brillantes. Cada uno de estos puntos tiene su correspondiente longitud de onda λ_i.

Para que una red lineal pueda dar máximos es necesario que $\lambda < 2b$, puesto que en el caso contrario ninguno de los valores de los ángulos α_0 y α podrá satisfacer la igualdad (2). Condiciones análogas deberán cumplirse en las redes bidimensionales y espaciales. Por otra parte, si la constante b de la red es mucho mayor que la longitud de onda solamente se producirán máximos de órdenes k_i bastante altos, lo cual dificulta su observación. De aquí se deduce que la difracción por una red espacial puede observarse prácticamente cuando la constante b de ésta es del orden de varias longitudes de onda. La reproducción artificial de una red de este tipo para luz visible a base de colocar debidamente cualquier clase de partículas dispersoras aisladas es cosa extraordinariamente difícil. Unas condiciones semejantes hasta cierto punto a las que tienen lugar en una red espacial regular son las que se producen en la niebla. Esta última está formada por gotitas minúsculas aisladas. Y aunque estas gotitas estén dispuestas caóticamente, la distancia entre ellas, en la mayoría de los casos, no se diferencia mucho. Por esto, cuando la luz del Sol o de la Luna atraviesa la niebla, en torno a estos astros aparecen círculos de difracción. El borde exterior de estos círculos tiene coloración rojiza, mientras que el interior la presenta violácea, lo cual corresponde a que los ángulos de difracción son menores para las longitudes de onda más cortas.

Las condiciones propias de una red espacial regular pueden crearse artificialmente por medio de ondas ultrasonoras estacio-

narias producidas en un medio transparente, líquido o sólido, cualquiera. En los nodos de la onda estacionaria longitudinal se forman máximos de densidad de la materia (véase el t. I, § 110), los cuales dispersan la luz. La distancia entre los nodos de la onda ultrasonora estacionaria representa una magnitud del orden de 10^{-4} cm, es decir, del orden de las longitudes de onda de la luz visible. Si, por ejemplo, en una vasija que contenga un líquido hacemos que se produzcan tres ondas ultrasonoras que se propaguen en tres direcciones perpendiculares entre sí, al reflejarse en las paredes de la vasija estas ondas darán lugar a un sistema de ondas estacionarias cuyos nodos formarán una red espacial regular. Cuando la luz se dispersa en una

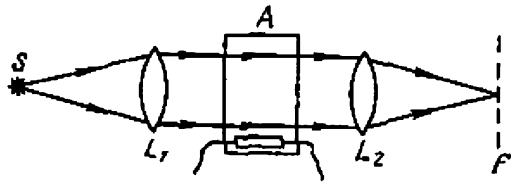

Fig. 105. Esquema del experimento para observar la difracción por ondas ultrasonoras estacionarias.

de estas redes se produce una figura de difracción como la descrita anteriormente. En la fig. 105 se representa un esquema para el estudio de la difracción por ondas ultrasonoras estacionarias en el cual S es un foco de luz, L_1 es una lente que proporciona un haz de rayos luminosos paralelos y A, un recipiente en el que por medio de unas láminas de cuarzo piezoeléctrico (t. I, § 118) se excitan vibraciones ultrasonoras. Una lente L_2 recoge los rayos difractados, los cuales producen máximos en el plano focal principal de aquélla. La difracción por ondas estacionarias se utiliza para determinar la velocidad de las ondas ultrasonoras en las diversas sustancias. Conociendo la longitud de la onda luminosa y la posición que ocupan los máximos de difracción puede hallarse la constante b de la red y, por consiguiente, la longitud de onda de las vibraciones ultrasonoras en la sustancia que se trate. De aquí y conociendo la frecuencia de las vibraciones se calcula su velocidad de propagación.

Un caso muy interesante de difracción por red espacial es el de la difracción de los rayos X por los cristales, caso que estudiaremos en el § 274.

§ 274. Espectroscopía de rayos X y análisis estructural röntgenográfico. Los rayos X o de Röentgen, lo mismo que los visibles, son de naturaleza ondulatoria y producen espectros continuos y de rayas (§ 351). La naturaleza ondulatoria de los rayos X fue demostrada directamente en el año 1912, cuando Laue expuso la idea de que la difracción de dichos rayos podía observarse utilizando la red

espacial natural de los cristales (t. I, § 87). La observación directa de los fenómenos de interferencia de los rayos X sin utilizar cristales no se llevó a cabo hasta el año 1930, en que fue realizada por el físico soviético V. P. Línnik. En uno de sus trabajos Línnik efectuó con los rayos X un experimento análogo al que Lloyd hizo con los rayos visibles (§ 261). Esto fue posible por el hecho de que el índice de refracción de los sólidos para los rayos X es un poco menor que la unidad y, cuando el ángulo de incidencia es muy pequeño, estos rayos experimentan en el límite de separación entre el aire y el cuerpo sólido una reflexión total. Al hacer el experimento

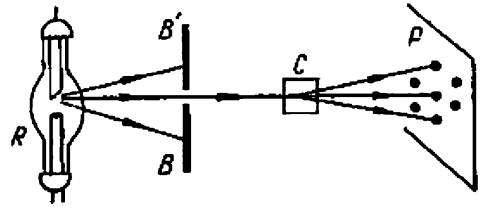

Fig. 106. Esquema del experimento para la difracción de los rayos X.

un haz muy estrecho de rayos X atravesaba parcialmente una lámina de vidrio y parcialmente sufría la reflexión total. Cuando los haces (directo y reflejado) se superponían daban lugar a una serie de franjas de interferencia que podían ser fotografiadas. La distancia entre estas franjas de interferencia era la correspondiente a la longitud de onda, aproximadamente igual a 1,5 Å (como fuente de rayos X se utilizó un anticátodo de cobre).

La posibilidad de observar la difracción de los rayos X por los cristales se basa en que la longitud de onda de estos rayos y la constante de la red cristalina son magnitudes de un mismo orden ($\sim 10^{-8}$ cm). Por esto, cuando los rayos X atraviesan el cristal se produce una difracción por red espacial, como la que estudiamos en el § 273. El esquema del experimento de Laue para la difracción de los rayos X está representado en la fig. 106, donde R es el tubo de rayos X, BB' es una pantalla gruesa de plomo con orificios para dejar pasar el haz de rayos X que después incide sobre el cristal C. Para los rayos X no se pueden hacer lentes, puesto que su índice de refracción en los cuerpos sólidos se aproxima mucho a la unidad. Los máximos de difracción se pueden observar sin lente gracias a la gran estrechez de los haces, los cuales, al encontrarse con la placa fotográfica P, producen en ella algunos máximos.

Como veremos más adelante (§ 331), los rayos X emitidos al bombardear un sólido con electrones rápidos no tienen una composición espectral homogénea, es decir, constan de ondas de distintas longitudes. Por esto precisamente es por lo que en la placa fotográ-

fica P aparece una serie de manchas oscuras (en el negativo) en aquellas direcciones que para las diferentes longitudes de onda satisfacen las condiciones (4) y (5) del § 273. La figura de difracción así observada puede utilizarse con dos fines: 1) para determinar el tipo de la red cristalina y su constante, si la longitud de onda de los rayos X se conoce de antemano, y 2) para medir la longitud de onda de los rayos X, si se conoce previamente el tipo de red cristalina y su constante b.

La primera de estas posibilidades ha desempeñado un papel muy importante en el desarrollo de nuestros conocimientos sobre la naturaleza de los sólidos. Basándose precisamente en la difracción de los rayos X en los cristales fue demostrada de manera indudable por primera vez la exactitud de la hipótesis según la cual las partículas de los cristales ocupan los nodos de una red espacial.

La segunda posibilidad se utilizó para determinar exactamente la longitud de onda de los rayos X. Como vimos en el t. I, § 87, la red cúbica más simple es la de los cristales de sal gema (NaCl). La constante de esta red b (es decir, la distancia entre los iones contiguos) se expresa por el peso molecular M de la sal gema, su densidad ρ y el número de Avogadro N, mediante la relación:

$$b = \sqrt[3]{\frac{M}{2N\rho}}. \qquad (1)$$

Poniendo los valores conocidos de M, N y ρ para los cristales de sal gema (NaCl) obtenemos:

$$b = 2{,}814 \text{ Å}.$$

Midiendo los ángulos bajo los cuales el cristal de sal gema produce los máximos de difracción de los rayos X y aplicando el valor citado de b, se puede hallar la longitud de onda λ. Por ejemplo, para la llamada radiación característica K_α del cobre se obtiene $\lambda = 1{,}537$ Å. Los rayos X de onda más corta tienen una longitud de onda de cerca de 0,1 Å. Las mayores longitudes de onda que pueden medirse mediante la difracción por cristales son iguales aproximadamente a 20 Å. Para medir estas longitudes de onda hay que utilizar cristales de sustancias orgánicas complejas cuya constante b sea grande.

En la fórmula (1) puede verse que para poder calcular la constante b de la red hay que conocer el número de Avogadro N. Es decir, para medir las longitudes de onda de los rayos X en unidades absolutas hay que saber el valor del número de Avogadro. Es evidente que también se puede proceder a la inversa y hallar el número de Avogadro partiendo de la longitud de onda de los rayos X, siempre que esta última se mida por cualquier procedimiento que no esté relacionado con la difracción por cristales. Esta medición puede realizarse haciendo experimentos de interferencia de rayos X, como, por ejemplo, el experimento de Línnik. En la actualidad también es posible obtener el especto de rayos X por

medio de una red de difracción reflectora ordinaria. Para esto se hace que un haz estrecho de rayos X incida sobre una red de difracción reflectora metálica formando con su superficie un ángulo muy pequeño. En estas condiciones los rayos X experimentan una reflexión total en el límite de separación entre el aire y el metal. Los máximos de difracción se observan bajo un ángulo del orden de varias decenas de minuto. Conociendo el ángulo de difracción y la constante de la red puede hallarse la longitud de onda de los rayos X. Los resultados de estas mediciones pueden ser muy exactos: el error relativo puede reducirse hasta un 0,002%. Observando luego la difracción de los rayos X por un cristal, se puede determinar con la precisión correspondiente la constante b de dicho cristal. Así, por ejemplo, se halló que para la red de la calcita ($CaCO_3$) el valor de la de la constante $b = 3{,}03560 \cdot 10^{-8}$ cm. De aquí, y teniendo en cuenta la densidad y el peso molecular de la calcita se calculó el valor del número de Avogadro $N = (6{,}0228 \pm 0{,}0011) \cdot 10^{23}$ mol^{-1}. Este valor coincide perfectamente con los obtenidos por otros procedimientos.

Para estudiar los espectros de los rayos X se utilizan espectrógrafos de rayos X, en los cuales el papel de red de difracción lo desempeña la red espacial de un cristal.

El cálculo de la dirección en que, para una longitud de onda determinada, se obtiene un máximo por difracción en una red cristalina puede efectuarse no solamente basándose en las condiciones (4) y (5) del § 273, sino también por otro procedimiento más

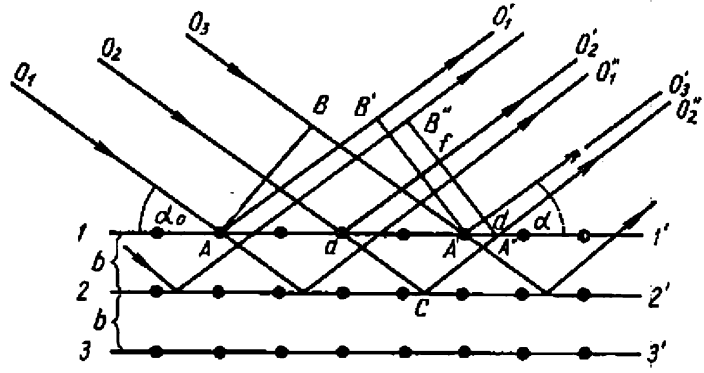

Fig. 107. Esquema para deducir las condiciones de Wulff y Bragg.

fácil. Este procedimiento fue propuesto por el físico cristalógrafo ruso G. Wulff y por los ingleses W. H. y W. L. Bragg, independientemente el uno de los otros, y se denomina método de Wulff y Bragg. Para explicarnos este método hagamos pasar mentalmente por un cristal del sistema cúbico una serie de planos, paralelos a sus caras naturales, que estén separados unos de otros por una distancia b, igual a la longitud de las aristas de las mallas cúbicas elementales del cristal. Los átomos estarán situados en estos planos a distancias iguales. En la fig. 107 el corte de estos planos por el del dibujo está representado por las líneas *1*, *1'*, *2*, *2'*, *3*, *3'*, etc., y los áto-

mos lo están por los circulitos negros. Supongamos que sobre el cristal incide una serie de rayos coherentes paralelos O_1, O_2, O_3, . . ., de longitud de onda λ. Determinemos la dirección que siguen estos rayos por el ángulo α_0 que forman con el plano *1*, *1'*. A estos rayos les corresponderá un frente plano $A'B$. Como resultado de la dispersión de los rayos por los átomos situados en el plano *1*, *1'*, se origina un frente reflejado $A'B'$. Los rayos O'_1, O'_2, O'_3, . . ., normales a este frente, formarán con el plano *1*, *1'* un ángulo $\alpha = \alpha_0$. Otro frente igual $A''B''$, paralelo a $A'B'$, se originará a causa de la dispersión de la onda por los átomos que se encuentran en el plano *2*, *2'*. Los rayos O''_1, O''_2, O''_3, . . ., perpendiculares al frente $A''B''$, adquirirán con relación a los O'_1, O'_2, O'_3, . . ., como puede verse en la fig. 107, una diferencia de marcha

$$\Delta = af - ac - cd = ad \cos \alpha_0 - \frac{ad}{\cos \alpha_0},$$

de donde

$$\Delta = ad \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0}.$$

Teniendo en cuenta que $ad = 2b \operatorname{cotg} \alpha_0$, obtenemos

$$\Delta = 2b \operatorname{sen} \alpha_0.$$

Haces de rayos análogos se producirán al ser dispersados los rayos por los átomos que se encuentran en los planos *3*, *3'*, *4*, *4'*, etc., con la particularidad de que entre los rayos de todos estos haces habrá una misma diferencia de marcha Δ. De esta forma, en la dirección de la reflexión especular se producirá una serie de haces superpuestos entre sí cuya diferencia de marcha Δ será constante. Este fenómeno coincide con el caso de la interferencia de haces múltiples que estudiamos en el § 270. Si la diferencia de marcha entre los haces resulta igual a un múltiplo entero de la longitud de onda, es decir, si se cumple la condición

$$2b \operatorname{sen} \alpha_0 = k\lambda, \qquad (2)$$

siendo k un número entero, en la dirección de la reflexión especular se producirá un máximo. Cuando el número de haces que interfieren es grande, en todas las demás direcciones la amplitud total de las vibraciones será mucho menor, es decir, la onda reflejada no existirá prácticamente. La condición (2) se conoce con el nombre de *condición de Wulff y Bragg*.

Al deducir la condición de Wulff y Bragg hemos considerado la dispersión de los rayos por un sistema de planos paralelos a las caras naturales de un cristal. Es evidente que también se puede considerar la dispersión producida por otros planos cualesquiera equidistantes entre sí y que pasen por el conjunto de los átomos, por

ejemplo, por las diagonales de los cubos elementales. La reflexión de las ondas en estas superficies produce nuevos máximos. Se puede demostrar que todas las direcciones posibles de los máximos hallados por estos procedimientos coinciden con las direcciones determinadas aplicando las fórmulas (4) y (5) del § 273. Pero el método de Wulff y Bragg tiene la ventaja de que, para cada longitud de onda λ (siempre que se cumpla la condición $\lambda < 2b$), permite *hallar el ángulo de inclinación* α_0 que da lugar a la formación de un máximo en la dirección de la onda reflejada especularmente. Supongamos que la superficie plana AB de un cristal (fig. 108) es al mismo tiempo su cara natural. Sobre esta cara AB incide un haz de rayos X monocromáticos OC formando con ella un ángulo α_0. Haciendo girar el cristal alrededor de un eje C, perpendicular al plano del dibujo, variemos el ángulo α_0. Cuando α_0 tome un valor que cumpla la correlación (2) se producirá un máximo en dirección de la reflexión especular. Para todos los demás valores de α_0 prácticamente no existirá rayo reflejado.

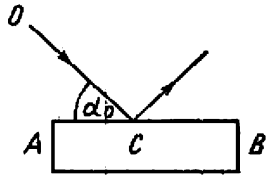

Fig. 108. Reflexión de los rayos X en un cristal.

En este principio se basa la construcción del espectrógrafo de rayos X de cristal giratorio. El esquema de este espectrógrafo se

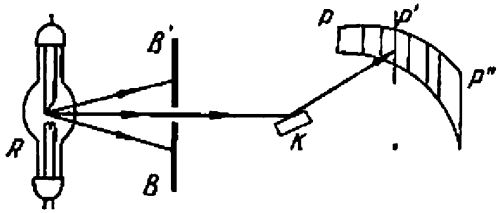

Fig. 109. Esquema de un espectrógrafo de rayos X de cristal giratorio.

muestra en la fig. 109, donde R es el tubo de rayos X y BB' es un diafragma de plomo con una rendija estrecha que deja pasar un haz muy fino de rayos X. Los rayos de este haz inciden sobre el cristal K, el cual puede girar alrededor de un eje paralelo a la rendija. Siguiendo el arco de circunferencia $PP'P''$, cuyo centro coincide con el eje de giro del cristal, se coloca una película fotográfica. Admitamos que los rayos X que se analizan están formados por ondas de longitudes determinadas λ_1, λ_2, λ_3, . . . En este caso, cuando el ángulo de incidencia α_{0i} cumpla la condición (2) para una de las longitudes de onda λ_i, tendrá lugar la reflexión del rayo en la cara del cristal, y en el sitio correspondiente de la película fotográfica se producirá un ennegrecimiento. Si se continúa haciendo que el

cristal gire, se podrá conseguir que se reflejen sucesivamente todas las demás ondas λ_1, λ_2, λ_3, . . . Cuando la rendija del diafragma es suficientemente estrecha y paralela a la cara reflectora del cristal los lugares ennegrecidos de la película fotográfica tienen la forma de franjas estrechas y el conjunto de la figura es muy semejante a la de un espectro óptico obtenido con una red de difracción ordinaria.

Para registrar los rayos X se emplea a veces la propiedad que tienen de ionizar el aire y otros gases. En este caso la película fotográfica se sustituye por una cámara de ionización, la cual puede girar alrededor del mismo eje que el cristal. Si el ángulo de giro

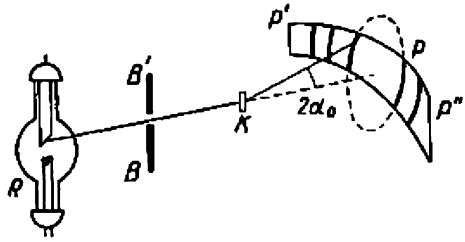

Fig. 110. Esquema de un espectrógrafo de rayos X de polvo cristalino.

de la cámara es el doble que el del cristal se cumple automáticamente la condición según la cual entra en la cámara un rayo reflejado. Cada vez que uno de estos rayos entra en la cámara se produce ionización: el grado de esta ionización se mide con un electrómetro.

La difracción por cristales puede utilizarse no solamente para medir la longitud de onda de los rayos X, sino también para resolver el problema inverso, es decir, para determinar la estructura de los cristales, empleando para ello rayos de longitud de onda conocida. El estudio minucioso de las figuras de difracción de diferentes cristales permite establecer el tipo geométrico de las redes respectivas. En la actualidad las investigaciones de este género se han desarrollado hasta dar lugar a una nueva rama de la Física denominada *análisis estructural röentgenográfico*. Este análisis encuentra amplio campo de aplicación tanto en la cristalografía como en la técnica, donde constituye un medio importantísimo de estudio de las propiedades de los materiales (aceros, aleaciones de metales no ferrosos, etc.).

En el análisis estructural röentgenográfico, además del método de la difracción de los rayos X en un cristal, se emplea también el llamado *método del polvo*, en el cual, en lugar de un solo cristal, se utiliza polvo cristalino muy fino prensado en forma de barrita cilíndrica. Si a través de una barrita de éstas se hace pasar un haz monocromático de rayos X, entre los diferentes cristales orientados caóticamente siempre se encuentran algunos orientados con relación

al haz bajo un ángulo α_0 que cumple la condición (2) para la longitud de onda λ dada. Estos cristales producen rayos reflejados que forman con los primarios un ángulo igual a $2\alpha_0$. Al conjunto de todas las orientaciones posibles de los cristalitos que hacen que el rayo incidente forme con sus superficies un ángulo α_0 dado le corresponde un cono de rayos cuyo ángulo en el vértice es igual a $4\alpha_0$. A cada una de las longitudes de onda λ_i y a cada uno de los órdenes k_i le corresponde un cono de diferente ángulo de abertura. El esquema de la obtención de la figura de difracción por medio del polvo se muestra en la fig. 110, donde R es un tubo de rayos X; BB' es un diafragma que deja pasar un haz de rayos muy estrecho, y K es la barrita de polvo cristalino prensado. En la película fotográfica, dispuesta siguiendo la circunferencia $PP'P''$, se impresionan los máximos, en forma de arcos, en los sitios de intersección de los conos de rayos con dicha película. La ventaja del método del polvo cristalino está en que no requiere grandes cristales difíciles de conseguir.

CAPITULO XXIV

Paso de la luz a través de medios isótropos y de sus superficies de separación

§ 275. **Interacción entre la luz y el medio.** Como indicamos en el § 259, la luz está constituida por ondas electromagnéticas de pequeña longitud. Por consiguiente, los fenómenos ópticos deberán explicarse por las mismas ecuaciones de Maxwell que explican el origen y la propagación de las ondas electromagnéticas, teniendo en cuenta la interacción entre estas ondas y la sustancia en que se propagan.

Según la teoría inicial de Maxwell, para establecer la influencia que ejercen las sustancias sobre los procesos electromagnéticos hay que tener en cuenta sus tres características, es decir, la constante dieléctrica ε, la permeabilidad magnética μ y la conductividad σ. La constante dieléctrica ε y la permeabilidad magnética μ determinan la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas v en el medio dado; según Maxwell

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}; \tag{1}$$

la conductividad σ determina la absorción de las ondas.

Entre la velocidad de propagación de la luz v en un medio y el índice de refracción de este último n existe la relación

$$v = \frac{c}{n}.$$

Igualando esta fórmula con la (1), obtenemos

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}; \tag{2}$$

por lo tanto, el índice de refracción n debe venir determinado por los valores de la constante dieléctrica ε y de la permeabilidad μ del medio. Esta correlación se cumple correctamente cuando se trata de ondas electromagnéticas largas, tomando para ε y μ los valores que se obtienen basándose en las mediciones electrostáticas y magnéticas ordinarias. Pero cuando se trata de la luz estos valores de ε y μ dan valores erróneos del coeficiente de refracción n. Así, por ejemplo, para el agua $\varepsilon = 81$ y μ es prácticamente igual a la unidad, de donde según (2)

$$n = \sqrt{81} = 9.$$

En realidad el coeficiente de refracción del agua para la luz visible es igual sólamente a 1,3. Tampoco se cumple la relación entre la

absorción de la luz y la conductividad del medio. Por ejemplo, coloreando el vidrio puede conseguirse que absorba mucha luz sin que por esto aumente sensiblemente su conductividad eléctrica.

Esta contradicción aparente se explica por el hecho de que los valores de ε, μ y σ, cuando el campo electromagnético externo (en este caso el campo de la onda luminosa) es de gran frecuencia, dependen en alto grado de dicha frecuencia y, por lo tanto, no son iguales a los valores de ε, μ y σ que se obtienen sobre la base de mediciones electro y magnetostáticas.

Esta dependencia se puede comprender si se tiene en cuenta que ε y μ expresan el resultado de la interacción entre el campo exterior y los átomos y moléculas como valores *medios* correspondientes a un gran número de átomos (véase el t. II. § 146 y 208). Pero para ondas tan cortas como las de la luz, cuyo período de vibración puede compararse con el período de los movimientos que tienen lugar dentro de los átomos y de las moléculas, la acción mutua entre el campo electromagnético y los átomos y moléculas será distinta que en aquellos procesos que se desarrollan con más lentitud y, por consiguiente, su promedio también será otro. Las propiedades ópticas de las sustancias sólo pueden ser analizadas minuciosamente si se tiene en cuenta el carácter de la interacción que existe entre la onda electromagnética luminosa y el complicado sistema eléctrico que representa cada átomo o molécula. Como vimos en el t. II, en la composición de los átomos entran electrones y, por consiguiente, el estudio de las propiedades ópticas de las sustancias sólo es posible basándose en la teoría electrónica. Lorentz demostró que para la comprensión cualitativa de muchos fenómenos es suficiente la hipótesis que considera que dentro de los átomos y de las moléculas existen electrones sujetos casi elásticamente, es decir, electrones capaces de vibrar alrededor de sus posiciones de equilibrio cuando sobre ellos actúa una fuerza proporcional a su elongación.

Más adelante veremos que esta hipótesis dista mucho de ser suficiente y que hay que tomar en consideración el carácter mucho más complicado de la estructura de los átomos.

§ 276. **Absorción de la luz.** La luz, al pasar a través de cualquier sustancia, es absorbida por ella en mayor o menor grado. Generalmente la absorción de la luz tiene un *carácter selectivo*, es decir, la luz de las diferentes longitudes de onda no es igualmente absorbida. Como quiera que la longitud de onda determina el color de la luz, los rayos de diferentes colores, en general, serán absorbidos por una sustancia determinada en distintas proporciones.

Los cuerpos transparentes incoloros absorben poco la luz de todas las longitudes de onda comprendidas en el intervalo de los rayos visibles. Así, por ejemplo, una capa de vidrio de 1 cm de espe-

sor absorbe solamente 1% de los rayos visibles que pasan por él. Este mismo vidrio absorbe intensamente los rayos ultravioletas y los infrarrojos lejanos.

Los cuerpos transparentes coloreados se caracterizan por su absorción selectiva dentro de los límites de los rayos visibles. Por ejemplo, un vidrio es «rojo» cuando absorbe débilmente los rayos rojos y anaranjados e intensamente los verdes, azules y violetas. Si sobre un vidrio de este tipo incide luz blanca, que no es más que un conjunto de ondas de diferentes longitudes, solamente pasarán a través de él las ondas más largas, que son las que producen la sensación del color rojo, mientras que las ondas cortas serán absorbidas. Cuando este mismo vidrio se ilumina con luz verde o azul parecerá «negro», puesto que absorbe estos rayos.

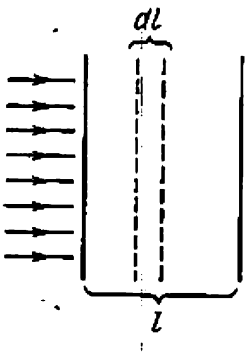

Fig. 111. Esquema para la deducción de la ley de la absorción de la luz.

Desde el punto de vista de la teoría de los electrones sujetos elásticamente, la absorción de la luz se debe a que la onda luminosa excita en la sustancia que atraviesa vibraciones forzadas de los electrones. La energía que mantiene la vibración de los electrones toma después otras formas. Si como resultado de los choques entre los átomos la energía de la vibración de los electrones se transforma en energía del movimiento caótico de las moléculas, el cuerpo se calienta.

La absorción de la luz puede explicarse en sus rasgos generales desde un punto de vista energético, es decir, sin entrar en los pormenores del mecanismo de la interacción que existe entre las ondas luminosas y los átomos y las moléculas de la sustancia absorbente. Supongamos que a través de una sustancia homogénea se propaga un haz de rayos paralelos (fig. 111). Tomemos dentro de esta sustancia una capa infinitamente delgada cuyo espesor sea dl y que esté limitada por dos planos paralelos perpendiculares a la dirección en que se propaga la luz. La densidad del flujo de energía u varía al pasar los rayos a través de la capa tomada en una magnitud igual a $-du$. Es lógico suponer que esta disminución $-du$ será proporcional al valor de la propia densidad del flujo de energía en la capa absorbente dada y a su espesor dl:

$$-du = ku\,dl. \qquad (1)$$

El coeficiente k viene determinado por las propiedades de la sustancia absorbente y se llama *coeficiente de absorción*. La invariabilidad del coeficiente k es señal de que cada capa absorbe una misma fracción del flujo que llega hasta ella.

Para obtener la fórmula de la disminución de la densidad del flujo de energía en una capa cuyo espesor total sea l podemos escribir la expresión (1) de la forma

$$\frac{du}{u} = -k\,dl$$

y después integrarla entre los límites 0 y l:

$$\int_0^l \frac{du}{u} = -k\int_0^l dl.$$

Supongamos que al entrar en la capa ($l = 0$) la densidad del flujo era igual a u_0. Llamando u al valor que esta densidad adquiere después de haber pasado el flujo por todo el espesor l, después de integrar obtenemos:

$$\ln u - \ln u_0 = -kl \text{ o } \ln\frac{u}{u_0} = -kl,$$

de donde

$$u = u_0 e^{-kl}, \qquad (2)$$

siendo e la base de los logaritmos naturales.

Cuanto mayor sea el coeficiente de absorción k tanto más intensa será la absorción de la luz. Cuando $l = 1/k$, de acuerdo con (2):

$$u = \frac{u_0}{e} \cong \frac{u_0}{2{,}72};$$

por lo tanto, una capa cuyo espesor sea igual a $1/k$ disminuirá la densidad del flujo de energía en 2,72 veces. El coeficiente de absorción k oscila entre límites muy amplios para las diferentes sustancias. En la zona visible, para el aire a la presión atmosférica, k es aproximadamente igual a 10^{-5} cm^{-1}, para el vidrio $k \cong 10^{-2}$ cm^{-1}, y para los metales k es una magnitud del orden de decenas de millares. Cualquiera que sea la sustancia el coeficiente de absorción k depende en mayor o menor grado, de la longitud de onda. En la fig. 112 se representa la variación del lg k en función de la longitud de onda λ para el cloro en estado gaseoso a 0° C y presión atmosférica. Como puede verse, en la zona violeta el coeficiente es grande, después disminuye bruscamente en la amarilla-verde para volver a aumentar en la roja.

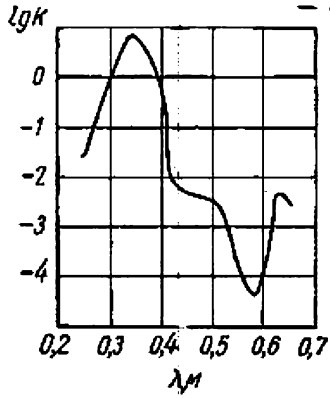

Fig. 112. Variación del logaritmo del coeficiente de absorción k del cloro en función de la longitud de onda λ.

La experiencia demuestra que cuando la absorción se lleva a cabo por sustancias disueltas en un disolvente transparente, esta absorción es proporcional

al número de moléculas absorbentes por unidad de longitud del camino que recorre el rayo luminoso en la disolución. Como el número de moléculas que hay en la unidad de longitud es proporcional a la concentración C de la disolución, el coeficiente de absorción k será proporcional a C, de donde podemos suponer que $k = \varkappa C$, siendo $\varkappa$ un coeficiente constante nuevo que depende exclusivamente de las propiedades de las moléculas de la sustancia absorbente y no de la concentración que tenga la solución. Poniendo este valor de k en la fórmula de la absorción (2), obtenemos:

$$u = u_0 e^{-\varkappa C l}. \tag{3}$$

La afirmación de que el coeficiente $\varkappa$ no depende de la concentración de la solución se conoce con el nombre de *ley de Beer*. Esta ley se cumple siempre que la existencia de moléculas contiguas no varíe las cualidades de cada una de las moléculas dadas. Cuando las concentraciones de la solución son considerables se nota la influencia de las moléculas entre sí y la ley de Beer deja de cumplirse. En aquellos casos en que la ley tiene vigor la correlación (3) puede servir para determinar la concentración de la solución por el grado en que ésta absorbe la luz.

Además de esta absorción «real», en que la energía de las ondas luminosas se transforma, también es posible la disminución de la densidad del flujo de energía en el haz de rayos por dispersión de dicha energía hacia los lados. Este tipo de dispersión de las ondas luminosas al pasar por una sustancia será estudiado más adelante.

§ 277. Paso de la luz a través del límite entre dos medios transparentes. Como vimos anteriormente (§ 251), cuando la luz atraviesa el límite entre dos sustancias transparentes (dioptrio) el rayo incidente se descompone en dos, uno reflejado y otro refractado. Las direcciones de estos rayos se determinan por las leyes de la reflexión y de la refracción. Sin embargo, para definir totalmente los fenómenos relacionados con el paso de la luz a través de un dioptrio hay que indicar la intensidad y el estado de polarización de los rayos reflejado y refractado. Estos problemas se resuelven por medio de las fórmulas deducidas por Fresnel a principios del siglo XIX. Como ya dijimos, Fresnel dedujo sus fórmulas considerando la luz como una propagación de deformaciones elásticas en el éter. Para ello Fresnel tuvo que admitir que el éter tenía propiedades contradictorias. La deducción de las fórmulas de Fresnel sin incurrir en contradicciones sólo es posible basándose en la teoría electromagnética de la luz. Fresnel, al estudiar las vibraciones luminosas, sólo tomaba en consideración un vector, el que determinaba la elongación de las partículas. La onda electromagnética, como ya indicamos, se caracteriza por dos vectores **E** y **H**. Las fórmulas deducidas por la teoría electromagnética de la luz coinciden con las de Fresnel cuando las vibraciones luminosas se identifican con las del vector intensidad del campo eléctrico o simplemente campo eléctrico **E**. Esta identificación es posible, ya que la inmensa mayoría de las manifestaciones de las ondas luminosas, como sus efectos fisiológicos y fotoquímicos, los fenómenos del efecto fotoeléctrico y de la luminiscencia, vienen determinados precisamente por el vector campo eléctrico **E**. Las vibraciones del vector inducción magnética **H** van uni-

das inseparablemente a las del vector E, pero por lo general no se ponen de manifiesto en la onda electromagnética. Por esta razón, en adelante, cuando hablemos de la vibración de la onda luminosa nos referiremos a la del vector campo eléctrico E.

Al ocuparnos de las fórmulas de Fresnel estudiaremos independientemente dos casos: 1) cuando la luz está polarizada en el plano de incidencia; 2) cuando lo está en el plano perpendicular al de incidencia. De acuerdo con lo dicho en el § 259, en el primer caso las

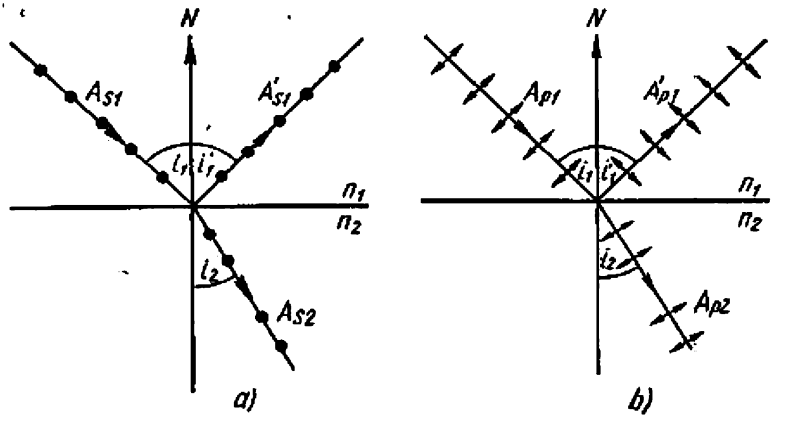

Fig. 113. Refracción y reflexión de una onda luminosa: *a*, la luz está polarizada en el plano de incidencia y las vibraciones tienen lugar en un plano perpendicular a él; *b*, la luz está polarizada en un plano perpendicular al de incidencia y las vibraciones tienen lugar en el de incidencia.

vibraciones de la onda luminosa tendrán lugar en el plano perpendicular al de incidencia, mientras que en el segundo se efectuarán en el plano de incidencia. En la fig. 113 las vibraciones perpendiculares al plano del dibujo se representan por medio de puntos y las que se encuentran en dicho plano, por medio de flechas.

Supongamos que los ángulos de incidencia y de refracción son iguales respectivamente a i_1 e i_2, que el ángulo de reflexión $i'_1 = i_1$ y convengamos que las amplitudes de las vibraciones perpendiculares al plano de incidencia las designaremos: en el rayo incidente por medio de A_{s1}, en el reflejado por medio de A'_{s1} y en el refractado por medio de A_{s2} y que las amplitudes de las vibraciones que tienen lugar en el plano de incidencia las designaremos a su vez por medio de A_{p1}, A'_{p1} y A_{p2} respectivamente en los rayos incidente, reflejado y refractado. Entonces, de acuerdo con las fórmulas de Fresnel:

$$\frac{A'_{s1}}{A_{s1}} = \frac{-\operatorname{sen}(i_1 - i_2)}{\operatorname{sen}(i_1 + i_2)}, \quad (1) \qquad \frac{A'_{p1}}{A_{p1}} = \frac{\operatorname{tg}(i_1 - i_2)}{\operatorname{tg}(i_1 + i_2)}, \quad (3)$$

$$\frac{A_{s2}}{A_{s1}} = \frac{2 \operatorname{sen} i_2 \cos i_1}{\operatorname{sen}(i_1 + i_2)}, \quad (2) \qquad \frac{A_{p2}}{A_{p1}} = \frac{2 \operatorname{sen} i_2 \cos i_1}{\operatorname{sen}(i_1 + i_2) \cos(i_1 - i_2)}. \quad (4)$$

La correlación entre los ángulos de incidencia y los de refracción la da la ley de la refracción

$$\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2} = n_{21},$$

siendo n_{21} el índice de rafracción del segundo medio respecto al primero.

Para el caso particular del dioptrio aire-vidrio, cuyo índice de refracción $n_{21} = 1{,}52$, los valores de los cocientes de las amplitudes A'_{s1}/A_{s1}, A_{s2}/A_{s1}, A'_{p1}/A_{p1} y A_{p2}/A_{p1}, en función del ángulo de incidencia i_1, se dan en la fig. 114. En esta figura puede verse

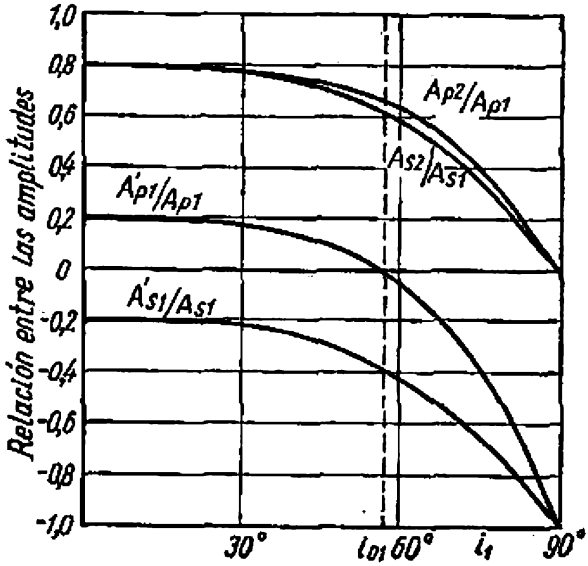

Fig. 114. Relación entre la amplitud de las vibraciones de las ondas reflejada y refractada y la amplitud de las vibraciones de la onda incidente.

en primer lurgar que para un valor determinado del ángulo de incidencia i_{01} la relación $\frac{A'_{p1}}{A_{p1}} = 0$. Este valor del ángulo de incidencia i_{01}, como vemos por la fórmula (3), viene determinado por la condición:

$$\operatorname{tg}(i_1 + i_2) = \infty,$$

es decir, por la condición

$$i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2},$$

la cual está de acuerdo con la ley de Brewster (véase el § 258); si los rayos reflejados y refractados son perpendiculares entre sí,

el rayo reflejado estará totalmente polarizado en el plano de incidencia (es decir, carecerá de vibraciones paralelas al plano de incidencia: $A'_{p1} = 0$).

Finalmente debemos aclarar el papel que desempeñan los signos en las fórmulas (1)-(4). Los signos de los vectores componentes dependen de las coordenadas que se elijan: la forma en que están escritas las fórmulas (1)-(4) corresponde a un sistema de coordenadas en que las componentes positivas del vector E paralelas al plano de incidencia están dirigidas en las ondas incidente, reflejada y refractada de la forma que se indica en la fig. 115, donde el caso a) corresponde a un ángulo de incidencia poqueño, y el b) a un ángulo de incidencia grande. El sentido positivo de las componentes perpendiculares al plano de incidencia de las tres ondas está dirigido hacia detrás del plano del dibujo.

Esto equivale a emplear para cada uno de los rayos incidente, reflejado y refractado, un sistema de coordenadas propio, igual al que se representó en la fig. 34. Efectivamente, examinemos otra vez la fig. 115 y supongamos para simplificar que la luz está polarizada en un plano de forma que el vector campo eléctrico E vibra en el plano de incidencia (es decir, en el plano del dibujo). Entonces las componentes E_p coinciden con el vector E. El vector inducción magnética H es perpendicular al plano del dibujo y para los tres rayos su dirección positiva va desde el plano del dibujo hacia el lector. En estas condiciones puede verse que, de acuerdo con la fig. 34, para cada uno de los rayos se utiliza un sistema de coordenadas derecho, es decir, que cuando la cabeza del sacacorchos gira en la dirección que va del vector E al vector H, la dirección del movimiento de avance de dicho sacacorchos coincide con la de propagación de los rayos.

De las fórmulas (2) y (4) se deduce que la refracción de las ondas se produce en todos los casos sin variación de fase. En la onda reflejada, cuando $n_{21} > 1$, cualquiera que sea el ángulo de incidencia de las vibraciones perpendiculares al plano de incidencia (E_s) se produce un cambio de fase cuyo valor es π [el signo menos de la fórmula (1)]. Para las vibraciones paralelas al plano de incidencia (E_p) en la onda reflejada, cuando $n_{21} > 1$ y los ángulos de incidencia son menores que el de Brewster, es decir, aquellas en que $i_1 + i_2 < \frac{\pi}{2}$, el signo que lleva en la fórmula (3) la expresión tg $(i_1 + i_2)$ es positivo y, por consiguiente, los signos de E_{p1} y E'_{p1} son iguales; pero en este caso, como puede verse en la fig. 115, *a*, los componentes E_{p1} y E'_{p1} tienen sentidos contrarios. Cuando los ángulos son mayores que el de Brewster, $i_1 + i_2 > \frac{\pi}{2}$, el signo de tg $(i_1 + i_2)$ es negativo y, de acuerdo con la fórmula (3), E_{p1} y E'_{p1} tienen signos distintos. Como vemos en la fig. 115, *b* en este caso los signos contrarios

indican que E_{p1} y E'_{p1} están dirigidos en sentidos contrarios. Si el ángulo de incidencia es igual al de Brewster la amplitud de la vibración E'_{p1} será igual a cero.

Resumiendo: tanto cuando los ángulos son menores que el de Brewster, como cuando son mayores que él, al reflejarse la luz en un medio ópticamente más denso se produce un cambio de fase cuyo valor es igual a π, es decir, tiene lugar la pérdida de una semionda. A esto se debe la aparición de la mancha oscura en el centro de los

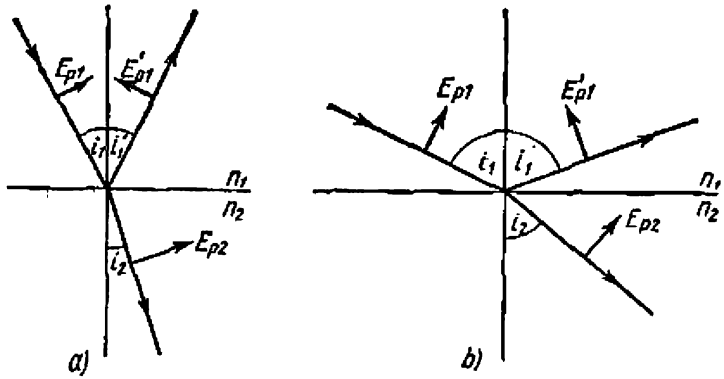

Fig. 115. Dirección positiva de los componentes del vector E en las ondas incidente, reflejada y refractada.

anillos de Newton (incidencia formando un ángulo pequeño) y de la franja oscura nula en el experimento de Lloyd (incidencia formando un ángulo grande).

Para determinar el flujo de energía en las ondas reflejada y refractada recordemos que el flujo de energía W (que viene dado por el vector de Umov multiplicado por el área de la sección de dicho flujo) es proporcional al cuadrado de la amplitud A^2, a la velocidad de propagación de la onda v y al área a través de la cual se transporta la energía (t. I, § 112):

$$W = uS \sim A^2 vS.$$

Como quiera que la velocidad de propagación y el área de la sección transversal S de la onda reflejada son iguales que las de la onda incidente, la relación entre los flujos de energía W'_1 y W_1 de las ondas reflejada e incidente será igual a la que exista entre los cuadrados de sus amplitudes. De aquí que, por la fórmula (1), para las vibraciones en el plano perpendicular al de incidencia (la luz se considera polarizada en el plano de incidencia, cosa que se indica con el signo $\|$), tengamos:

$$\left(\frac{W'_1}{W_1}\right)_{\|} = \left(\frac{A'_{s1}}{A_{s1}}\right)^2 = \frac{\operatorname{sen}^2(i_1 - i_2)}{\operatorname{sen}^2(i_1 + i_2)}. \qquad (5)$$

De la misma forma, para las vibraciones paralelas al plano de incidencia (la luz se considera polarizada perpendicularmente al plano de incidencia), según la fórmula (3), tendremos:

$$\left(\frac{W_1'}{W_1}\right)_{\perp} = \left(\frac{A_{p1}'}{A_{p1}}\right)^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(i_1 - i_2)}{\operatorname{tg}^2(i_1 + i_2)}. \qquad (6)$$

Cuando la luz incide perpendicularmente ($i_1 = i_2 = 0$) las expresiones (5) y (6) toman una forma indeterminada. Para esclarecer esta indeterminación partiremos del hecho de que cuando los ángulos son pequeños tanto los senos como las tangentes pueden ser sustituidos por los propios ángulos. Entonces

$$\frac{\operatorname{sen}^2(i_1 - i_2)}{\operatorname{sen}^2(i_1 + i_2)} = \frac{\operatorname{tg}^2(i_1 - i_2)}{\operatorname{tg}^2(i_1 + i_2)} = \frac{(i_1 - i_2)^2}{(i_1 + i_2)^2} = \frac{\left(\frac{i_1}{i_2} - 1\right)^2}{\left(\frac{i_1}{i_2} + 1\right)^2}.$$

Pero cuando los ángulos i_1 e i_2 son pequeños la ley de la refracción puede escribirse de la forma

$$\frac{i_1}{i_2} = n_{21},$$

de donde, siendo los ángulos pequeños:

$$\frac{\operatorname{sen}^2(i_1 - i_2)}{\operatorname{sen}^2(i_1 + i_2)} = \frac{\operatorname{tg}^2(i_1 - i_2)}{\operatorname{tg}^2(i_1 + i_2)} = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}\right)^2,$$

de donde, según las fórmulas (5) y (6), cuando la luz incide perpendicularmente, esté polarizada horizontal o verticalmente al plano de incidencia, se obtiene una misma relación:

$$\frac{W_1'}{W_1} = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}\right)^2. \qquad (6a)$$

Para determinar el flujo de energía en la onda refractada pueden utilizarse perfectamente las fórmulas (2) y (4). Pero es más fácil recurrir a la ley de la conservación de la energía, según la cual para los cuerpos no absorbentes la suma de los flujos de energía de los rayos reflejado y refractado $W_1' + W_2$ es igual al flujo de energía del rayo incidente W_1:

$$W_1' + W_2 = W_1,$$

de donde

$$\frac{W_2}{W_1} = 1 - \frac{W_1'}{W_1}. \qquad (7)$$

Como ya conocemos por las fórmulas (5) y (6) la relación $\frac{W_1'}{W_1}$ para los casos en que la luz está polarizada en planos paralelos y perpendiculares al de incidencia, podemos hallar por la fórmula (7) la relación $\frac{W_2}{W_1}$ para estos mismos casos.

Para la luz natural que no presenta huellas de polarización puede considerarse que la mitad de su energía corresponde a las vibraciones paralelas al plano de incidencia y otra mitad a las perpendiculares a dicho plano, de donde, de acuerdo con (5) y (6), se

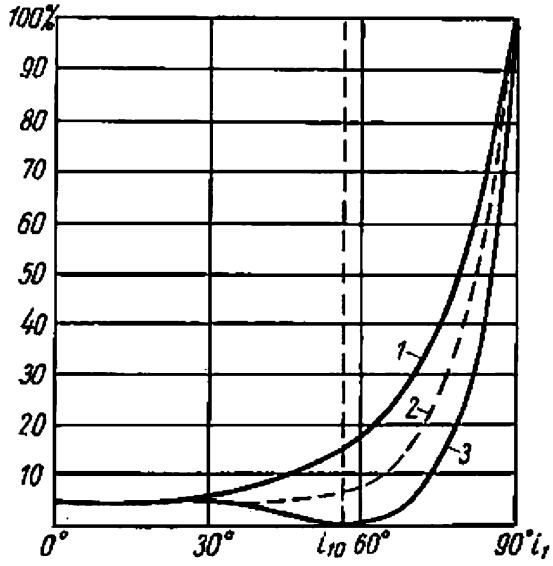

Fig. 116. Relación de los flujos de energía en las ondas reflejada e incidente: 1, luz polarizada en el plano de incidencia; 2, luz natural; 3, luz polarizada en el plano perpendicular al de incidencia.

deduce que el flujo de energía de la luz reflejada en el caso de que la incidente sea natural viene determinado por la correlación:

$$\frac{W_1'}{W_1} = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}^2(i_1 - i_2)}{\operatorname{sen}^2(i_1 + i_2)} + \frac{\operatorname{tg}^2(i_1 - i_2)}{\operatorname{tg}^2(i_1 + i_2)}\right]. \qquad (8)$$

Cuando la luz natural incide perpendicularmente, la fórmula (8) toma la forma de la (6a).

En la fig. 116 se muestra la gráfica de la relación W_1'/W_1 para la luz polarizada en el plano de incidencia (curva 1); para la polarizada en el plano perpendicular al de incidencia (curva 3) y para la luz natural (curva 2) en función del ángulo de incidencia i_1. El cálculo de estas curvas corresponde a la reflexión de la luz en un dioptrio aire-vidrio cuyo índice de refracción $n_{21} = 1{,}52$. La curva 3 toca al eje de abscisas en el punto en que $i_1 = i_{01} = 56°40'$, lo que corresponde a la polarización total del rayo reflejado en el plano de incidencia (ley de Brewster). La reflexión de la luz es mínima cuando $i_1 = 0$, es decir cuando la luz incide perpendicularmente sobre

el dioptrio; cuando incide tangencialmente $\left(i_1 = \frac{\pi}{2}\right)$ la luz se refleja totalmente.

Examinemos varios ejemplos de aplicación de las fórmulas de Fresnel.

Ejemplo 1. En un aparato óptico la luz pasa sucesivamente por seis lentes fabricadas con vidrio cuyo índice de refracción es igual a 1,60. Determinar qué fracción de la luz pasa a través del aparato si los ángulos con que dicha luz incide sobre las lentes son pequeños.

Solución. De acuerdo con la fórmula (6a) cada vez que la luz incide sobre la superficie de una lente se refleja una parte de ella igual a

$$\frac{W_1'}{W_1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = \frac{0{,}60^2}{2{,}6^2} = 0{,}053.$$

Por consiguiente, a través de cada superficie pasa una cantidad de luz igual a 0,947 de la incidente. Pero como las seis lentes tienen doce superficies, a través de todo el sistema pasará un flujo:

$$W = (0{,}947)^{12} W_0 = 0{,}52 W_0,$$

donde W_0 es el flujo inicial. Por lo tanto, las pérdidas debidas a la reflexión alcanzan un 48% de la luz que incide sobre el aparato.

Ejemplo 2. Un objetivo complejo consta de lentes de vidrio cuyos índices de refracción respectivos son $n_1 = 1{,}52$ y $n_2 = 1{,}60$. Estas lentes van pegadas con bálsamo del Canadá cuyo índice de refracción $n_3 = 1{,}54$. Calcular la pérdidas de luz que la reflexión ocasiona en el objetivo considerando que los ángulos con que la luz incide sobre las lentes son pequeños. Comparar estas pérdidas con las que producirían las dos lentes del objetivo si en lugar de estar pegadas estuvieran separadas por una capa de aire.

Solución. En la primera superficie se reflejará una cantidad de luz incidente igual a

$$\frac{W_1'}{W_1} = \left(\frac{n_1-1}{n_2+1}\right)^2 = \left(\frac{0{,}52}{(2{,}52)}\right)^2 = 0{,}043.$$

Es decir, a través de la primera superficie pasará 0,957 de la luz incidente.

Para hallar la fracción de luz que se refleja en el dioptrio vidrio-bálsamo del Canadá hay que determinar previamente el índice de refracción relativo n_{31}:

$$n_{31} = \frac{n_3}{n_1} = \frac{1{,}54}{1{,}51} = 1{,}013.$$

De donde tenemos que en la superficie de separación entre el vidrio y el bálsamo del Canadá se reflejará una parte de luz igual a

$$\left(\frac{n_{31}-1}{n_{31}+1}\right)^2 = \left(\frac{0{,}013}{2{,}013}\right)^2 = 0{,}00004,$$

es decir, prácticamente no se produce reflexión. Por lo tanto, solamente nos resta tener en cuenta la pérdida de luz, que se produce en la superficie de salida del objetivo, la cual viene determinada por la relación:

$$\left(\frac{n_2-1}{n_2+1}\right)^2 = \left(\frac{0{,}60}{2{,}60}\right)^2 = 0{,}053,$$

es decir, a través de esta última superficie pasa 0,947 de la luz que sobre ella incide y, por lo tanto, a través de todo el objetivo pasará:

$$W = 0{,}957 \cdot 0{,}947 W_0 = 0{,}906 W_0.$$

El total de las pérdidas de luz por reflexión en el objetivo alcanzan un 9,4%. Si entre las lentes hubiera una capa de aire las pérdidas serían del 18%.

De los dos ejemplos anteriores puede sacarse una conclusión común. En los sistemas ópticos que tienen gran número de superficies reflectoras (sobre todo si la luz puede incidir oblicuamente) las pérdidas por reflexión alcanzan valores considerables. Estas pérdidas pueden reducirse pegando los diversos elementos del sistema con una sustancia transparente cuyo índice de refracción sea aproximadamente igual al de los vidrios.

De los cálculos realizados se puede hacer también otra deducción. La reflexión que se produce en la superficie que separa dos sustancias cuyos índices de refracción se diferencian poco entre sí es muy pequeña. Por esta razón, si en un líquido transparente se sumerge un cuerpo sólido que también lo sea y que tenga el mismo índice de refracción que el líquido, este sólido resultará invisible. Esto puede demostrarse fácilmente introduciendo un trozo de cuarzo fundido ($n = 1{,}458$) en tetracloruro de carbono ($n = 1{,}465$). En este fenómeno se basa el procedimiento elaborado por I. V. Obreímov para determinar el índice de refracción de los vidrios valiéndose de líquidos cuyos índices de refracción se conocen.

Ejemplo 3. Un rayo de luz polarizada en un plano que forma un ángulo $\psi = 45°$ con el plano de incidencia, cae sobre la superficie de un vidrio formando con él un ángulo $i_1 = 30°$. Determinar en qué plano estará polarizada la luz del rayo reflejado. El índice de refracción del vidrio $n = 1{,}46$.

Solución. Supongamos que OX (fig. 117) representa el plano de incidencia y O_1O_2, el plano de polarización. Las vibraciones A_1 de la luz incidente tienen lugar en el plano perpendicular al de polarización. Descompongamos A_1 en dos componentes: A_{p1}, paralela al plano de incidencia, y A_{s1}, perpendicular a dicho plano.

Como A_1, por las condiciones del ejemplo, forma con OX un ángulo de 45°, tendremos que:

$$A_{p1} = A_{s1} = \frac{A_1}{\sqrt{2}}.$$

Determinemos el ángulo de refracción i_2:

$$\operatorname{sen} i_2 = \frac{\operatorname{sen} i_1}{n} = \frac{\operatorname{sen} 30°}{1{,}46} = 0{,}342, \text{ de donde } i_2 = 20°.$$

Aplicando las fórmulas de Fresnel (1) y (3) obtenemos las amplitudes de la luz reflejada para las componentes A'_{s1} y A'_{p1}:

$$A'_{s1} = -A_{s1}\frac{\operatorname{sen}(30° - 20°)}{\operatorname{sen}(30° + 20°)} = -A_{s1}\frac{\operatorname{sen} 10°}{\operatorname{sen} 50°} = -0{,}227\, A_{s1};$$

$$A'_{p1} = A_{p1}\frac{\operatorname{tg}(30° - 20°)}{\operatorname{tg}(30° + 20°)} = A_{p1}\frac{\operatorname{tg} 10°}{\operatorname{tg} 50°} = 0{;}148\, A_{p1}.$$

Como dijimos con anterioridad, cuando el ángulo de incidencia es menor que el de Brewster las dos componentes experimentan un cambio de fase cuyo valor es π. Por esto en la fig. 117, A'_{s1} y A'_{p1} se toman en sentidos contrarios a los de A_{s1} y A_{p1}.

En esta misma figura puede verse que la vibración A'_1 del rayo reflejado tiene lugar en un plano que forma con el de incidencia OX un ángulo ψ' que se puede determinar por medio de la correlación:

$$\operatorname{tg}\psi' = \frac{0{,}227}{0{,}148} = 1{,}53, \text{ de donde } \psi' = 57°.$$

El plano de polarización del rayo reflejado $O'_1O'_2$ forma con el de polarización del rayo incidente un ángulo $\psi' - \psi = 57° - 45° = 12°$.

Partiendo de las fórmulas de Fresnel puede verse fácilmente que si el plano de polarización no coincide con el de incidencia o no es perpendicular a él,

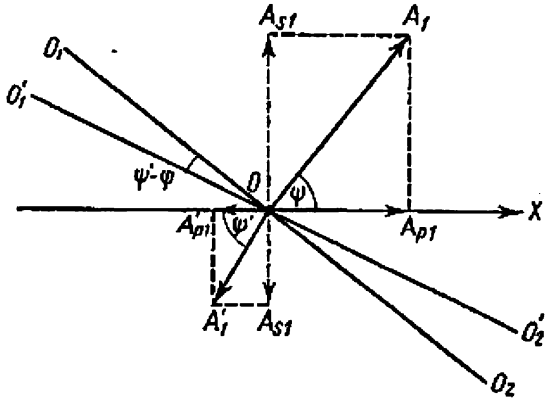

Fig. 117. Esquema para el cálculo del giro que experimenta el plano de polarización al reflejarse la luz.

al producirse la reflexión o la refracción en la superficie que separa dos sustancias transparentes tiene lugar un *giro del plano de polarización*.

Como se demostró en el § 252, cuando la luz pasa de un medio óptico más denso a otro menos denso (es decir, cuando el índice relativo de refracción $n_{21} < 1$) formando ángulos de incidencia mayores que el ángulo límite no se produce rayo refractado. En este caso la luz se refleja totalmente. Este fenómeno se llama reflexión total. El ángulo límite $i_{1\,\lim}$ se determina por la condición

$$\operatorname{sen} i_{1\,\lim} = n_{21}$$

La existencia de la reflexión total se deduce de las fórmulas de Fresnel. Si $\operatorname{sen} i_1 = \operatorname{sen} i_{1\,\lim} = n_{21}$, según la ley de la refracción, $i_2 = \frac{\pi}{2}$, de donde, de acuerdo con las fórmulas (5) y (6) de Fresnel, la reflexión es total:

$$\left(\frac{W'_1}{W_1}\right)_{\parallel} = \frac{\operatorname{sen}^2\left(i_{1\,\lim} - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(i_{1\,\lim} + \frac{\pi}{2}\right)} = 1,$$

$$\left(\frac{W'_1}{W_1}\right)_{\perp} = \frac{\operatorname{tg}^2(i_{1\,\lim} - \pi/2)}{\operatorname{tg}^2(i_{1\,\lim} + \pi/2)} = 1.$$

Cualquier ángulo de incidencia $i_1 > i_{1\,\lim}$ carece de valores reales del ángulo de refracción i_2 que puedan cumplir la ley de la

refracción. Por esto, mientras $i_1 > i_{1\,\text{lím}}$ el flujo de energía del rayo refractado W_2 sigue siendo igual a cero y la relación W_1'/W_1 resulta como antes igual a la unidad.

Cuando tiene lugar la reflexión total, en el rayo reflejado se produce un salto de fase con respecto a la del rayo incidente. Si el vector

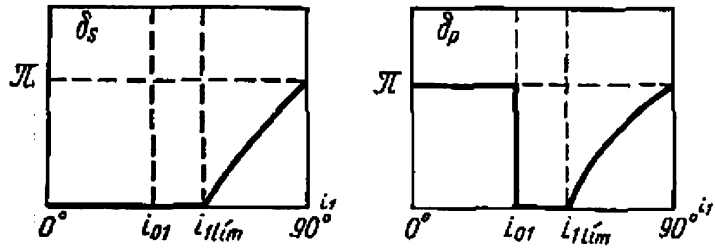

Fig. 118. Saltos de fase por reflexión en una sustancia ópticamente menos densa: *a*, para las vibraciones perpendiculares al plano de incidencia; *b*, para las vibraciones paralelas al plano de incidencia.

campo eléctrico E vibra en un plano perpendicular al de incidencia, este salto de fase δ_s viene determinado por la correlación

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_s}{2}=\frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 i_1-n_{21}^2}}{\cos i_1}; \tag{9}$$

si dicho vector vibra en el plano de incidencia el salto de fase δ_p se determina por la correlación

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_p}{2}=\frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 i_1-n_{21}^2}}{n_{21}\cos i_1}. \tag{10}$$

En la fig. 118 puede verse cómo los saltos de fase δ_s y δ_p dependen del ángulo i_1 en el caso en que $n_{21}=\frac{1}{n_{12}}=\frac{1}{1{,}52}$.

La diferencia de fases $\delta_p-\delta_s$ entre las vibraciones paralelas y perpendiculares al plano de polarización, según (9) y (10) se determina por la correlación:

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_p-\delta_s}{2}=\frac{\cos i_2\sqrt{\operatorname{sen}^2 i_1-n_{21}^2}}{\cos^2 i_1}. \tag{11}$$

En esta fórmula puede verse que cuando $i_1 = i_{1\,\text{lím}}$ ($\operatorname{sen} i_{1\,\text{lím}} = n_{21}$)

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_p-\delta_s}{2}=0,$$

es decir, si el rayo se refleja formando exactamente el ángulo límite no se produce ninguna diferencia de fase entre las vibraciones paralelas y perpendiculares al plano de incidencia E_{1p}' y E_{1s}'; la luz polarizada en un plano continúa siendo polarizada en un plano. Hablando

en general, entre los componentes del vector campo eléctrico E'_{1p} y E'_{1s} del rayo que se produce con la reflexión total existe cierta diferencia de fases.

Supongamos que sobre la superficie que separa dos medios incide, bajo un ángulo mayor que el ángulo límite, un rayo plano polarizado cuyo plano de polarización forma a su vez con el de incidencia un ángulo cualquiera diferente de 0 y de $\pi/2$. En este caso las dos vibraciones del rayo reflejado E'_{1p} y E'_{1s} proceden de una misma vibración y, por consiguiente, serán coherentes. En el t. I, § 101

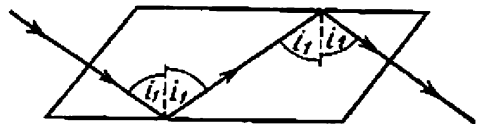

Fig. 119. Obtención de luz polarizada elípticamente por doble reflexión total.

demostramos que cuando se componen vibraciones perpendiculares entre sí se produce, por lo general, un movimiento elíptico. Por consiguiente, en las condiciones indicadas en el rayo que experimenta la reflexión total el vector campo eléctrico varía de tal forma que su extremo describe una elipse. La luz que corresponde a las vibraciones de este género se llama luz *elípticamente polarizada*. En el caso particular en que los componentes E'_{1s} y E'_{1p} tienen la misma amplitud y la diferencia de fases entre ellos es igual a $\pi/2$ ó $3\pi/2$, la elipse se transforma en una circunferencia y se dice que la luz está *circularmente polarizada*. Para el dioptrio vidrio-aire ($n_{12} = 1{,}5$) cuando $i_1 = 54°37'$ la diferencia de fases $\delta_p - \delta_s = 45°$; la doble reflexión bajo este ángulo produce una diferencia de fases de $\pi/2$, es decir, da lugar a vibraciones circulares. Fresnel construyó un romboedro (fig. 119) en el que la luz sufre sucesivamente dos reflexiones totales bajo el ángulo de 54°37'. Si la luz inicial estaba polarizada en un plano, la que emergía del romboedro lo estaba circularmente.

Los procedimientos que se siguen para el análisis de la luz polarizada elíptica o circularmente serán estudiados más adelante.

Cuando la reflexión es total se produce un fenómeno peculiar que consiste en que las vibraciones electromagnéticas penetran parcialmente en el segundo medio. No obstante, estas vibraciones sólo originan un transporte de energía a lo largo de la superficie de separación, sin que formen rayos refractados.

El fenómeno de la penetración de las vibraciones en la segunda sustancia puede apreciarse experimentalmente. Si la sustancia ópticamente menos densa tiene un espesor del orden de la longitud de onda y después se encuentra una sustancia ópticamente más densa, las vibraciones llegarán a ella y luego se propagarán de la forma ordinaria. En estas condiciones una parte de la energía pasará a través de la superficie de separación, en la cual, en otros casos, se observa una reflexión total. En la fig. 120 se muestra el esquema de un experimento que permite establecer esta penetración de las vibraciones a través de una capa de sustancia ópticamente menos densa. Dos prismas de reflexión total fabricados de sal gema (se toma la sal gema para que los prismas sean transparentes en la región de los rayos infrarrojos; véase el texto más adelante), se juntan dejando entre ellos un pequeño espacio de aire que se regula interponiendo entre las superficies BC y $B'C'$ unas hojas delgadas de papel metálico. Si el espesor del papel metálico se toma del orden de 5μ, el espacio de aire será mayor que la longitud de las ondas de la luz visible y los rayos visibles sufrirán en la superficie BC una reflexión total en la dirección que indica la línea punteada

Pero los rayos infrarrojos de longitud de onda suficientemente grande penetran a través de este mismo espacio de aire en el prisma $A'B'C'$ y pueden ser registrados por medio del par termoeléctrico a. Si el espesor de la capa de aire se disminuye hasta unas fracciones de micra, los rayos visibles también penetrarán en el prisma $A'B'C'$.

Otra variante de este experimento fue propuesta por Mandelshtam y Zelone. Un prisma de reflexión total ABC (fig. 121) se ponía en contacto por su

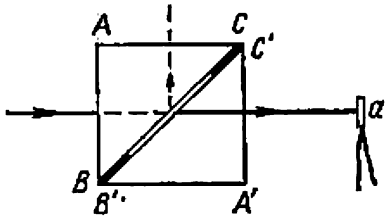

Fig. 120. Paso de los rayos infrarrojos a través de una capa delgada de aire comprendida entre dos prismas.

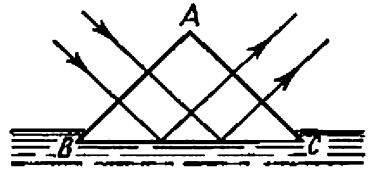

Fig. 121. Demostración de que la luz penetra en la segunda sustancia aunque la reflexión sea total.

cara BC con un líquido fluorescente. Las vibraciones penetraban parcialmente en el líquido y provocaban en él fluorescencia en una capa delgada de la zona contigua al prisma.

§ 278. Reflexión de la luz por los metales. Los metales se caracterizan por absorber intensamente la luz. En ellos solamente puede apreciarse la transmisión de la luz cuando ésta pasa a través de películas metálicas cuyo espesor excede muy poco la longitud de la onda luminosa. En este caso se observa generalmente una considerable selectividad. Así, por ejemplo, cuando se miran al trasluz panes de oro delgados parecen verdes, mientras que los de plata parecen violetas. Si caracterizamos la absorción de la luz por el metal por medio de la fórmula (2) del § 276:

$$u = u_0 e^{-kl}, \tag{1}$$

para el coeficiente de absorción k obtenemos un valor de decenas y centenas de millares de cm^{-1}. Por esta razón, para caracterizar la absorción de los metales se introduce otro coeficiente $\varkappa$, que guarda con el k la siguiente correlación:

$$\varkappa = \frac{k\lambda}{4\pi},$$

siendo λ la longitud de onda de la luz que se considera. Entonces la fórmula (1) toma la forma:

$$u = u_0 e^{-\frac{4\pi}{\lambda}\varkappa l} \tag{1a}$$

Cuando la luz pasa a través de una capa de metal cuyo espesor es igual a la longitud de onda luminosa el flujo de energía se debilita

en $e^{4\pi\varkappa}$ veces. Para la mayoría de los metales el valor de $\varkappa$ se encuentra entre 1,5 y 5.

Los metales se caracterizan por su gran absorción y por su propiedad de reflejar bien la luz. Prácticamente el coeficiente de reflexión de la luz depende en alto grado del estado en que se encuentra la superficie del metal: huellas de corrosión casi insignificantes pueden disminuir considerablemente sus propiedades reflectantes. Por

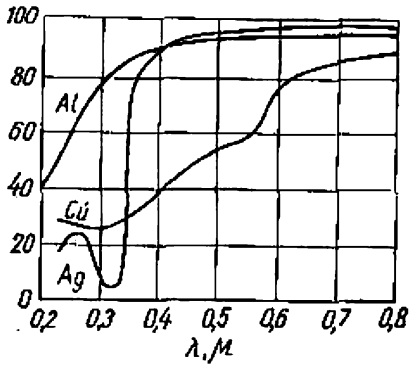

Fig. 122. Variación de los coeficientes de reflexión del aluminio, la plata y el cobre en función de la longitud de onda.

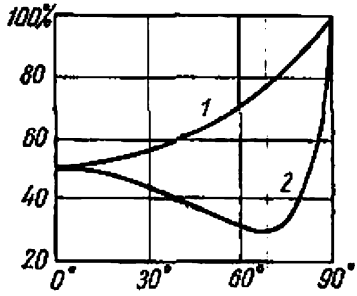

Fig. 123. Relación entre los flujos de energía de las ondas reflejada e incidente cuando la luz se refleja en el cobre: *1*, luz polarizada en el plano de incidencia; *2*, luz polarizada en un plano perpendicular al de incidencia ($\lambda = 0{,}45$ μ).

esta razón, cuando se desea dar la característica del poder reflector de los metales hay que tener en cuenta que sus superficies deben estar pulimentadas y limpias. La reflexión que producen los metales también es selectiva. En la fig. 122 se dan las variaciones de los coeficientes de reflexión del aluminio, la plata y el cobre en función de la longitud de onda. Como puede verse, el aluminio y la plata tienen en la zona visible un coeficiente de reflexión mayor del 90%. El coeficiente de reflexión de la plata comienza a disminuir sensiblemente en la zona violeta ($\lambda \cong 0{,}4$ μ) y sufre una disminución brusca en la de los rayos ultravioletas, alcanzando un mínimo cuando $\lambda = 0{,}32$ μ. El poder reflector del aluminio varía con más suavidad en función de la longitud de onda y continúa siendo relativamente elevado en la zona ultravioleta del espectro. Esta peculiaridad del aluminio, junto con su gran resistencia a la corrosión, hace que sea muy a propósito para la fabricación de espejos para aparatos ópticos. El coeficiente de reflexión del cobre disminuye mucho incluso en la zona visible, a esto se debe la coloración rojiza característica que presentan las superficies lisas y limpias de este metal.

El coeficiente de reflexión de las superficies metálicas pulimentadas depende del ángulo de incidencia, siendo diferente para las vibraciones paralelas y perpendiculares al plano de incidencia. En la fig. 123 se da, referida al cobre ($\lambda = 0{,}45\ \mu$) y en función del ángulo de incidencia i_1, la relación que existe entre los flujos de energía de los rayos reflejado e incidente para las vibraciones perpendiculares (curva *1*) y paralelas (curva *2*) al plano de incidencia. Estas curvas son semejantes a las de la reflexión en la superficie del vidrio (fig. 116, curvas *1* y *3*). Las curvas *1* y *2* de la fig. 123 coinciden cuando el ángulo de incidencia $i_1 = 0$ y tienden a la unidad cuando $i_1 = \frac{\pi}{2}$. La curva *2*, de las vibraciones paralelas al plano de incidencia, alcanza para un valor determinado del ángulo de incidencia $i_1 = i_{10}$ un mínimo. Para el cobre este ángulo es igual a 69°41′. Sin embargo, entre las curvas correspondientes a las fórmulas de Fresnel (fig. 116) y las curvas de reflexión en los metales existe una diferencia esencial. En primer lugar, la reflexión metálica es grande incluso cuando la incidencia es normal y, en segundo, la curva *2* no llega a alcanzar en su mínimo el valor de cero. Los metales no producen bajo ningún ángulo la polarización total de los rayos reflejados, mientras que cuando la reflexión tiene lugar en la superficie de separación de dos sustancias transparentes y bajo el ángulo de Brewster el rayo reflejado resulta polarizado totalmente en el plano de incidencia. Si la reflexión tiene lugar en una superficie metálica, entre las vibraciones paralelas y perpendiculares al plano de incidencia se produce una diferencia de fase determinada. *Por esto, la luz polarizada linealmente, al reflejarse en un metal, resulta polarizada elípticamente.*

La teoría de las propiedades ópticas de los metales se basa en la suposición de que en los metales existen electrones libres. Por esto, en lugar de las fórmulas de Fresnel obtenemos las siguientes:

1) para la relación entre los flujos de energía de los rayos reflejado e incidente, cuando las vibraciones son perpendiculares al plano de incidencia (luz polarizada en el plano de incidencia)

$$\left(\frac{W_1'}{W_1}\right)_{\parallel} = \left(\frac{A_{s1}'}{A_{s1}}\right)^2 = \frac{(n-\cos i_1)^2+\varkappa^2}{(n+\cos i_1)^2+\varkappa^2}, \qquad (2)$$

en lugar de la fórmula (5) del § 277;

2) para la relación entre los flujos de energía de los rayos reflejado e incidente, cuando las vibraciones son paralelas al plano de incidencia (luz polarizada perpendicularmente al plano de incidencia):

$$\left(\frac{W_1'}{W_1}\right)_{\perp} = \left(\frac{A_{p1}'}{A_{p1}}\right)^2 = \frac{\left(n-\frac{1}{\cos i_1}\right)^2+\varkappa^2}{\left(n+\frac{1}{\cos i_1}\right)^2+\varkappa^2}, \qquad (3)$$

en lugar de la fórmula (5) del § 277.

En las fórmulas (2) y (3) n es el índice de refracción del metal y $\varkappa$, el coeficiente de absorción determinado por la correlación (1a).

Cuando la luz incide perpendicularmente ($i_1 = 0$) ambas fórmulas (2) y (3) toman la forma:

$$\left(\frac{W_1'}{W_1}\right)_{\parallel} = \left(\frac{W_1'}{W_1}\right)_{\perp} = \frac{(n-1)^2+\varkappa^2}{(n+1)^2+\varkappa^2}, \qquad (4)$$

en lugar de la fórmula (6a) del § 277.

Los primeros intentos para hallar directamente por vía experimental los coeficientes n y $\varkappa$ para los metales se llevaron a cabo a finales del siglo pasado. Para ello se emplearon películas de metal tan finas que dejaban pasar cierta cantidad de luz. Otro procedimiento para hallar estos coeficientes consiste en aplicar las fórmulas teóricas que relacionan las constantes n y $\varkappa$ con las magnitudes que caracterizan la polarización de la luz reflejada en un metal. Los valores de n y $\varkappa$ hallados por este procedimiento para una serie de metales se dan en la tabla III.

Tabla III

Valores del índice de refracción n y de los coeficientes de absorción $\varkappa$ y de reflexión r de diversos metales para $\lambda = 0{,}589\ \mu$

Metal	$\varkappa$	n	r en %
Hierro	1,63	1,51	32,6
Níquel	3,32	1,79	62,0
Cobre	4,26	2,06	70,1
Oro	2,82	0,37	85,1
Plata	3,64	0,18	95,0
Sodio	2,61	0,005	99,7

Como puede verse, para una serie de metales el índice de refracción es menor que la unidad. En el § 282 se indicará la posibilidad de que el índice absoluto de refracción n sea menor que la unidad.

Teóricamente las constantes ópticas n y $\varkappa$ de los metales se relacionan con la conductividad eléctrica σ por medio de la correlación:

$$n\varkappa = \frac{\sigma}{\nu},$$

siendo ν la frecuencia de la luz. Esta correlación se cumple perfectamente para los rayos infrarrojos lejanos. Pero para los rayos visibles se obtiene una gran divergencia que hace suponer que cuando la luz visible se refleja en un metal desempeñan un papel importante no sólo los electrones libres, sino también los ligados.

§ 279. Dispersión de la luz. Se entiende por *dispersión de la luz* el conjunto de los fenómenos debidos a la relación de dependencia que existe entre los índices de refracción de las sustancias y las longitudes de las ondas luminosas. La luz de distintas longitudes de onda, es decir, de diferentes colores, no se refracta por igual en la superficie de separación de dos medios transparentes. Para ser más concre-

tos vamos a estudiar la refracción en la superficie de separación entre el vacío y una sustancia determinada, es decir, vamos a hablar de cómo depende de la longitud de onda λ el valor absoluto del índice de refracción. En este caso podemos escribir que para cada sustancia concreta el índice de refracción n es una función determinada de la longitud de onda λ:

$$n = f(\lambda). \tag{1}$$

Se llama *dispersión de una sustancia* la magnitud que determina la rapidez con que varía su índice de refracción n al variar la longitud de onda. Si a dos longitudes de onda λ_1 y λ_2 les corresponden

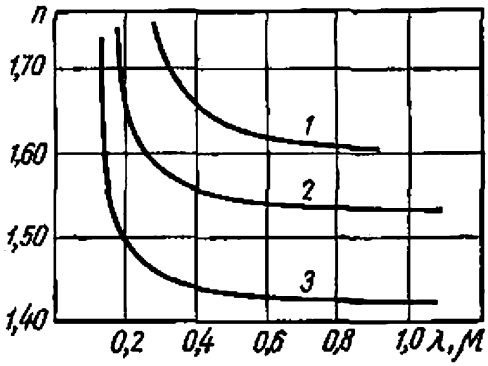

Fig. 124. Variación del índice de refracción n en función de la longitud de onda: *1*, para el vidrio (flint ligero); *2*, para el cuarzo; *3*, para la fluorita.

los valores n_1 y n_2 de los respectivos índices de refracción, la dispersión media de la sustancia $\bar{\nu}$ en la zona comprendida entre las longitudes de onda λ_1 y λ_2 vendrá representada por la relación

$$\bar{\nu} = \frac{n_2 - n_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\Delta n}{\Delta \lambda}, \tag{2}$$

donde $\Delta n = n_2 - n_1$ y $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. El valor de la dispersión de la sustancia ν en las proximidades de una longitud de onda λ determinada puede obtenerse pasando en el límite a un intervalo infinitamente pequeño de longitudes de onda; entonces la relación (2) se sustituye por la derivada del índice de refracción n respecto a la longitud de onda λ:

$$\nu = \frac{dn}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} f(\lambda). \tag{2a}$$

El índice de refracción n de todas las sustancias *transparentes* aumenta monótonamente al disminuir la longitud de onda λ. Esto está de acuerdo con el hecho de que en los cuerpos transparentes los rayos violetas se refractan más que los verdes y éstos a su vez más que los rojos. En la fig. 124 se da un diagrama de las variacio-

nes de n en función de λ para el vidrio (flint ligero), el cuarzo y la fluorita. El índice de refracción n aumenta con mucha rapidez al disminuir la longitud en la zona de las ondas cortas, de donde, según la igualdad (2a), se deduce que en todas estas sustancias aumenta la dispersión al disminuir la longitud de onda.

La diferente refrangibilidad de los rayos de luz de distintos colores permite descomponer la luz compleja en sus componentes monocromáticas. El primero en realizar este experimento fue Newton, en el año 1672. El esquema de este experimento se ilustra con la fig. 125, tomada del libro de Newton «Optica». Un rayo de luz solar

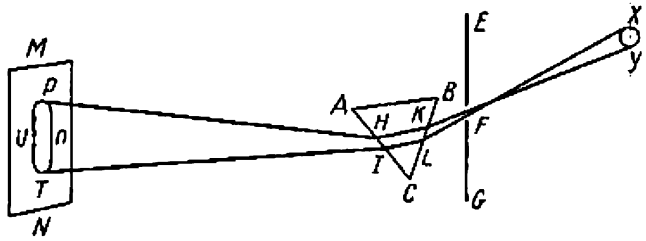

Fig. 125. Esquema del experimento de Newton para obtener el espectro por medio de un prisma.

pasa a través de un pequeño agujero redondo F practicado en el postigo de una ventana EG. Después de refractarse en el prisma ABC, el rayo se proyecta sobre una hoja de papel blanco MN. Al occurrir esto la imagen del agujero redondo F se alarga y toma forma de franja coloreada TP. El extremo rojo de la franja T corresponde al rayo $FLIT$ que es el que menos se desvía en el prisma, y el extremo violeta P, al rayo $FKHP$ que es el que más desviación experimenta. Newton dio el nombre de *espectro* a la franja coloreada TP. La luz solar produce un *espectro continuo* con transiciones suaves de unos colores a otros, lo que desde el punto de vista actual supone la existencia en dicha luz de vibraciones de todas las longitudes de onda posibles*). Cuando se emplean ciertas fuentes de luz artificiales (como llamas coloreadas con sales metálicas, gases luminiscentes en presencia de descargas eléctricas, etc.) el espectro que se obtiene es *de rayas* y está formado por franjas brillantes aisladas («rayas») soparadas entre sí por espacios oscuros. Esto indica que la luz de estos focos consta solamente de las vibraciones correspondientes a determinadas longitudes de onda.

La forma analítica de la función (1) que determina el valor del índice de refracción n en función de la longitud de onda λ, puede

*) En realidad en el espectro del Sol existen líneas oscuras estrechas (líneas de Fraunhofer), debidas a la absorción de la luz por las capas extremas de la atmósfera del Sol. Pero en los experimentos de Newton estas líneas no eran visibles.

representarse aproximadamente de la siguiente manera:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}. \tag{3}$$

En este caso la dispersión de la sustancia vendrá representada por la expresión

$$\nu = \frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}.$$

La influencia que ejerce la sustancia en la propagación de la luz se debe a la acción mutua entre ésta y los átomos y las moléculas que constituyen dicha sustancia. Esta acción mutua ocasiona la variación de la velocidad de la luz v y, por consiguiente, determina el valor del índice de refracción $n = \frac{v}{c}$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

La teoría de la dispersión se basa en el estudio de la interacción que existe entre las ondas luminosas y las partículas cargadas (electrones y cargas positivas) que entran en la composición de los átomos y de las moléculas. Para este estudio se parte de la suposición de que las fuerzas que hacen que las partículas cargadas de los átomos y de las moléculas se mantengan próximas a sus posiciones de equilibrio son fuerzas cuasielásticas. Por lo tanto, cada átomo o molécula tiene su propia frecuencia de vibración ω_0. Cuando una onda luminosa incide sobre la sustancia, las partículas cargadas de los átomos y las moléculas, influidas por aquélla, entran en vibración forzada con una frecuencia que coincide con la de la onda incidente ω.

La onda electromagnética (luminosa) al propagarse a través de la sustancia con una velocidad c produce las vibraciones forzadas de las partículas. A esto se debe que junto a cada partícula se produzcan ondas *secundarias*. La amplitud y la fase de estas ondas secundarias viene determinada por la amplitud y la fase de las vibraciones forzadas de las partículas; estas últimas dependen a su vez de la correlación entre la frecuencia de la onda incidente ω y la de las vibraciones propias ω_0.

En el t. I, § 103, se demostró que una fuerza periódica excitadora de frecuencia ω produce vibraciones forzadas de amplitud

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \tag{4}$$

cuya fase α se determina por la igualdad

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2};$$

siendo h una constante y β un coeficiente que caracteriza el amortiguamiento de las vibraciones del sistema. Si el valor del factor β

es pequeño, el papel que desempeña la amortiguación solamente puede apreciarse cuando la frecuencia de la fuerza excitadora ω se diferencia muy poco de la de las vibraciones propias ω_0. Por esta razón, cuando la amortiguación es débil, para todas las frecuencias ω que no se aproximen demasiado a ω_0 podemos escribir aproximadamente:

$$A = \frac{h}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{4a}$$

La amplitud y la fase de las vibraciones forzadas dependen de la correlación entre las frecuencias ω_0 y ω. La amplitud A es muy grande cerca de la resonancia. Cuando $\omega \ll \omega_0$ la amplitud A es mucho menor y al disminuir ω tiende a un límite constante diferente de cero. Si $\omega \gg \omega_0$ la amplitud de las vibraciones forzadas A disminuye hasta cero al crecer la frecuencia ω de la fuerza excitadora. La fase de las vibraciones forzadas α varía desde cero hasta $-\pi$ cuando ω varía desde cero hasta frecuencias mucho mayores que ω_0. Cerca de la resonancia (cuando la amortiguación es pequeña) la fase se aproxima a $-\frac{\pi}{2}$. Estas mismas deducciones son aplicables a la amplitud y la fase de las ondas secundarias.

Las ondas secundarias, componiéndose con las primarias, dan lugar a una onda resultante cuya amplitud y fase son diferentes de las amplitudes y fases de las ondas primarias. Esto conduce al hecho de que la onda pasa a través de la sustancia con una velocidad de fase diferente de la velocidad a que se propaga en el vacío. Esta diforencia de velocidades será tanto mayor cuanto más intensas sean las vibraciones forzadas de las partículas.

De aquí se deduce que la luz (es decir, las ondas electromagnéticas) cuya frecuencia sea mucho menor que la de las vibraciones propias de los átomos o de las moléculas pasará a través de la sustancia con una velocidad que prácticamente no depende de la frecuencia, pero que es diferente de la velocidad de la luz en el vacío (puesto que $A \approx \text{const} \neq 0$)*).

La luz cuya frecuencia es muy alta (es decir, que supera sensiblemente la frecuencia de las vibraciones propias de los átomos) produce ondas secundarias cuya amplitud se aproxima a cero y su velocidad de paso por la sustancia se aproxima a la velocidad de la luz en el vacío. El índice de refracción, en este caso, se aproxima a la unidad. En los dos casos estudiados, según se deduce de la teoría, la absorción de la luz es muy pequeña. Cuando los valores de las frecuencias ω se aproximan a los de ω_0, la velocidad de la luz en la sustancia se diferencia mucho de su velocidad en el vacío. A esto

*) Esta velocidad se determina por la fórmula (1) del § 275, donde puede tomarse como valor de la constante dieléctrica ε el obtenido en los experimentos electrostáticos y $\mu = 1$.

se debe que, para estas frecuencias, el índice de refracción también se diferencie mucho de la unidad: cuando $\omega < \omega_0$ resulta «anormal» por ser demasiado grande, y cuando $\omega > \omega_0$, «anormal» por ser demasiado pequeño. Además, cuando ω se diferencia poco de ω_0, como la amplitud de las vibraciones forzadas es grande, también lo es la absorción.

Las sustancias compuestas por átomos o moléculas, cuyas frecuencias propias ω_{0i} forman un conjunto determinado, dan en los espectros de la luz que pasa por ellas bandas estrechas («rayas») de absorción. El índice de refracción es constante en las zonas que están lejos de las rayas de absorción, pero varía rápidamente con la frecuencia y se diferencia mucho de la unidad en las proximidades de cada una de las rayas de absorción, donde la influencia mutua entre la luz y la sustancia es grande.

La teoría de la dispersión puede basarse también, de una manera más formal, en la relación que existe entre el índice de refracción y la constante dieléctrica ε.

Según la teoría electromagnética de la luz el índice de refracción se determina por la igualdad (2) del § 275:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Prácticamente puede considerarse que para todos los dieléctricos transparentes la permeabilidad magnética μ es igual a la unidad, por lo tanto tendremos que

$$n^2 = \varepsilon.$$

En este caso, como ya dijimos en el § 275, el valor de la constante dieléctrica ε no puede considerarse igual al que tiene para los procesos eléctricos estáticos o que se desarrollan lentamente. En el t. II vimos que las propiedades dieléctricas de una sustancia dependen de su polarización, la cual se produce como resultado del desplazamiento que sufren las partículas cargadas dentro de los átomos o de las moléculas, respecto a su posición de equilibrio. Para los campos eléctricos alternos de gran frecuencia, como son los de la onda luminosa, estos desplazamientos se expresan por términos del tipo (4) o (4a). Por esto, como demuestran los cálculos más minuciosos, el cuadrado del índice de refracción n^2 viene expresado por la fórmula de dispersión siguiente:

$$n^2 = 1 + \frac{a_1}{\omega_{01}^2 - \omega^2} + \frac{a_2}{\omega_{02}^2 - \omega^2} + \ldots, \qquad (5)$$

donde ω_{01}, ω_{02}, ... son las frecuencias de las vibraciones propias de los átomos o las moléculas, y a_1, a_2, ... son unas constantes determinadas. Como entre la longitud de onda λ y la frecuencia cíclica ω existe la correlación

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega},$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, la fórmula (5) puede tomar también la forma

$$n^2 = 1 + \frac{b_1\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{b_2\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \ldots, \qquad (5a)$$

siendo b_1, b_2, . . . unas nuevas constantes, y λ_1, λ_2, . . ., las longitudes de las ondas que corresponden a la resonancia exacta. La fórmula (5a) da la variación del índice de refracción n entre las rayas de absorción. Si en la fórmula (5a) se toman solamente dos términos (caso de una sustancia con dos frecuencias de vibración propia), se obtiene la variación de $n^2 - 1$ en función de λ que representa la

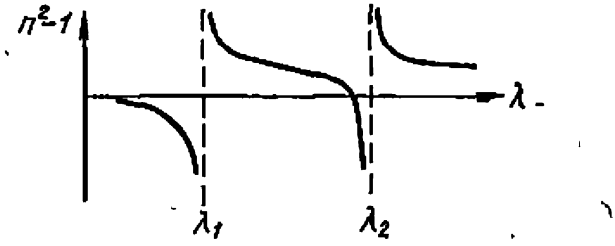

Fig. 126. Variación del índice de refracción n en función de λ en las inmediaciones de dos rayas de absorción λ_1 y λ_2.

fig. 126. Las líneas punteadas indican la situación de las rayas de absorción de la sustancia λ_1 y λ_2. La curva de dispersión se tuerce bruscamente al aproximarse a las rayas de absorción. Junto a cada una de las rayas de absorción el índice de refracción n toma valores pequeños por el lado de las longitudes de onda pequeñas ($\lambda < \lambda_i$) y valores bastante grandes por el lado de las longitudes de onda grandes ($\lambda > \lambda_i$). Por la fórmula (5a), para las longitudes de onda inmediatamente menores que cualquiera de las λ_i se obtienen valores negativos de n^2, es decir, valores imaginarios de n. Esto ocurre porque en dicha fórmula no se tiene en cuenta el factor de amortiguamiento β. Por esta razón la fórmula (5a) puede aplicarse únicamente a las regiones en que β es muy pequeño. A medida que se alejan de las rayas de absorción los valores del índice de refracción n se convierten en magnitudes constantes.

La dispersión representada en la fig. 126, con sus desviaciones características junto a las rayas de absorción, recibe el nombre de *dispersión anormal*. Aunque en realidad esta marcha de la dispersión no tiene nada de anormal, sino al contrario, es la más típica y la que responde a la esencia física del fenómeno. La región en que el índice de refracción varía monótonamente entre dos rayas de absorción refleja el carácter de la dispersión que producen los cuerpos transparentes (fig. 124), que se llama *dispersión normal*.

§ 280. Observación de la dispersión. Los primeros experimentos para observaciones de este tipo fueron realizados por Newton sobre la refracción de la luz en un prisma que describimos en el párrafo anterior. Newton propuso toda una serie de métodos para observar la dispersión por medio de prismas, entre ellos se encuentra el método de los *prismas cruzados*, que pone de manifiesto de manera muy evidente la marcha de la dispersión. El esquema del método de los prismas cruzados se muestra en la fig. 127. La luz blanca pasa a través de la rendija vertical S y de los dos prismas P_1 y P_2 cuyas aristas refractoras son perpendiculares entre sí. Con ayuda de las lentes L_1 y L_2 se recoge la luz en la pantalla AB. Si sólo se interpusiera

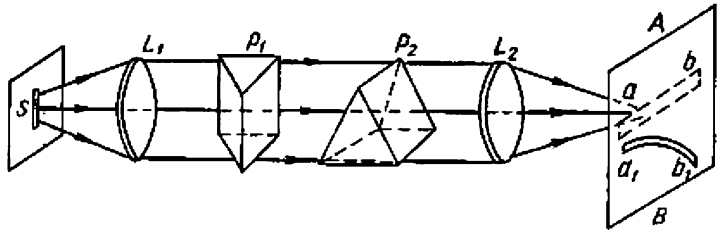

Fig. 127. Método de los prismas cruzados.

el prisma P_1, con la arista de refracción vertical, en la pantalla AB se obtendría el espectro continuo horizontal que se representa por la franja punteada ab. Al interponerse el segundo prisma cada rayo se desviará hacia abajo tanto más cuanto mayor sea el índice de refracción del prisma P_2. Gracias a esto todo el espectro ab resulta desplazado hacia abajo y ocupa la posición a_1b_1. Su extremo rojo a_1 será el que menos se desvíe, mientras que el violeta b_1 será el que más. De la misma forma cada uno de los puntos del espectro se desviará tanto más cuanto mayor sea el índice de refracción para la longitud de onda correspondiente a este lugar del espectro. La franja a_1b_1 aparece torcida y da una idea evidente de la marcha de la dispersión en el prisma P_2.

La dispersión que producen los cristales de cuarzo, fluorita y de otras muchas sustancias en la zona visible del espectro se debe principalmente a la existencia de fuertes bandas de absorción en la zona ultravioleta. La segunda zona de absorción de estas sustancias se encuentra en la zona infrarroja remota y ejerce menos influencia. De forma aproximada, para la parte visible del espectro, la relación que para estas sustancias existe entre n^2 y λ puede representarse con la fórmula de dispersión (5a) del § 279 tomando un solo término:

$$n^2 \cong 1 + \frac{b}{1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2}}.$$

Desarrollando en serie el segundo miembro de esta fórmula, obtenemos

$$n^2 \cong 1 + b\left[1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^4 + \ldots\right].$$

Si $\frac{\lambda_1}{\lambda} \ll 1$, esta última expresión nos da para n el valor aproximado de

$$n \cong A + \frac{B}{\lambda^2}, \qquad (1)$$

siendo A y B dos constantes convenientemente elegidas. La fórmula (1) coincide con la (3) del párrafo anterior. Por lo tanto, la posibilidad de aplicar la fórmula aproximada de la dispersión a las sustancias transparentes queda confirmada teóricamente.

La dispersión anormal se observa con mayor facilidad en los vapores metálicos, los cuales producen en la zona visible del espectro

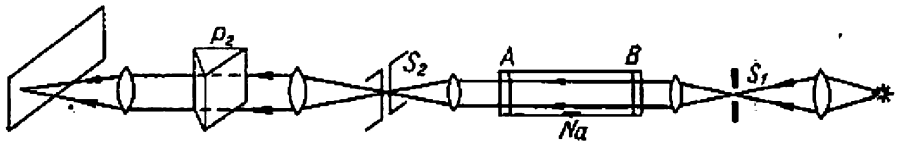

Fig. 128. Método para observar la dispersión anormal en vapor de sodio.

rayas de absorción muy acusadas. Así, los vapores de sodio producen en la zona amarilla dos rayas de absorción próximas y bastante intensas cuyas longitudes de onda son respectivamente $\lambda_1 = 0{,}5890\ \mu$ y $\lambda_2 = 0{,}5896\ \mu$. Wood utilizó para observar la dispersión anormal en el vapor de sodio el método de los prismas cruzados. El esquema de su experimento puede verse en la fig. 128. La luz procedente de una fuente de espectro continuo pasa a través de la ranura horizontal S_1 y luego, en forma de haz paralelo, a través del recipiente AB, en el que se ha colocado sodio metálico y se ha hecho el vacío. Al salir de este recipiente la luz se encuentra con la rendija vertical S_2 y después es descompuesta por el prisma P_2 produciendo el espectro. La arista de refracción del prisma P_2 es paralela a la rendija S_2 y el espectro que se obtiene tiene la forma de franja horizontal. La existencia de la rendija horizontal S_1 hace que esta franja sea estrecha. Si el recipiente AB se calienta por abajo y se enfría por arriba, en él se formará una columna de vapor de sodio que no será homogénea. En su parte inferior la densidad del vapor será mayor y en la superior, menor. Esta columna de vapor de densidad no homogénea actúa lo mismo que un prisma cuya arista de refracción estuviera situada en la parte superior del recipiente y orientada perpendicularmente a su longitud. Como resultado se obtiene un «prisma» de vapor de sodio que está cruzado con el prisma P_2. Este último, como

explicamos anteriormente, desvía todas las zonas del espectro. Pero ahora, como la dispersión que producen los vapores de sodio tiene carácter anormal, el espectro desplazado no está torcido monótonamente, sino que presenta las desviaciones características junto a las longitudes de onda λ_1 y λ_2. En los lugares correspondientes a estas longitudes de onda aparecen bandas oscuras de absorción. En la fig. 129, *a*, se muestra la desviación del espectro que se obtiene. Por la parte de la raya de absorción correspondiente a las longitudes de onda mayores el espectro se desvía marcadamente hacia abajo, lo que se debe a los grandes valores que toma el índice de refracción del sodio en esta zona. Por el contrario, por la parte de la raya de absorción correspondiente a las longitudes de onda menores el espectro se desvía hacia arriba, lo que indica que el valor del índice de refracción $n < 1$. Entre las dos rayas de absorción el índice de refracción decae rápidamente hacia el lado en que aumentan las longitudes de onda. Cuando el vapor es muy denso la desviación del espectro aumenta y toma la forma que se representa en la fig. 129, *b*.

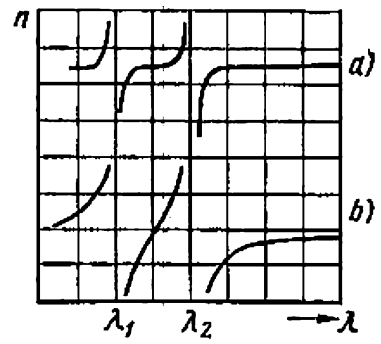

Fig. 129. Dispersión anormal en vapor de sodio junto a las rayas de absorción: *a*, cuando la densidad de los vapores de sodio es pequeña; *b*, cuando esta densidad es grande.

Otro método de estudio de la dispersión anormal es el propuesto por D. S. Rozhdiéstvenski. En este método se utiliza un interferómetro de Jamin modificado (§ 264). Esta modificación hace que la separación entre los haces 1 y 2 pueda alcanzar muchos centímetros. El esquema del interferómetro de Rozhdiéstvenski se reproduce en la fig. 130, donde A_1, A_2, A_3 y A_4 son cuatro espejos planos de los cuales A_2 y A_3 son espejos propiamente dichos y los otros dos son espejos semitransparentes. Al reflejarse la luz en los espejos A_1 y A_2 se producen los haces 1 y 2, que están muy separados entre sí, pero que después se vuelven a juntar por medio de los espejos A_3 y A_4 e interfieren.

Rozhdiéstvenski empleó su interferómetro para estudiar la dispersión anormal. La esencia de este método consiste en lo siguiente: en cada una de las dos ramas del interferómetro se coloca una cubeta, B_1 y B_2 (fig. 131). Estas cubetas son exactamente iguales. En una de ellas, por ejemplo, en la B_2, se coloca el metal a estudiar; esta cubeta puede calentarse en un horno eléctrico hasta una temperatura suficiente para obtener en ella vapor del metal a la presión que se desee. En la segunda cubeta se hace el vacío. Hecho esto se hace llegar al interferómetro una luz procedente de un foco de espectro continuo S. La figura de interferencia que se produce se proyecta con la lente L_2 sobre la rendija del espectrógrafo C. Supongamos que al principio la cubeta B_2 está fría y no contiene vapor metálico. En este caso el interferómetro producirá en la rendija del espectrógrafo una serie de máximos y mínimos de interferencia en forma de franjas perpendiculares a la longitud de dicha rendija. La posición que ocupa el máximo correspondiente a la diferencia de marcha igual a cero no depende

de la longitud de onda. De esto se deduce que en el espectro continuo que produce el espectrógrafo a este máximo le corresponderá una franja horizontal brillante que se extenderá a todo lo largo del espectro. Los máximos correspondientes a las diferencias de marcha de una, dos, tres, etc., longitudes de onda

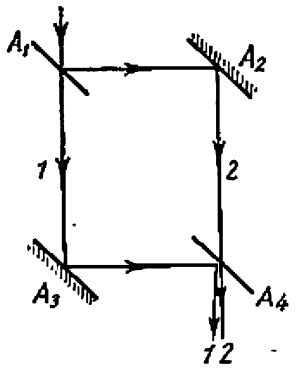

Fig. 130. Esquema del interferómetro de D. S. Rozhdiéstvenski.

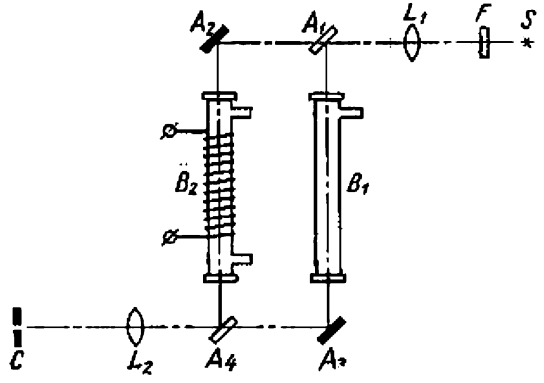

Fig. 131. Método de Rozhdiéstvenski para observar la dispersión anormal.

se encontrarán a diferentes alturas de la rendija, según la longitud de las ondas respectivas de la luz incidente, y en el espectro continuo a estos máximos les corresponderán franjas brillantes situadas por encima y por debajo de la franja nula que se dispersarán en forma de abanico desde la zona azul del espectro hasta la roja. Entre las franjas brillantes se hallarán las franjas oscuras propias de los mínimos de la figura de interferencia proyectada sobre la rendija. Como resultado se tiene que el espectro continuo estará rayado a lo largo por franjas alternativamente brillantes y oscuras.

Si en estas condiciones se calienta la cubeta B_2 lo suficiente para que en ella se genere vapor del metal que se estudia, la columna formada por este vapor producirá una diferencia de marcha complementaria y las franjas de interferencia se desplazarán en una magnitud proporcional a dicha diferencia. Pero la diferencia de marcha para una longitud determinada de la columna de vapor es proporcional a $n - 1$, siendo n el índice de refracción del vapor. Este desplazamiento de las franjas de interferencia hace que el espectrógrafo reproduzca directamente la marcha de la dispersión en toda la zona que se observa. Si a esta zona le corresponde cualquiera de las rayas de absorción del vapor que se estudia, las franjas de interferencia se torcerán junto a ella de la forma que representa la fig. 132 *a*. Su desviación muestra claramente la variación que experimenta el índice de refracción en las inmediaciones de las rayas de absorción.

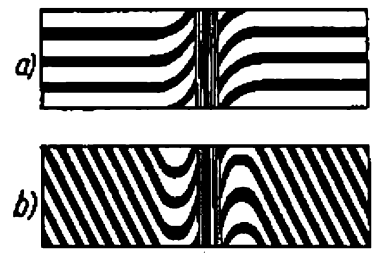

Fig. 132. Torcedura de las curvas de interferencia junto a las rayas de absorción.

Posteriormente Rozhdiéstvenski perfeccionó el procedimiento antedicho de forma que permite realizar mediciones cuantitativas exactas. Rozhdiéstvenski demostró que si en la segunda rama del interferómetro se intercala una lámina de vidrio plano-paralela las franjas de interferencia que se observan en el espec-

trógrafo se tuercen y forman junto a las rayas de absorción una especie de «ganchos» (fig. 132, *b*). Para un espesor determinado de la lámina de vidrio la posición de los «ganchos» depende de la magnitud que tenga la dispersión junto a la raya de absorción del vapor que se estudie. Cuanto mayor sea la dispersión del vapor junto a la raya tanto más lejos de la misma se formarán los «ganchos». De esta forma, por la posición de los «ganchos» se puede medir directamente la magnitud de la dispersión que produce el vapor junto a las rayas de absorción.

La fórmula de la dispersión (5) del § 279 se obtiene partiendo de la suposición de que la amortiguación de las vibraciones de los electrones es pequeña.

Cuando se tiene en cuenta la amortiguación, el índice de refracción n resulta ser una función más compleja de la frecuencia ω que la que da la fórmula de la dispersión (5) del § 279. Si $\varkappa$ es el coeficiente de absorción determinado por la fórmula (1 a) del § 278, la relación entre n y $\varkappa$ tiene la forma:

$$\left.\begin{aligned} 2n^2\varkappa &= \sum_i \frac{a_i g_i \omega}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + g_i^2\omega^2}\,; \\ n^2(1-\varkappa^2) &= 1 + \sum_i \frac{a_i(\omega_{0i}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + g_i^2\omega^2}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

En estas fórmulas a_i, g_i y ω_{0i} son unas constantes determinadas. Cuando $g_i = 0$ la primera de estas fórmulas da $\varkappa = 0$ y la segunda toma la forma (5) del § 279.

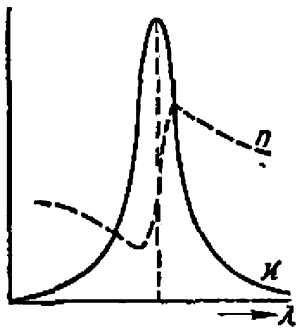

Fig. 133. Variación del coeficiente de absorción $\varkappa$ y del índice de refracción n en función de λ en la zona de la franja de absorción.

Si existen varias bandas de absorción, en las fórmulas (2) entran las sumas de los términos correspondientes a los distintos valores del subíndice de i.

Las fórmulas (2) permiten seguir la variación que experimenta el índice de refracción dentro de una banda de absorción ancha. En la fig. 133 la línea punteada representa los valores de n en función de λ, mientras que la de trazo continuo, los valores de $\varkappa$ en función de λ. Como puede verse, el índice de refracción n también toma aquí grandes valores por el lado de las ondas largas de la banda de absorción y pequeños por el de las ondas cortas. Dentro de la propia banda de absorción existe una transición suave de los grandes valores del índice de refracción a los pequeños. Dentro de esta banda el índice de refracción disminuye al disminuir la longitud de onda, es decir, su variación va al contrario («anormal») de como tenía lugar en los medios transparentes.

La absorción de la sustancia deberá ser muy considerable para que pueda influir en la variación del índice de refracción. Por ejemplo, en los vidrios coloreados no suele observarse la dispersión «anormal», ya que el papel fundamental lo desempeña la absorción en aquellas zonas en que es más intensa, es decir, en la ultravioleta y en la infrarroja. La influencia que ejerce la absorción en la marcha de la dispersión fue estudiada experimentalmente a finales del siglo pasado empleando colorantes enérgicos (fucsina, cianina). Para poder realizar las mediciones dentro de la banda de absorción el colorante debe tener forma de capas delgadas.

En la fig. 134 se dan los resultados de las mediciones del coeficiente de absorción $\varkappa$ y del índice de refracción n de la cianina, los cuales concuerdan con los de las fórmulas (2). Las mediciones se llevaron a cabo en unos prismas delgados y agudos de cianina sólida pegados sobre un vidrio.

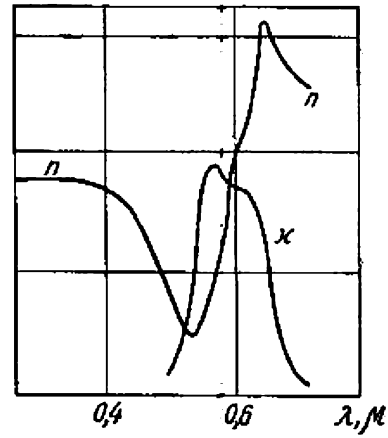

Fig. 134. Variación del coeficiente de absorción $\varkappa$ y del índice de refracción n de la cianina en función de la longitud de onda λ.

Al deducir la fórmula de dispersión se admite que sobre la carga que realiza las vibraciones forzadas bajo la acción de las ondas incidentes no actúan las cargas contiguas de los demás átomos o moléculas. Pero cuando se trata de gases a presiones suficientemente grandes y sobre todo de cuerpos líquidos o sólidos esta suposición es falsa. En estos casos hay que tener en cuenta la influencia que sobre cada carga dada ejercen las cargas vecinas. Esto conduce a considerar el índice de refracción de la luz en función del número de partículas por unidad de volumen, es decir, de la densidad de la sustancia. La teoría demuestra que debe existir una correlación relativamente sencilla entre el índice de refracción de la sustancia n y su densidad δ:

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{\delta}=\text{const.} \qquad (3)$$

Esta correlación fue deducida simultánea e independientemente por H. A. Lorentz y L. Lorenz en el año 1880 y se conoce con el nombre de fórmula de Lorentz—Lorenz. La magnitud $\frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{\delta}$ se llama *refractividad de la sustancia* R. Los experimentos realizados demuestran que en realidad son muchos los casos en que cuando varía la densidad de los cuerpos transparentes bajo efecto de la presión, por variación de la temperatura e incluso por cambio de su estado de agregación, la refractividad R permanece invariable.

En la tabla IV se dan los valores de la refractividad R del aire a diversas presiones para la parte central del espectro visible. La densidad del aire en condiciones normales se ha considerado igual a la unidad.

Como puede verse, al aumentar la densidad del aire hasta 150 veces, la refractividad R permanece invariable dentro de los límites de la exactitud de

Tabla IV

Densidad δ	Refractividad $R \cdot 10^7$	$(n-1) \cdot 10^4$
1	1 953	2,9
42,1	1 959	12,4
96,2	1 961	28,4
149,5	1 956	44,2

la observación, mientras que la magnitud $n - 1$, en que n es el índice de refracción varía mucho. Cuando se producen mezclas la refractividad R resulta aditiva. Si R_i es la refractividad de uno de los componentes de la mezcla y m_i es la masa de este componente en la unidad de volumen de la mezcla, la refractividad de dicha mezcla R será:

$$mR = \sum_i m_i R_i, \tag{4}$$

donde m es la masa de la unidad de volumen de la mezcla.

En Química física es posible hallar la refractividad de un cuerpo compuesto conociendo la refractividad de los elementos que lo componen. Se entiende por *refracción atómica* de un elemento químico el producto de la refractividad de dicho elemento R_i por su peso atómico A_i. Análogamente se llama *refracción molecular* de un cuerpo compuesto el producto de la refractividad de dicho cuerpo R por su peso molecular M. *La refracción molecular es el resultado de la adición de las refracciones atómicas* de los elementos que forman el compuesto. Si el número de átomos de una molécula dada es igual a k_i, para la refracción molecular tendremos:

$$MR = \sum_i k_i A_i R_i. \tag{5}$$

El cumplimiento de las correlaciones (4) y (5) indica que la acción mutua solamente tiene lugar entre un tipo de partículas determinado. Cuando actúan entre sí partículas de tipos diferentes deja de cumplirse la regla de la adición de las refracciones atómicas de los elementos componentes.

§ 281. Uso de los aparatos espectroscópicos. En el § 279 describimos el experimento de Newton para obtener espectros por medio de prismas. En la actualidad también se emplean con frecuencia aparatos con prismas para el estudio de los espectros, estos aparatos se llaman *espectroscopios* si sirven únicamente para la observación visual o *espectrógrafos* si permiten fotografiar los espectros.

El esquema de un espectrógrafo de prisma se muestra en la fig. 135, donde S es una rendija, K es el colimador con el objetivo L_1, A es el prisma y L_2, el segundo objetivo, en cuyo plano focal se forma el espectro. La rendija S se ilumina con la luz que irradia el foco I a través de una lente. El objeto del colimador es conseguir el haz de rayos paralelos que después incide sobre el prisma. Supongamos que la rendija se ilumina con una luz monocromática cualquiera,

por ejemplo, con luz roja; en este caso el prisma no hace más que desviar los rayos y el objetivo L_2 reproduce en su plano focal principal la imagen de la rendija S'_r. Si la rendija se ilumina con luz monocromática de otra longitud de onda, por ejemplo, con luz violeta, el prisma desviará más sus rayos y la imagen de la rendija S'_v ocupará otro lugar. Finalmente, si el foco proporciona una mezcla de rayos monocromáticos de diferentes longitudes de onda λ_1, λ_2, λ_3, . . ., el espectro estará formado por distintas rayas brillantes, y cada una de ellas será la imagen de la rendija que produce la luz de la

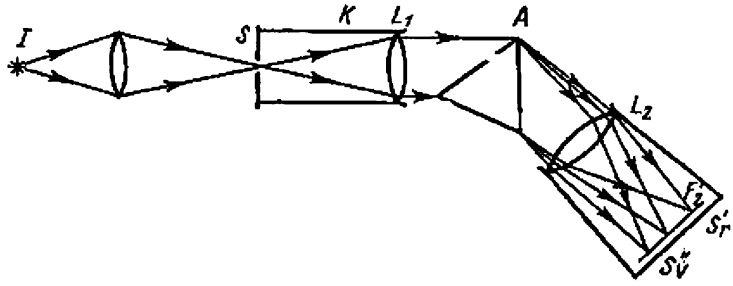

Fig. 135. Esquema de un espectrógrafo de prisma.

longitud de onda correspondiente (espectro de rayas). Cuando la rendija se ilumina con luz blanca sus imágenes de distintos colores se superponen entre sí y producen una franja irisada continua (espectro continuo).

Cuando los espectros que se trata de estudiar son los de la zona visible o de la infrarroja más próxima, las lentes y los prismas del espectrógrafo se hacen de vidrio. Pero si se trata de estudiar espectros de la zona ultravioleta la sustancia para hacer las lentes y los prismas tiene que ser transparente a los rayos ultravioletas; en este caso suele utilizarse el cuarzo.

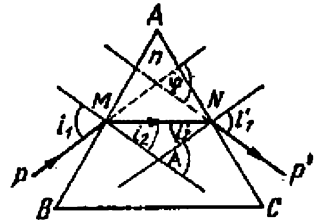

Fig. 136. Refracción de la luz en el prisma.

Para poder dar una característica cuantitativa de la acción de un espectrógrafo, examinemos la refracción de la luz producida por un prisma triangular simétrico (fig. 136). El rayo monocromático PM, después de refractarse en el prisma, emerge en la dirección NP' que forma con la dirección primitiva un ángulo determinado φ. Para este prisma el ángulo de desviación φ depende del valor que tenga el ángulo de incidencia i_1 del rayo PM en el prisma. Cuando este ángulo i_1 toma un valor determinado, el ángulo de desviación φ alcanza un valor mínimo φ_0. Este valor del ángulo φ_0 se llama *ángulo de desviación mínimo*.

Los cálculos demuestran que $\varphi = \varphi_0$ cuando el rayo pasa por el prisma de una forma simétrica, es decir, cuando el rayo MN es paralelo a la base del

prisma BC. Detengámonos en este caso y veamos la relación que existe entre el valor del ángulo de desviación mínimo φ_0, el ángulo de refracción del prisma o simplemente ángulo del prisma A y el índice de refracción de la sustancia de que está hecho.

Llamemos i_2 al ángulo de refracción del rayo en la primera cara del prisma AB y supongamos que el rayo MN incide sobre la cara AC formando un ángulo i'_2. De acuerdo con la fig. 136, tenemos:

$$i_2 + i'_2 = A.$$

Cuando el rayo MN pasa por el prisma simétricamente $i'_2 = i_2$, y por la igualdad anterior hallamos que

$$i_2 = \frac{A}{2}. \tag{1}$$

Por la misma figura tenemos que

$$\varphi_0 = (i_1 - i_2) + (i'_1 - i'_2).$$

Pero cuando el ángulo de desviación es mínimo $i'_2 = i_2$ e $i'_1 = i_1$, por lo tanto

$$\varphi_0 = 2i_1 - 2i_2.$$

Poniendo en esta fórmula en lugar de i_2 su valor según (1), hallamos

$$\varphi_0 = 2i_1 - A,$$

o sea

$$i_1 = \frac{A + \varphi_0}{2}. \tag{2}$$

Pero por la ley de la refracción

$$n = \frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2},$$

siendo n el índice de refracción de la sustancia de que está hecho el prisma.

Poniendo en la expresión de la ley de la refracción en lugar de i_1 e i_2 sus valores según (1) y (2), obtenemos:

$$n = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{A + \varphi_0}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{A}{2}}. \tag{3}$$

La igualdad (3) relaciona el valor del ángulo de desviación mínimo φ_0 con el valor del ángulo de refracción del prisma A y con el del índice de refracción n de la sustancia de que está hecho.

En los espectrógrafos el prisma se suele colocar en una posición próxima a la de desviación mínima. Por lo tanto puede considerarse que los rayos de distintas longitudes de onda, a los que corresponden índices de refracción n diferentes, se desvían formando ángulos φ_0 distintos, de acuerdo con la igualdad (3).

Se llama *dispersión angular* de un prisma la magnitud D, igual a la derivada del ángulo de desviación respecto a la longitud de onda:

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda}. \tag{4}$$

El ángulo de desviación φ depende directamente (para un ángulo de incidencia dado i_1) de n, y n depende de λ, por lo tanto podemos escribir:

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta n} \frac{dn}{d\lambda}. \tag{4a}$$

Derivando los dos miembros de la fórmula (3) respecto a φ_0, obtenemos

$$\frac{\delta n}{\delta \varphi_0} = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{A+\varphi_0}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A}{2}},$$

de donde para la dispersión D, según (4a), hallamos:

$$D = \frac{d\varphi_0}{d\lambda} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2}}{\cos \frac{A+\varphi_0}{2}} \frac{dn}{d\lambda}. \tag{5}$$

Esta expresión puede transformarse teniendo en cuenta que según (2):

$$\cos \frac{A+\varphi_0}{2} = \cos i_1 = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 i_1}.$$

Además, por la ley de la refracción y aplicando la igualdad (1), hallamos:

$$\operatorname{sen} i_1 = n \operatorname{sen} i_2 = n \operatorname{sen} \frac{A}{2},$$

después de lo cual para $\cos \frac{A+\varphi_0}{2}$ tendremos:

$$\cos \frac{A+\varphi_0}{2} = \sqrt{1 - n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}}.$$

Poniendo esta expresión de $\cos \frac{A+\varphi_0}{2}$ en (5), obtenemos la siguiente fórmula definitiva de la dispersión angular del prisma:

$$D = \frac{d\varphi_0}{d\lambda} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}}} \frac{dn}{d\lambda}. \tag{6}$$

La magnitud $dn/d\lambda$ se llama dispersión de la sustancia y depende de las propiedades del material de que está hecho el prisma. La fórmula (6) muestra que la dispersión angular de un prisma de ángulo A será tanto mayor cuanto mayor sea el índice de refracción n y la dispersión $dn/d\lambda$ de la sustancia de que está hecho. Por esto los prismas de los espectrógrafos se hacen con vidrio cuyo índice de refracción y cuya dispersión son los mayores posibles (es decir, con los llamados flint pesados). Cuando se da el material del prisma, para que aumente su dispersión angular hay que aumentar el ángulo de refracción A. En la práctica el ángulo del prisma se suele tomar igual a 60°, porque si los ángulos son mayores los haces de luz inciden sobre las caras demasiado oblicuamente.

Para caracterizar un espectrógrafo, como dijimos en el § 271, hay que tener en cuenta también su poder separador. Al comenzar este párrafo vimos que la luz de cada raya del espectro reproduce la imagen de la rendija. Pero cuando la rendija S es infinitamente estrecha y el sistema óptico del espectrógrafo está perfectamente corregido de aberraciones el límite del poder separador viene determinado por la existencia de los fenómenos de difracción. Sobre el objetivo del espectrógrafo L_2 incide el haz de rayos paralelos AM, CN (figs. 135 y 137) procedente del prisma (iluminado con luz de longitud de onda λ determinada).

Este haz está limitado por las dimensiones del prisma y, por consiguiente, equivale a un haz que pase a través de una rendija cuya anchura sea CD. En el plano focal F'_2 del objetivo L_2 este haz produce una figura de difracción igual a la que estudiamos en el § 269, producida por una sola rendija.

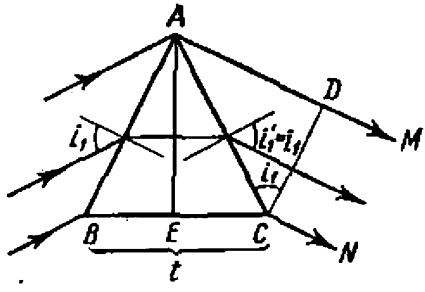

Fig. 137. Esquema para deducir la expresión del poder separador del prisma.

La distancia angular $\delta\varphi$ entre el máximo principal y el primer mínimo de esta figura de difracción es

$$\delta\varphi = \frac{\lambda}{d}. \qquad (7)$$

donde d, en este caso, es la sección CD del haz.

Si sobre el prisma incide simultáneamente luz de otra longitud de onda, por ejemplo, $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$, producirá también una figura de difracción que se encontrará un poco desviada respecto a la primera. Según el criterio de Rayleigh (§ 271), estas dos figuras de difracción se verán separadas si la distancia angular entre sus máximos es igual a $\delta\varphi$.

Por otra parte, la distancia angular $\delta\varphi$ entre rayas cuya diferencia de longitudes de onda es $\delta\lambda$ puede hallarse por la fórmula (6):

$$\delta\varphi = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}}} \frac{dn}{d\lambda} \delta\lambda.$$

Igualando esta expresión de $\delta\varphi$ con la (7) hallamos la condición que debe cumplir la diferencia de longitudes de onda $\delta\lambda$ de dos rayas espectrales que aún se distinguen separadas (según el criterio de Rayleigh):

$$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}}} \frac{dn}{d\lambda} \delta\lambda = \frac{\lambda}{d}$$

o

$$\delta\lambda = \frac{\lambda \sqrt{1 - n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}}}{2d \operatorname{sen} \frac{A}{2}} \frac{1}{\frac{dn}{d\lambda}}. \qquad (8)$$

Transformemos esta expresión. Por la fig. 137, tenemos:

$$d = AC \cos i_1 = AC \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 i_1}.$$

Para el mínimo de desviación $\operatorname{sen} i_1 = n \operatorname{sen} i_2 = n \operatorname{sen} \frac{A}{2}$, y, por consiguiente, la expresión anterior puede escribirse de la forma:

$$d = AC \sqrt{1 - n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}}.$$

Pero

$$AC = \frac{CE}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} = \frac{t}{2\operatorname{sen}\frac{A}{2}},$$

donde t es la base del prisma BC. De aquí obtenemos que

$$d = \frac{t\sqrt{1 - n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}}}{2\operatorname{sen}\frac{A}{2}}.$$

Poniendo este valor de d en (8) hallamos para $\delta\lambda$ la expresión siguiente:

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{t\frac{dn}{d\lambda}}. \tag{9}$$

La fórmula (9) nos dice que un prisma puede separar rayas espectrales tanto más próximas cuanto mayor es su base t y la dispersión $dn/d\lambda$ de la sustancia de que está hecho.

De la fórmula (9) obtenemos que el *poder separador* de un prisma

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = t\frac{dn}{d\lambda}. \tag{9a}$$

Es decir, el poder separador del prisma viene determinado exclusivamente por la magnitud de su base t y la dispersión de la sustancia que lo forma. Los prismas que tienen bases iguales, aunque tengan diferentes ángulos de refracción A, tienen igual poder separador. Pero no hay que olvidar que la fórmula (9a) ha sido deducida partiendo de la suposición de que el haz luminoso cubre totalmente al prisma.

§ 282. Velocidad de grupo de la luz. La onda monocromática expresada por la ecuación (t. 1, § 108):

$$y = a\cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right),$$

representa un proceso periódico en el espacio y en el tiempo, que ocupa todo el espacio y que dura indefinidamente. El segmento r determina la posición de la superficie de fases iguales AB con relación a un plano inicial OO' cualquiera (fig. 138). A lo largo de cada una de las rectas perpendiculares a las superficies de fases iguales la elongación y viene dada por una cosinusoide infinita. La magnitud v representa *la velocidad con que avanza cada una de las superficies de fases iguales AB durante un proceso ondulatorio estacionario*; esta magnitud, como ya dijimos, se llama *velocidad de fase*. Al deducir la ley de la refracción por el principio de Huygens (§ 255) se tenía en cuenta precisamente la velocidad de fase de las ondas. Por esto en la expresión del índice de refracción $n_{21} = \frac{v_1}{v_2}$ se sobrentiende que las velocidades de las ondas v_1 y v_2 son *velocidades de fase*.

Cuando la luz que se propaga no es monocromática, al atravesar la sustancia refractora sus diversas componentes monocromáticas cosinusoidales se propagan con velocidades distintas y en este caso, además de la velocidad de fase hay que tener en cuenta la *velocidad de grupo* (t. I, § 114). Se entiende por velocidad de grupo la velocidad con que se propaga el máximo de las vibraciones del proceso vibratorio compuesto que se produce al superponerse las ondas monocromáticas (véase la aclaración que se da en letra pequeña). Si las ondas componentes se propagan con velocidades distintas este

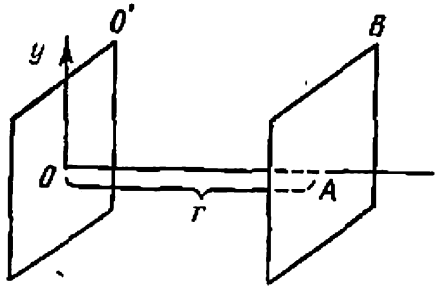

Fig. 138. Superficie de fases iguales.

máximo se propagará con una velocidad diferente de sus velocidades de fase. La velocidad de fase y la de grupo únicamente pueden coincidir en una sustancia en la que todas las ondas, cualquiera que sea su longitud, tengan la misma velocidad de propagación. Por lo tanto, en todo medio dispersivo, siempre que se trate de luz no monocromática, hay que distinguir dos velocidades: la de grupo y la de fase.

En el t. I, § 114 se demostró que la velocidad de grupo u es igual a

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \qquad (1)$$

siendo v la velocidad de fase y λ la longitud de onda. Como puede verse en (1), cuando $\frac{dv}{d\lambda} > 0$, es decir, cuando v aumenta al aumentar λ, la velocidad de grupo u es menor que la de fase v. A este caso le corresponde una disminución del índice de refracción n al aumentar la longitud de onda, cosa que ocurre en las sustancias transparentes (dispersión normal).

Es decir, allí donde la dispersión es normal la velocidad de grupo de la luz es menor que la de fase. Pero en los casos en que el índice de refracción aumenta al aumentar la longitud de onda (dispersión «anormal» con fuerte absorción) $\frac{dv}{d\lambda} < 0$, y la velocidad de grupo es mayor que la de fase.

De hecho las vibraciones luminosas son siempre (incluso en aquellos casos en que se toma una luz de color determinado) vibraciones compuestas que pueden ser desarrolladas según el teorema de Fourier en un número infinito de cosinusoides. A cada una de estas cosinusoides le corresponde una cantidad de energía infinitamente pequeña. Dejemos que una luz compleja de este tipo se propague, a partir de un momento determinado, en una dirección dada, abriendo para ello una compuerta. Cada una de las componentes de esta luz se propagará en el medio dispersivo con una velocidad diferente y llegará al observador en distintos momentos. Cada una de las componentes traerá una cantidad de energía infinitamente pequeña. La parte fundamental de la energía será transportada por la zona en que las vibraciones sean máximas. El observador percibirá la vibración cuando hasta él llegue el máximo, de donde queda claro que *al medir la velocidad de propagación de las ondas por el tiempo que tarda en transmitirse la energía de un punto a otro, lo que se mide es la velocidad de grupo*. Precisamente ésto es el procedimiento seguido en todos los experimentos descritos (§ 254) para determinar la velocidad de la luz: el de los eclipses de los satélites de Júpiter, el de Fizeau y el de los espejos o prismas giratorios. Puede ofrecer cierta duda el método de la aberración estelar, pero incluso en este caso, como demuestra su análisis minucioso, lo que se mide es la velocidad de grupo. Por lo tanto, todos los métodos para medir directamente la velocidad de la luz dan su velocidad de grupo.

En el aire la dispersión es tan pequeña que la velocidad de grupo coincide prácticamente con la de fase. La diferencia entre la velocidad de fase y la de grupo fue establecida por Michelson utilizando como medio el sulfuro de carbono, que es muy dispersivo en la zona visible del espectro. Michelson obtuvo que la relación entre las velocidades de la luz en el vacío y en el sulfuro de carbono es igual a 1,76, mientras que el índice de refracción de este último que da la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de fase, es igual a 1,64.

Dentro de una banda de absorción intensa $\frac{dn}{d\lambda}$ es positivo (fig. 133) y, por consiguiente, $\frac{dv}{d\lambda} < 0 \left(n = \frac{c}{v}\right)$. Además, para las longitudes de onda un poco menores que la de resonancia puede ocurrir que $n < 1$ y, por consiguiente, la velocidad de fase $v > c$. De aquí se deduce, según la fórmula (1) que dentro de las bandas de absorción la velocidad de grupo también puede tener valores mayores que c. Pero esta conclusión no contradice la teoría de la relatividad, según la cual la energía no puede transmitirse con una velocidad mayor que la de la luz en el vacío. Es claro que la influencia que ejerce una sustancia en la velocidad de propagación de la luz viene determinada por la interacción entre la onda luminosa y las partículas cargadas que entran en la composición de los átomos y de las moléculas. Para que esta interacción se produzca la onda tiene que llegar hasta las partículas correspondientes. Pero entre dichas partículas la luz se propaga con la misma velocidad que en el vacío.

De aquí se deduce que el *frente* de onda se propaga en cualquier sustancia con una velocidad igual a la de la luz en el vacío, y, por consiguiente, a través de las sustancias dispersivas, incluso en los casos en que la velocidad de grupo es mayor que c, no puede transportarse la energía de un punto a otro con velocidad mayor que la de la luz en el vacío. La teoría más rigurosa confirma que la velocidad del frente de onda en cualquier sustancia es igual a la velocidad de la luz en el vacío. En cuanto a la velocidad de propagación de la energía (es decir, a la velocidad del máximo de la vibración), resulta que la velocidad de grupo determinada por la fórmula (1) coincide con la de propagación de la energía solamente allí donde la dispersión es normal. Donde la dispersión es anormal la velocidad de propagación de la energía se diferencia sensiblemente de la velocidad de grupo y siempre es menor que c.

§ 283. Propagación de la luz en una sustancia ópticamente heterogénea. Se entiende por sustancia *ópticamente heterogénea* aquella cuyo índice de refracción n varía constantemente de un punto a otro. En las sustancias de este tipo las distintas partes de un frente de onda se propagan con velocidades diferentes y, como resultado

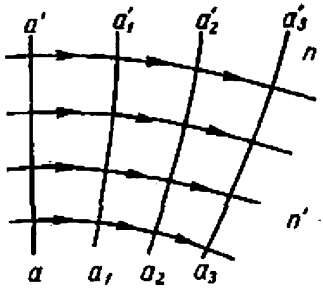

Fig. 139. Torcedura de los rayos en una sustancia no homogénea.

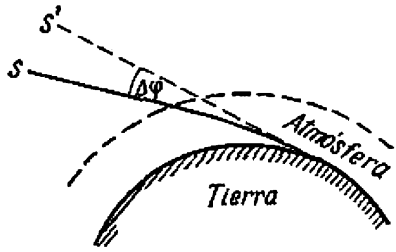

Fig. 140. Torcedura de los rayos en la atmósfera terrestre.

de esto, la superficie de dicho frente sufre continuamente cambios de forma. Los rayos que son líneas ortogonales a las superficies de fases iguales, en este caso resultan ser *curvos*. Analicemos una sustancia (fig. 139) cuyo índice de refracción varío continuamente entre los valores n y n', suponiendo que $n < n'$. Admitamos que en un momento determinado el frente de onda puede representarse con el plano aa', perpendicular al del dibujo. Al seguir propagándose, el frente de onda aa' avanzará más de prisa en aquellos puntos en que n sea menor, y más despacio en los que n sea mayor. Por esta razón su posición en los momentos siguientes estará representada por las superficies curvas a_1a_1', a_2a_2', etc. Los rayos que cortan normalmente a cada una de las posiciones del frente de onda, se tuercen hacia abajo en la figura 139.

Como ejemplo de sustancia ópticamente heterogénea puede servir la atmósfera terrestre considerada en un espesor suficientemente

grande. La variación de la presión atmosférica con la altura hace que también varíe con la altura el índice de refracción. Este índice tiene un valor más pequeño a gran altura y más grande junto a la superficie de la Tierra. Consecuencia de esto es que todo rayo que llega a la Tierra procedente de cualquier estrella se tuerce (fig. 140) al refractarse en la atmósfera (es decir, deja de ser recto). La posición aparente de la estrella S' está desviada respecto a su posición real S. Este fenómeno se conoce con el nombre de *refracción astronómica*, y la desviación angular $\Delta\varphi$, con el de ángulo de refracción. El ángulo de refracción astronómica $\Delta\varphi$ es igual a cero para las estrellas que se encuentran en el cenit y máximo para las que están en el horizonte; en este último punto alcanza el valor de 35′.

La refracción astronómica hace que cuando el Sol se encuentra en el horizonte parezca achatado y que su posición aparente sea más alta que la real; gracias a este fenómeno la duración del día es mayor que si la Tierra no tuviese atmósfera. Esta refracción de los rayos en la atmósfera debe tenerse también en cuenta cuando se practican mediciones geodésicas a grandes distancias. El parpadeo de las estrellas se debe a variaciones locales casuales de la heterogeneidad de la atmósfera. El índice de refracción también varía por la desigual distribución de la temperatura que se observa sobre la superficie caliente de la tierra o sobre el mar a diferentes alturas, ésta es la causa del fenómeno llamado *espejismo*. Este fenómeno puede reproducirse artificialmente haciendo que los rayos de luz se propaguen sobre una superficie caliente.

En el fenómeno de la refracción de la luz en las regiones en que el índice de refracción varía constantemente se basa un método para descubrir pequeñas heterogeneidades locales en las sustancias transparentes (en el vidrio, en el aire, etc.). El esquema de este método se representa en la fig. 141. La lente de gran

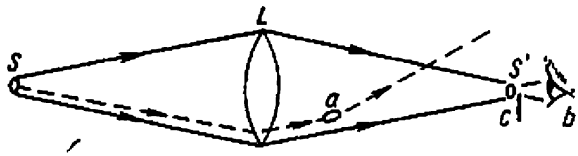

Fig. 141. Método para descubrir las heterogeneidades de una sustancia transparente.

distancia focal L produce en el punto S' una imagen real del pequeño foco luminoso S (por ejemplo, de una chispa o de un cráter de arco voltaico). Si en el punto b, situado detrás de la imagen S', se coloca el ojo, de tal forma que la luz de dicha imagen incida sobre él, y se mira a la lente L, toda su superficie, parecerá homogéneamente iluminada. Cuando parte de la imagen S' se tapa con una pantalla opaca c, la superficie de la lente sigue pareciendo iluminada por completo, puesto que cada punto de la imagen S' está formado por los rayos que pasan por los puntos correspondientes de la lente L. Pero en este caso la iluminación de la lente es más débil, porque la pantalla impide el paso a una

parte de los rayos. Si entre la lente L y la pantalla c existe cualquier heterogeneidad óptica a que refracte la luz de forma diferente a como lo hace el medio circundante, los rayos que pasen a través de ella se desviarán. Esto hace que la cantidad de luz que deja pasar la pantalla c sea mayor o menor (según la dirección en que la parte ópticamente heterogénea desvíe los rayos) que si no existiera la heterogeneidad. Como resultado la zona en que se encuentra dicha heterogeneidad parecerá más clara o más oscura que la superficie de la lente. Por este procedimiento se pueden descubrir heterogeneidades cuyo índice de refracción se diferencie muy poco del de las zonas contiguas de la sustancia.

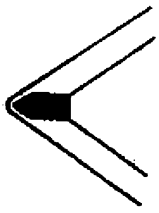

Fig. 142. Fotografía de la onda que produce en el aire una bala disparada.

Este método puede perfeccionarse practicando la observación a través de un anteojo o sustituyendo el ojo por una cámara fotográfica previamente enfocada a la superficie de la lente L.

Este método se utiliza para comprobar la calidad de los vidrios ópticos destinados a la fabricación de aparatos ópticos de precisión, en los cuales la existencia de heterogeneidades (torcimientos estructurales) es intolerable. También sirve para fotografiar la posición instantánea de heterogeneidades que varían con el tiempo, empleando para ello exposiciones muy cortas, por medio de chispas. De esta forma se fotografían los puntos de condensación y dilatación o enrarecimiento que producen las ondas sonoras, las explosivas y las que forman en el aire los objetos que se mueven a gran velocidad, como las balas, por ejemplo (fig. 142).

§ 284. Paso de la luz a través de sustancias turbias. Cuando un haz de rayos luminosos pasa a través de una sustancia turbia (niebla, líquidos que contienen partículas en suspensión, soluciones coloidales, etc.) una parte de la luz *se difunde* hacia los lados y dicho haz puede verse lateralmente.

A consecuencia de la difusión de la luz hacia los lados, en las sustancias turbias la densidad del flujo de energía disminuye en la dirección de la propagación más de prisa que cuando solamente existe la absorción. Por esta razón, cuando se trata de medios de este tipo hay que incluir en la expresión de la ley de la absorción de la luz [fórmula (2) del § 276], además del coeficiente de absorción real k, un coeficiente complementario k' determinado por la difusión:

$$u = u_0 e^{-(k+k')l}. \qquad (1)$$

El coeficiente k' se llama *coeficiente de extinción*.

Por el principio de Huygens y Fresnel *cada punto* de un frente de onda que se propaga en el vacío o en una sustancia homogénea continua puede ser considerado como fuente de ondas secundarias elementales. Estas ondas secundarias se refuerzan entre sí en la dirección de propagación de la onda y se debilitan en las demás direcciones. En realidad las heterogeneidades que existen en cualquier sustancia, debidas a su estructura atómica, no desempeñan ningún papel, puesto que su influencia se reduce a zonas mucho menores que la longitud de la onda luminosa (la longitud de una

onda luminosa $\lambda \cong 5 \cdot 10^{-5}$ cm, mientras que las distancias entre los átomos en las sustancias líquidas y sólidas son del orden de 10^{-8} cm y en los gases en condiciones normales, del orden de 10^{-7} cm)*).

Pero no ocurre lo mismo cuando en una sustancia homogénea se hallan incluidas *desordenadamente* partículas separadas entre sí por distancias mayores que la longitud de onda (aunque las propias partículas sean menores que dicha magnitud). En este caso

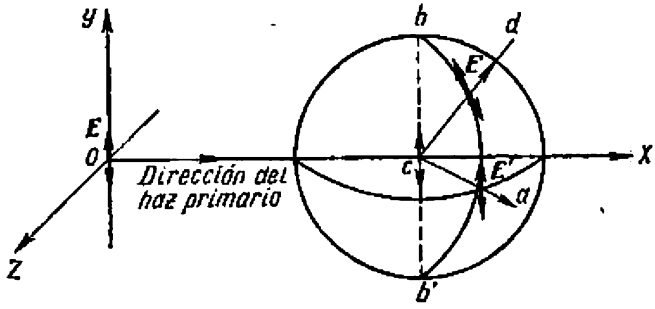

Fig. 143. Formación de la onda dispersa; la onda primitiva está polarizada en un plano.

las ondas reflejadas en cada una de las partículas no tienen diferencias de fase determinadas y se refuerzan más o menos entre sí en todas las direcciones. Así es como se produce la luz difundida hacia los lados.

Las vibraciones del vector campo eléctrico de la onda luminosa hacen que los electrones de las partículas difusoras comiencen a realizar vibraciones forzadas y a irradiar ondas. Si las partículas son pequeñas en comparación con la longitud de la onda luminosa, el conjunto de las vibraciones que en ellas se producen pueden equipararse con las vibraciones de los dipolos eléctricos. Para simplificar supongamos que la luz está polarizada linealmente y que el vector **E** vibra paralelamente al eje *OY* (fig. 143). En estas condiciones, las vibraciones forzadas de la partícula isótropa *C* serán también paralelas al eje *OY*. Estas vibraciones dan lugar a la formación de una nueva onda esférica secundaria polarizada. El vector campo eléctrico **E'** de esta onda difundida se encontrará, en cada una de las direcciones, en el plano que contiene al eje del dipolo *bb'*; y como las ondas luminosas son transversales, el vector **E'** será perpendicular al mismo tiempo a la dirección en que se propaga la onda (por ejemplo, perpendicular a la dirección *ca* o *cd*). La amplitud de la onda secundaria será máxima en aquellas direcciones que se encuentran

*) Sobre el papel que desempeñan las fluctuaciones de la densidad se habla más adelante.

en el plano *XOZ*, y será igual a cero en la dirección del eje del dipolo *bb'*. Por consiguiente tenemos: que *si el haz primario está polarizado en un plano, la luz difusa también estará polarizada en un plano y tendrá distinta intensidad en diferentes direcciones.* En la fig. 144 se muestra el diagrama vectorial de la distribución de la intensidad de la luz difusa en el plano perpendicular a la dirección en que se propaga el haz primario (es decir, paralela al plano *YOZ* de la fig. 143).

Al propagarse un haz de luz plano polarizado a través de una sustancia turbia este haz puede verse claramente desde un lado, siempre que se le mire en el plano de polarización del haz primario*), y será invisible si se mira en dirección perpendicular a este plano.

En las partículas difusoras las vibraciones forzadas tienen la misma frecuencia ν que las vibraciones de la onda incidente. Por

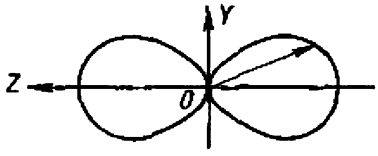

Fig. 144. Distribución de la intensidad en la luz difusa.

esto, *la frecuencia de la luz difusa coincide con la de la luz del haz primario.* Según la teoría electromagnética de la luz la amplitud de la onda, irradiada por el dipolo eléctrico, es proporcional al cuadrado de la frecuencia de sus vibraciones ν^2. La intensidad de la luz medida por la densidad del flujo de energía es proporcional al cuadrado de la amplitud. De aquí se deduce que *la intensidad de la luz difusa es proporcional a la frecuencia a la cuarta potencia* o, lo que es lo mismo, es inversamente proporcional a la longitud de onda a la cuarta potencia:

$$I \sim \nu^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}. \qquad (2)$$

Esta correlación se conoce con el nombre de ley de Rayleigh.

La luz blanca difundida por una sustancia turbia que contiene partículas pequeñas parece celeste, puesto que por la ley de Rayleigh los rayos celestes y azules, por tener menor longitud de onda, se difunden más que los amarillos y rojos. Pero si miramos esta luz blanca a través de la sustancia turbia nos parecerá rojiza, porque debido a la difusión pierde los rayos de pequeña longitud de onda.

Si la luz del haz primario no está polarizada, la intensidad de la luz difusa en el plano perpendicular a dicho haz es igual en todas

*) Recordemos que el plano de polarización es perpendicular al plano en que vibra el vector campo eléctrico E. En la fig. 143 el plano de polarización del haz primario es el plano *XOZ*.

las direcciones. Solamente queda por determinar la relación que existe entre la intensidad de la luz difusa y el ángulo φ que forma la dirección de difusión con la dirección del haz primario.

La intensidad en función del ángulo φ tiene el siguiente carácter: que

$$I \sim (1 + \cos^2 \varphi);$$

gráficamente se representa por una curva simétrica respecto al haz primario y a la recta perpendicular a él (fig. 145).

La luz difusa estará polarizada incluso en el caso en que el haz de luz primario no lo estuviera. Esto es una consecuencia de que las ondas luminosas sean transversales. Efectivamente, al propagarse el haz primario en la dirección del eje OX (fig. 143) las vibraciones del vector campo eléctrico E tienen lugar en el plano YOZ. Si la luz difusa

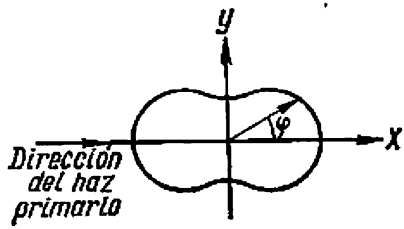

Fig. 145. Variación de la intensidad de la luz difusa en función del ángulo φ.

se observa perpendicularmente a la dirección del haz primario (por ejemplo, según el eje OZ), las vibraciones forzadas de las partículas difusas pueden descomponerse en dos vibraciones: una, a lo largo del eje OY, y otra, a lo largo del eje OZ. Como las ondas luminosas son transversales, las vibraciones de la onda difundida que se propague en la dirección del eje OZ serán producidas solamente por la componente de las vibraciones de las partículas dirigida a lo largo del eje OY. De esta forma, el vector campo eléctrico $\mathbf{E}'$ de la luz difusa vibrará paralelamente al eje OY y la luz resultará totalmente polarizada. Si la observación se hace en sentido oblicuo respecto a la dirección del haz primario, la luz difusa estará polarizada parcialmente.

Estas reglas dejan de cumplirse cuando las dimensiones de las partículas difusoras son mayores que la longitud de onda luminosa. Para estas últimas partículas la intensidad de la luz difusa es inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de onda. Cuando las partículas difusoras son grandes el matiz de la luz blanca difusa es menos celeste que en el caso de partículas pequeñas, es decir que cuando se cumple la ley de Rayleigh. Esto concuerda perfectamente con el hecho tan conocido de que la niebla, cuando está formada por gotitas muy finas, parece azul, mientras que si lo está por gotas gruesas, parece blanca.

Cuando las partículas son grandes la luz difusa sólo está polarizada parcialmente, con la particularidad de que el grado de polarización depende de las dimensiones y de la forma de las partículas. La relación entre la intensidad de la luz difusa y la dirección de difusión tiene también en este caso un carácter más complicado.

Como dijimos al principio de este párrafo, las sustancias completamente homogéneas no deben producir la difusión de la luz. Sin embargo, en la realidad hasta las sustancias mejor depuradas de polvo y partículas extrañas difunden hasta cierto punto la luz. La causa de este fenómeno, como explicaron L. I. Mandelshtam y M. Smolujovski, es la fluctuación de la densidad. Como esta fluctuación se debe a la naturaleza cineticomolecular de la estructura de la materia (véase el t. 1), la difusión producida por ella se llama *molecular*.

La difusión molecular existe en los gases, en los líquidos y en los sólidos. Es muy débil, y en la mayoría de los casos la parte de la energía del haz primario que se difunde por unidad de volumen es $\sim 10^{-6}$-10^{-7}.

La intensidad de la difusión molecular aumenta con la temperatura, puesto que al elevarse ésta la fluctuación de la densidad es mayor.

Esta peculiaridad puede servir para distinguir la difusión molecular de la producida por partículas extrañas, la cual no depende de la temperatura. Cuando la luz del haz primitivo está polarizada en un plano, la difundida por fluctuación también lo está, pero sólo parcialmente. Su grado de despolarización depende del de la anisotropía de las moléculas.

El color azul del cielo se explica por la difusión molecular. El movimiento desordenado de las moléculas hace que en la atmósfera se formen continuamente centros de condensación y de enrarecimiento del aire que difunden la luz solar. Al ocurrir esto, según la ley de Rayleigh, los rayos celestes y azules se difunden más que los amarillos y rojos. La luz difundida en el firmamento está parcialmente polarizada; la magnitud y el carácter de esta polarización está de acuerdo con la calculada teóricamente.

La teoría da también la magnitud del coeficiente de extinción k'. Para la difusión molecular en un gas

$$k' = \frac{8\pi^3}{3N\rho} \frac{(\varepsilon - 1)^2}{\lambda^4},$$

siendo N el número de Avogadro; ρ, la densidad, y ε, la constante dieléctrica.

Según las observaciones realizadas en el año 1912 en el pico Tenerife, cuando la atmósfera estaba exenta de polvo, el coeficiente k' resultó ser para el aire igual a $5{,}6 \cdot 10^{-7}$ cm^{-1} (siendo $\lambda = 0{,}375$ μ y la presión y temperatura normales). De esto resulta que el valor del número de Avogadro $N = 6{,}6 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}, que concuerda con el verdadero dentro de los límites del error posible.

CAPITULO XXV

Paso de la luz a través de sustancias anisótropas

§ 285. Paso de la luz a través de una sustancia anisótropa. El paso de la luz a través de una sustancia anisótropa cristalina lleva consigo una serie de fenómenos peculiares. Ya en el año 1670 el físico danés Erasmo Bartholin (Erasmus Bartholinus) observó que cuando un rayo de luz pasa a través del espato de Islandia*) se divide en dos. Este fenómeno recibió el nombre de *doble refracción*.

El cristal de espato de Islandia se divide fácilmente según planos determinados (planos de exfoliación) formando romboedros (fig. 146). Si un haz estrecho se refracta en un cristal de este tipo produce dos

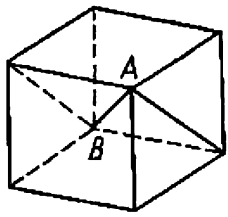

Fig. 146. Cristal natural de espato de Islandia.
El eje óptico puede ser cualquier recta paralela al eje AB.

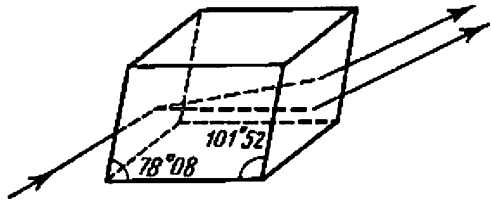

Fig. 147. Doble refracción en un cristal de espato de Islandia.

haces que siguen direcciones algo distintas. Pero al salir del cristal ambos haces tienen direcciones paralelas a la inicial y, si son suficientemente estrechos y el cristal suficientemente grueso, resultan separados por cierto espacio (fig. 147). Si a través de un cristal de éstos se mira un objeto cualquiera se verá doble. Por ejemplo, si en una hoja de papel se pone un punto negro y se mirá a través de un cristal de espato de Islandia, el punto se ve doble.

En la mayoría de los cristales transparentes se nota el fenómeno de la doble refracción de una forma más o menos manifiesta. Los cristales del sistema cúbico (por ejemplo, los de sal gema) no producen doble refracción.

Si por un procedimiento cualquiera cortamos de un cristal una lámina plana de caras paralelas y observamos las direcciones que

*) Cristal del sistema hexagonal de carbonato cálcico ($CaCO_3$).

siguen los dos rayos que se forman dentro de dicha lámina al producirse la doble refracción, nos convenceremos de que para uno de estos rayos la relación entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción $\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2}$ permanece constante al variar el ángulo de incidencia; este rayo se encuentra en el mismo plano que el incidente y que la normal a la superficie de la lámina en el punto de incidencia. Es decir, cumple la ley general de la refracción. Este rayo se llama *ordinario*. El otro rayo recibe el nombre *de extraordinario*. Para él no permanece constante la razón $\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2}$ al variar el ángulo de incidencia. Incluso cuando la luz incide perpendicularmente sobre la superficie de la lámina el rayo extraordinario se desvía generalmente de la dirección inicial (fig. 148). En este caso $\operatorname{sen} i_1 = 0$, mientras que $\operatorname{sen} i_2 \neq 0$, y la relación $\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2}$ resulta igual a cero. Cuando el rayo extraordinario pasa del cristal al aire la razón del seno del ángulo de incidencia al seno del ángulo de refracción puede ser igual a infinito. El rayo extraordinario no se encuentra generalmente en el plano de incidencia, es decir, en el mismo plano que el rayo incidente y la normal a la superficie refractora en el punto de incidencia. El ángulo de refracción del rayo extraordinario, lo mismo que el ángulo entre él y el plano de incidencia, depende no sólo del ángulo de incidencia que forma el rayo primitivo, sino también de la orientación que tenga la superficie refractora de la lámina y el plano de incidencia respecto al eje óptico (véase más adelante) del cristal.

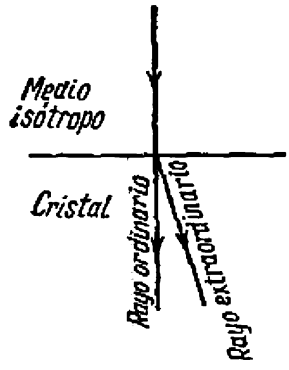

Fig. 148. Desviación del rayo extraordinario cuando la luz incide normalmente sobre la cara refractora del cristal.

Tanto el rayo ordinario como el extraordinario *están totalmente polarizados en dos planos perpendiculares entre sí**).

Cambiando la dirección del rayo incidente es fácil comprobar que dentro del cristal existen ciertas direcciones en que el rayo puede propagarse sin dividirse en dos. Para el espato de Islandia esta dirección es paralela a la diagonal AB que une los ángulos

*) Los planos de polarización de los rayos ordinario y extraordinario son entre sí rigurosamente perpendiculares si se cambia la dirección del rayo incidente de tal forma que *por una misma dirección pase por el cristal* primero uno de los rayos refractados y después el otro. Pero si el rayo ordinario y el extraordinario son producidos simultáneamente por un rayo incidente (como ocurre por regla general), sus planos de polarización no son exactamente perpendiculares el uno al otro, puesto que las secciones principales (véase más adelante) no suelen ser las mismas para el rayo ordinario y el extraordinario.

obtusos del romboedro natural (fig. 146). Una recta trazada por cualquier punto del cristal en la dirección en que no se produce la doble refracción se llama *eje óptico*. El plano en que se encuentra el eje óptico y el rayo dado se llama *sección principal o plano principal del cristal* correspondiente a dicho rayo. A través del cristal pueden trazarse, evidentemente, una cantidad innumerable de ejes ópticos y de secciones principales. La línea de intersección de dos secciones principales cualesquiera es siempre un eje óptico.

El rayo ordinario está polarizado en el plano correspondiente a su sección principal, mientras que el extraordinario lo está perpendicularmente al plano correspondiente a la suya.

En general, las secciones principales de los rayos ordinario y extraordinario no coinciden. Pero en la mayoría de los casos el ángulo que forman entre sí estas secciones es pequeño y, por consiguiente, el ángulo que forman los planos de polarización de ambos rayos es igual aproximadamente a $\frac{\pi}{2}$.

Las dos secciones principales coinciden cuando el eje óptico se encuentra en el plano de incidencia.

Los cristales que solamente tienen una dirección a lo largo de la cual no se produce la doble refracción se llaman *uniáxicos*. Existen cristales que tienen dos direcciones a lo largo de las cuales no se produce el fenómeno antedicho, estos cristales se llaman *biáxicos*.

La mayoría de los cristales transparentes uniáxicos absorben igualmente los rayos ordinario y extraordinario. Pero existen cristales en los cuales la absorción de uno de los rayos es mayor que la del otro. Este fenómeno se llama *dicroísmo*.

El cristal de turmalina presenta gran dicroísmo para los rayos visibles. Un cristal de turmalina de 1 mm de espesor absorbe prácticamente por completo el rayo ordinario. Esta propiedad de la turmalina se utiliza para obtener luz polarizada.

Además de los cristales naturales sólidos presentan doble refracción los llamados cristales líquidos, los cuerpos amorfos al deformarse y los líquidos sometidos a la acción de un campo eléctrico (§ 292).

Hasta ahora hemos supuesto que sobre el cristal incide luz natural. En este caso los rayos refractados (ordinario y extraordinario) resultan plano polarizados y tienen la misma brillantez (si el cristal no es dicroico). Veamos ahora lo que ocurre si sobre el cristal cae una luz totalmente polarizada en un plano cualquiera. En este caso se producen por lo general dos rayos cuya brillantez es diferente. Sea AA' (fig. 149) el plano en que vibra el vector campo eléctrico de la onda incidente (este plano será perpendicular al de polarización de la luz que incide). Omitamos la diferencia que existe entre las secciones principales del rayo ordinario y del extraordinario y consideremos que estas secciones coinciden. Supongamos pues que

OO' es el plano de la sección principal de ambos rayos. El rayo ordinario está polarizado en el plano *OO'* de la sección principal del cristal y, por consiguiente, el vector campo eléctrico de la onda ordinaria vibrará en el plano *BB'*, perpendicular al *OO'*. La amplitud del rayo ordinario a_o si no existen pérdidas por reflexión y por absorción, será igual a la proyección de la amplitud del rayo incidente a sobre la dirección *BB'*:

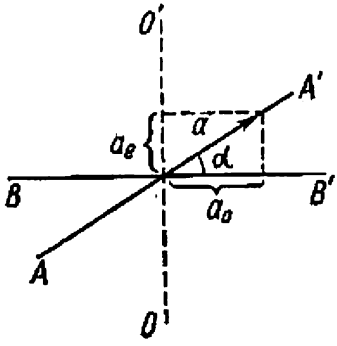

Fig. 149. Amplitudes de las vibraciones de los rayos ordinario y extraordinario.

$$a_o = a \cos \alpha,$$

siendo α el ángulo entre los planos de vibración de los rayos incidente y refractado ordinario; es evidente que α será al mismo tiempo el ángulo que forman entre sí los planos de polarización de los rayos incidente y ordinario. Como quiera que el flujo de energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, el flujo de energía del rayo ordinario será:

$$W_o = W \cos^2 \alpha,$$

donde W es el flujo de energía del rayo incidente.

El rayo extraordinario estará polarizado en un plano perpendicular a la sección principal del cristal y en él las vibraciones tendrán lugar en el plano de la sección principal *OO'*, por lo tanto, la amplitud del rayo extraordinario será:

$$a_e = a \operatorname{sen} \alpha,$$

y, por consiguiente, su flujo de energía

$$W_e = W \operatorname{sen}^2 \alpha. \qquad (1a)$$

Las fórmulas (1) y (1a) que determinan los flujos de energía de los rayos ordinario y extraordinario procedentes de un rayo plano polarizado, llevan el nombre de *fórmulas de Malus**). Partiendo de (1) y (1a) podemos hallar la razón entre los flujos de los rayos ordinario y extraordinario procedentes de un rayo plano polarizado:

$$\frac{W_e}{W_o} = \operatorname{tg}^2 \alpha. \qquad (2)$$

La suma de los flujos de ambos rayos debe ser igual al flujo del rayo incidente:

$$W \cos^2 \alpha + W \operatorname{sen}^2 \alpha = W,$$

de acuerdo con la ley de la conservación de la energía.

*) Estas fórmulas fueron deducidas por el físico francés Malus en el año 1810 y confirmadas experimentalmente por Arago.

Las correlaciones que acabamos de obtener pueden ilustrarse fácilmente con un experimento. Supongamos que un haz estrecho de luz plano polarizada I incide normalmente sobre la cara AB de un

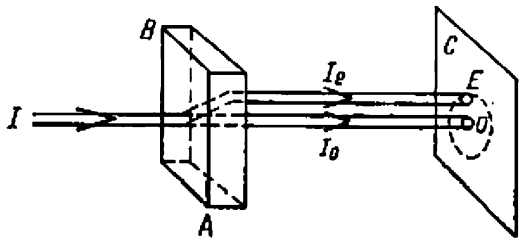

Fig. 150. Comparación de las intensidades de los rayos ordinario y extraordinario procedentes de un rayo polarizado en un plano.

cristal tallado en forma de lámina (fig. 150). Si el eje óptico del cristal no es perpendicular a la cara AB ni paralelo a ella, el rayo extraordinario I_e se desvía en el cristal y sale de él paralelo al rayo ordinario I_o. Ambos rayos producen círculos brillantes, O y E, en la pantalla C. Si hacemos girar el cristal alrededor de un eje que coincida con la dirección del rayo ordinario I_o, el círculo O permanecerá quieto en la pantalla, mientras que el E se trasladará siguiendo la circunferencia que se indica en la fig. 150. Al ocurrir esto varía la brillantez de ambos círculos. Si colocamos el cristal de forma que su sección principal quede paralela al plano de polarización de la luz incidente ($\alpha = 0$), el rayo I_o alcanzará su máximo esplendor, mientras que el I_e se extinguirá por completo. Girando el cristal volverá a aparecer el rayo extraordinario I_e, cuyo máximo esplendor corresponderá a $\alpha = \frac{\pi}{2}$; en estas condiciones desaparecerá el rayo ordinario. Cuando $\alpha = \pi$, el rayo ordinario vuelve a alcanzar un brillo máximo y el extraordinario se extingue de nuevo.

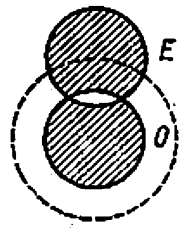

Fig. 151. Invariabilidad de la suma de las intensidades de los rayos ordinario y extraordinario.

También es fácil comprobar que la suma de los esplendores de ambos rayos permanece invariable. Para esto no hay más que ensanchar el haz incidente lo necesario para que en la pantalla C los círculos O y E se superpongan parcialmente el uno al otro (fig. 151). Hecho esto, al girar el cristal variará la brillantez de cada uno de los círculos, pero el esplendor de la zona en que se superponen permanecerá invariable.

§ 286. Superficies de onda en un cristal uniáxico. La explicación de la doble refracción en los cristales uniáxicos fue dada por

Huygens en su «Tratado de la luz» (1690). Huygens supuso que el rayo ordinario forma en el cristal una superficie de onda en forma de esfera, mientras que el extraordinario, en forma de elipsoide de revolución. Esta hipótesis de Huygens está de acuerdo con las teorías modernas sobre la naturaleza de la luz y la estructura de los cristales.

La anisotropía de los cristales se deja sentir no sólo en sus propiedades macroscópicas (elasticidad, dilatación térmica, etc.) sino también en las cualidades de las partículas de que están constituidos. Los átomos, los iones o las moléculas que forman los cristales son, por lo general, osciladores anisótropos. Todo oscilador anisótropo, en lugar de tener una frecuencia propia de vibración (como los osciladores isótropos), tiene tres frecuencias propias distintas ω_1, ω_2, ω_3 en tres direcciones perpendiculares entre sí perfectamente determinadas.

Esta anisotropía de los osciladores puede deberse a su asimetría (moléculas de estructura asimétrica) o al carácter de las fuerzas que actúan sobre cada partícula en la red cristalina. Si la dirección de las vibraciones del vector campo eléctrico de la onda luminosa coincide, por ejemplo, con la primera de las direcciones mencionadas anteriormente, la amplitud de las vibraciones forzadas estará determinada por la diferencia entre los cuadrados de la frecuencia de la luz ω y de la frecuencia de las vibraciones propias ω_1. Haciendo girar el cristal de forma que la dirección de las vibraciones del vector campo eléctrico coincida con otra de las direcciones, por ejemplo, con la segunda, la amplitud de las vibraciones forzadas estará determinada por la magnitud $\omega^2 - \omega_2^2$, etc. Esto conduce a que la influencia que ejercen las bandas de absorción sea distinta en las diferentes direcciones de vibración de la onda luminosa y, por consiguiente, (§ 279) a que las velocidades de propagación también sean diferentes. En los cristales uniáxicos dos de las tres frecuencias propias coinciden, es decir, solamente se distinguen dos frecuencias.

Supongamos que las partículas que componen un cristal tienen una frecuencia propia ω_1 en dirección paralela al eje óptico del cristal y otra frecuencia propia ω_2 en dirección perpendicular a dicho eje.

Consideremos en el cristal el plano de la sección principal y veamos lo que ocurre con los rayos que parten de un punto cualquiera C (fig. 152) en las distintas direcciones del plano. Supongamos que cada uno de estos rayos está totalmente polarizado y que el vector campo eléctrico de cada uno de ellos vibra perpendicularmente a la sección principal del cristal que hemos tomado.

En la fig. 152, *a* las direcciones paralelas al eje óptico se han representado con líneas punteadas y las direcciones en que vibran los vectores campo eléctrico, con puntos. Como puede verse, las vibraciones son perpendiculares al eje óptico en cualquiera de los rayos Ca_1, Ca_2, etc. Por esta razón la onda luminosa solamente hace

vibrar a los osciladores en las direcciones perpendiculares al eje óptico que tienen una misma frecuencia propia ω_2; por consiguiente, todos los rayos en los que las vibraciones tienen lugar en dirección perpendicular al plano de la sección principal se propagan a igual velocidad v_0. El lugar geométrico de los puntos a que llegan simultáneamente los rayos que parten del punto C al mismo tiempo, tiene la forma del círculo representado en la fig. 152, *a* con línea de trazo continuo. Si estudiamos el conjunto de todas las secciones principales que pueden pasar por el punto C, tendremos que el lugar geométrico de los extremos de todos los rayos será una esfera. Como el plano de

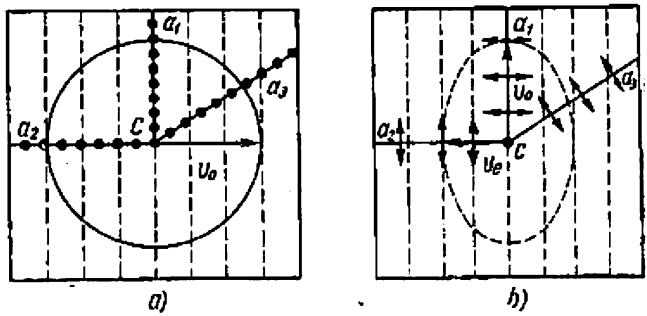

Fig. 152. Formación de dos superficies de onda en un cristal: *a*, esférica; *b*, elipsoidal.

polarización es perpendicular al plano en que vibra el vector campo eléctrico, el caso examinado es el de una luz polarizada en el plano de la sección principal. De aquí podemos deducir: que los rayos polarizados en los planos de las secciones principales del cristal se propagan en todos los sentidos con la misma velocidad v_0, formando una superficie de onda esférica lo mismo que si se tratara de un medio isótropo, y, por consiguiente, cumplen la ley general de la refracción. El índice de refracción de estos rayos $n = c/v_0$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío.

Veamos ahora lo que ocurre con los rayos en que las vibraciones del vector campo eléctrico tienen lugar en el plano de la sección principal (fig. 152, *b*). Este caso es el correspondiente a una luz polarizada en un plano perpendicular al de la sección principal del cristal. Como vemos en la figura, las vibraciones de los distintos rayos Ca_1, Ca_2, Ca_3 tienen ahora direcciones que forman con el eje óptico ángulos diferentes. Por ejemplo, las vibraciones del rayo Ca_1 son perpendiculares al eje óptico, mientras que las del rayo Ca_2 son paralelas a este último. El primero de estos rayos produce en los osciladores vibraciones forzadas cuya amplitud está determinada por la frecuencia propia ω_2, y, por consiguiente, se propaga con la velocidad v_0. El segundo rayo Ca_2 produce en los osciladores vibraciones

cuya amplitud viene determinada por la frecuencia propia ω_1, de donde su velocidad de propagación deberá ser diferente de la del rayo Ca_1; llamemos v_e a esta velocidad. Un rayo que se propague en cualquier otra dirección, por ejemplo, el Ca_3, lo hará con una velocidad v' intermedia entre v_o y v_e. De esta forma, los rayos polarizados perpendicularmente al plano de la sección principal del cristal se propagan con diferentes velocidades en las distintas direcciones. Como resultado de esto la superficie de onda toma una forma distinta que la que tenía en el medio isótropo. Esta forma es la de un elipsoide

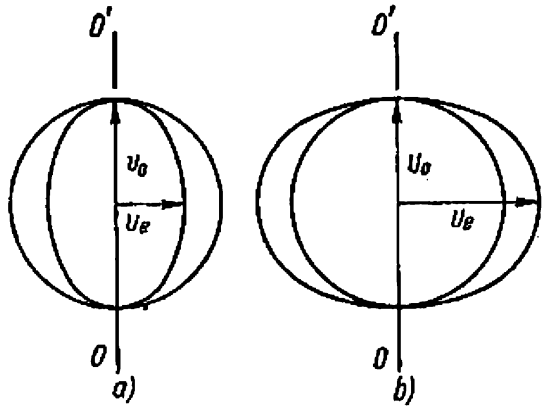

Fig. 153. Superficies de onda en los cristales: *a*, en un cristal positivo; *b*, en un cristal negativo.

de revolución, cuya sección por uno de los planos principales se representa en la fig. 152, *b* con línea punteada (la demostración de que la superficie de onda de los rayos extraordinarios es realmente un elipsoide de revolución puede verse en el § 287). Los rayos que presentan una superficie de onda de este tipo no cumplen la ley general de la refracción.

En algunos cristales la velocidad de propagación de las vibraciones paralelas al eje óptico es menor que la de propagación de las vibraciones perpendiculares a él ($v_e < v_o$). Estos cristales se llaman *positivos* y en ellos el semieje mayor de la superficie de onda elipsoidal coincide con el radio de la superficie de onda esférica (fig. 153, *a*). En los cristales llamados *negativos* $v_e > v_o$. En estos cristales el que coincide con el radio de la superficie de onda esférica es el semieje menor del elipsoide (fig. 153, *b*). En ambos casos el eje óptico OO' pasa por los puntos de tangencia de las superficies elipsoidal y esférica y a lo largo de él la velocidad de propagación de los rayos, cualquiera que sea su plano de polarización, es la misma.

§ 287. Construcción de los rayos ordinario y extraordinario en los cristales uniáxicos. Utilicemos los conceptos sobre las super-

ficies de onda esféricas y elipsoidales establecidos en el párrafo anterior para resolver una serie de casos particulares de construcción de rayos ordinarios y extraordinarios en cristales uniáxicos.

1. **Caso en que el eje óptico OO' se encuentra en el plano de incidencia y forma con la cara refractora del cristal un ángulo oblicuo** (fig. 154). Supongamos que sobre la cara refractora del cristal incide un frente de onda plano AB. El ángulo de incidencia es igual

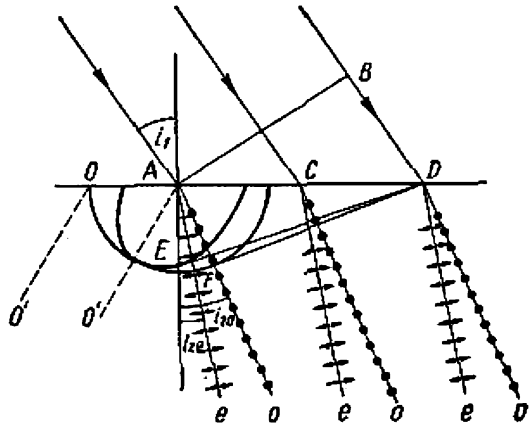

Fig. 154. Construcción de los rayos ordinario y extraordinario.
El eje óptico OO' se encuentra en el plano de incidencia formando un ángulo oblicuo con la cara refractora.

a i_1. Durante el tiempo necesario para que el extremo derecho del frente B se propague por el primer medio hasta llegar al punto D, alrededor del punto A se formarán en el cristal dos superficies de onda, una esférica y otra elipsoidal, tangentes entre sí en dirección al eje óptico AO'. En la fig. 154 todos los puntos de la superficie elipsoidal se hallan dentro de la esférica, cosa que corresponde al caso de un cristal positivo. En torno a cada uno de los puntos intermedios entre A y D se formarán superficies de onda semejantes, pero de dimensiones menores. De acuerdo con el principio de Huygens debemos trazar dos superficies: una, DF, tangente a las esferas, y otra, DE, tangente a los elipsoides. La primera nos da el frente de la onda refractada ordinaria y la segunda, el frente de la refractada extraordinaria. Los rayos refractados ordinarios Ao, Co y Do se obtienen trazando rectas desde los puntos de incidencia a los de contacto de las superficies esféricas con el plano DF. En estos rayos las vibraciones del vector campo eléctrico tienen lugar perpendicularmente al plano de la sección principal del cristal que coincide con el plano del dibujo; estos vibraciones se señalan por medio de puntos. Los rayos refractados extraordinarios Ae, Ce y De los obtenemos trazando rectas que unan los puntos de incidencia con los de contacto

de las superficies elipsoidales con el plano DE. En el caso que examinamos estos rayos se encuentran en el plano de incidencia, pero *no son perpendiculares* al frente de onda. En los rayos extraordinarios las vibraciones del vector campo eléctrico tienen lugar en el plano de la sección principal del cristal (están señaladas con flechitas). Por lo tanto, como puede verse en la figura, se forman dos sistemas de rayos, ordinarios y extraordinarios, que van por el cristal en direcciones diferentes.

Si el plano de incidencia de la luz sobre el cristal no fuera paralelo al eje óptico, los rayos ordinarios y extraordinarios no se encontrarían en un mismo plano. Efectivamente, volviendo a hacer coincidir el plano de la figura con el de incidencia obtenemos que el eje óptico AO' (fig. 154) y el punto E de tangencia del frente de onda con la superficie elipsoidal no descansan en el plano del dibujo. Por lo tanto tampoco se encontrará en el plano del dibujo el rayo extraordinario AE, aunque el ordinario AF seguirá estando en él. Conviene señalar que, en este caso, el frente de la onda refractada extraordinaria DE continuará siendo perpendicular al plano de incidencia.

2. Caso en que la luz incide perpendicularmente a la cara refractora del cristal y el eje óptico OO' forma un ángulo oblicuo con dicha cara (fig. 155). En este caso, junto a cada uno de los puntos A, C, D se

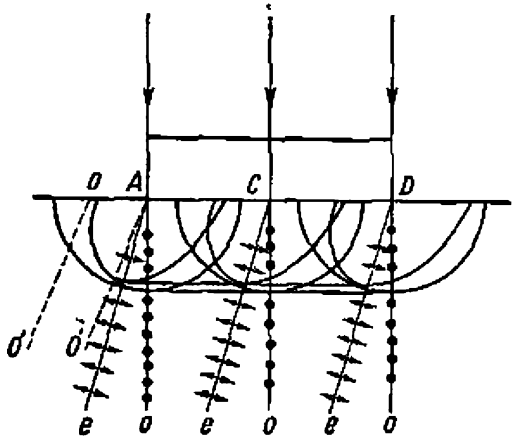

Fig. 155. Construcción de los rayos ordinario y extraordinario.
La luz cae normalmente sobre la cara refractora; el eje óptico OO' forma un ángulo oblicuo con dicha cara.

forman superficies de onda esféricas de radios iguales y por consiguiente, el frente de la onda ordinaria en el cristal será paralelo al incidente y los rayos ordinarios Ao, Co y Do pasarán la cara del cristal sin refractarse. El frente de la onda extraordinaria también será paralelo al incidente, pero sus puntos de contacto con las super-

ficies de onda elipsoidales estarán desviados respecto a los puntos A, C y D. Esto hace que los rayos extraordinarios Ae, Ce y De se desvíen de su dirección inicial. De esta forma la construcción geométrica de Huygens explica el hecho anteriormente mencionado de la desviación de los rayos extraordinarios cuando la luz incide normalmente sobre la cara del cristal.

3. Caso en que el eje óptico es paralelo a la cara refractora y perpendicular al plano de incidencia. Este caso es el representado en

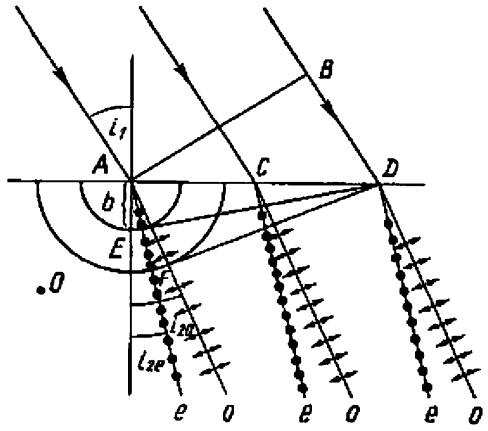

Fig. 156. **Construcción de los rayos ordinario y extraordinario.**
El eje óptico OO' es paralelo a la cara refractora y perpendicular al plano de incidencia.

la fig. 156. El plano de incidencia se ha hecho coincidir con el del dibujo. El eje óptico OO' es perpendicular al plano del dibujo.

Como el eje óptico es el eje de revolución de la superficie elipsoidal, en el caso que estudiamos la sección de la superficie de la onda extraordinaria por el plano del dibujo tiene la forma de circunferencia. Si el cristal es positivo, el radio de la circunferencia AE es igual al semieje menor b del elipsoide y menor que el radio de la superficie esférica de la onda ordinaria.

Como puede verse en la figura, la razón del seno del ángulo de incidencia i_1 al seno del ángulo de refracción del rayo extraordinario i_{2e} es igual a

$$\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_{2e}} = \frac{BD}{b}$$

cualquiera que sea el valor de i_1.

Llamando τ al tiempo que tarda la luz en recorrer el espacio BD en el primer medio (vacío),

$$BD = c\tau \text{ y } b = v_e\tau,$$

siendo c la velocidad de la luz en el vacío y v_e la velocidad de propagación en el cristal de las vibraciones luminosas cuyo vector campo eléctrico es paralelo al eje óptico.
De donde

$$\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_{2e}} = \frac{c}{v_e}. \qquad (1)$$

Como quiera que la razón c/v_e es constante, en este caso particular el rayo extraordinario cumple la ley general de la refracción. La relación

$$\frac{c}{v_e} = n_e$$

se llama *índice de refracción del rayo extraordinario.*

En los cristales positivos el índice de refracción del rayo extraordinario n_e es mayor que el del rayo ordinario n_o. En los cristales negativos $n_e < n_o$.

En la mayoría de los cristales los índices de refracción de los rayos ordinario y extraordinario se diferencian poco entre sí.

En la tabla V se dan los valores de los índices de refracción n_o y n_e para algunos cristales.

Tabla V

Valores de los índices de refracción del rayo ordinario n_o y del extraordinario n_e para $\lambda = 0{,}589\ \mu$

Cristal	n_o	n_e
Espato de Islandia	1,658	1,486
Salitre sódico	1,585	1,337
Cuarzo	1,543	1,552
Hielo	1,309	1,310

4. Caso en que el eje óptico es paralelo a la cara refractora y al plano de incidencia de la luz. En este caso (fig. 157) desde el punto A hacia el interior del cristal se propagan superficies de onda esféricas y elipsoidales cuyos puntos de tangencia se encuentran en la superficie de refracción del cristal en el plano de incidencia. Trazando desde el punto C los planos tangentes CF y CE obtenemos los frentes respectivos de las ondas refractadas ordinaria y extraordinaria. El corte de la superficie de la onda extraordinaria por el plano del dibujo tiene la forma de una elipse cuyo semieje mayor a coincide con el radio de la esfera R (cristal positivo) y cuyo semieje menor b es perpendicular a él. Como la elipse tiene la propiedad de que la

longitud de la subtangente CD no depende de la del semieje menor b, los puntos de contacto F y E se encuentran en una misma recta FED

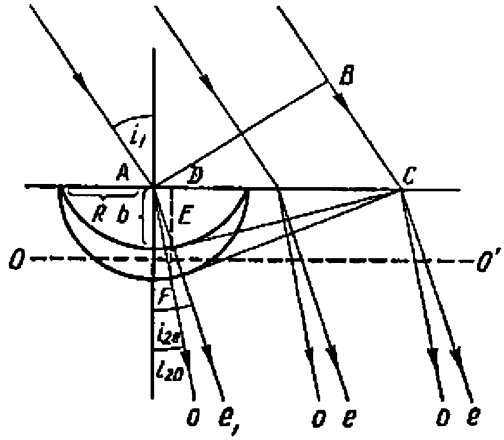

Fig. 157. Construcción de los rayos ordinario y extraordinario.
El eje óptico OO' es paralelo a la cara refractora y al plano de incidencia.

que es perpendicular a CA. De donde tenemos que:

$$\operatorname{tg} i_{2o} = \frac{AD}{DF} ,$$

$$\operatorname{tg} i_{2e} = \frac{AD}{DE} ,$$

donde i_{2o} es el ángulo de refracción del rayo ordinario y i_{2e} el ángulo de refracción del rayo extraordinario. De estas dos correlaciones obtenemos:

$$\frac{\operatorname{tg} i_{2o}}{\operatorname{tg} i_{2e}} = \frac{DE}{DF} = \frac{b}{R} .$$

Pero b/R es igual a la razón de las velocidades v_e/v_o, de donde

$$\frac{\operatorname{tg} i_{2o}}{\operatorname{tg} i_{2e}} = \frac{v_e}{v_o} . \qquad (2)$$

Finalmente tenemos que $\frac{v_e}{v_o} = \frac{n_o}{n_e}$, donde n_o es el índice de refracción del rayo ordinario y n_e el del rayo extraordinario; de donde la correlación (2) toma la forma:

$$\frac{\operatorname{tg} i_{2o}}{\operatorname{tg} i_{2e}} = \frac{n_o}{n_e} . \qquad (2a)$$

La veracidad de la fórmula (2a) se confirma experimentalmente. El hecho de que las correlaciones (1) y (2) se cumplan en la realidad

demuestra que el frente de la onda extraordinaria tiene en la sección perpendicular al eje óptico forma de circunferencia y en la sección paralela a dicho eje forma de elipse. De aquí se desprende directamente que la superficie de la onda extraordinaria es un elipsoide de revolución y no otra figura cualquiera.

5. **Caso en que el eje óptico es paralelo a la cara refractora y la luz incide perpendicularmente a dicha cara.** Como puede verse en la fig. 158, en este caso, tanto los rayos ordinarios como los extraordinarios atraviesan la cara sin sufrir refracción y se propagan en el

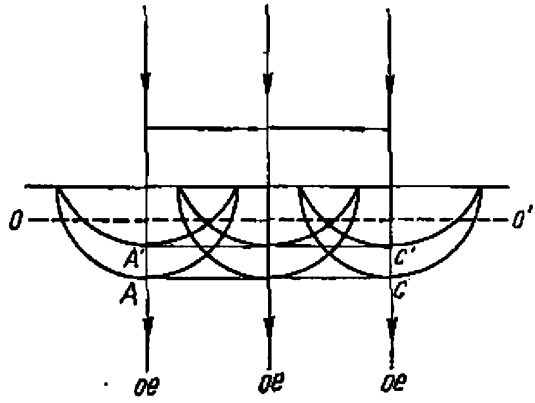

Fig. 158. Construcción de los rayos ordinario y extraordinario.
El eje óptico OO' es paralelo a la cara refractora; la luz cae normalmente sobre dicha cara.

cristal en una misma dirección. No obstante, los frentes AC y $A'C'$ de las ondas ordinaria y extraordinaria no coinciden: cuando el cristal es positivo el frente de la onda extraordinaria $A'C'$ *queda retrasado* con respecto al de la onda ordinaria AC; si, por el contrario, el cristal es negativo, el frente de la onda extraordinaria *adelantará* al de la onda ordinaria. Como resultado, en ambos casos se produce una diferencia de marcha determinada entre las ondas ordinaria y extraordinaria.

§ 288. **Cristales biáxicos.** En los cristales llamados biáxicos el rayo, al refractarse, por regla general se divide en dos, lo mismo que en los uniáxicos. Pero en estos cristales ninguno de los dos rayos refractados cumple la ley general de la refracción, es decir, la razón del seno del ángulo de incidencia al seno del ángulo de refracción no permanece invariable. Ambos rayos resultan plano polarizados y si se hace que sigan consecutivamente (véase la llamada del § 285) una misma dirección por el cristal, sus planos de polarización serán perpendiculares entre sí. A estos dos rayos les corresponde una superficie de onda de forma compleja cuyas secciones por tres planos

perpendiculares entre sí OXZ, OXY y OYZ se muestran en la fig. 159. Cada una de estas secciones representa una elipse y una circunferencia. En la fig. 160 puede verse un modelo espacial de la superficie

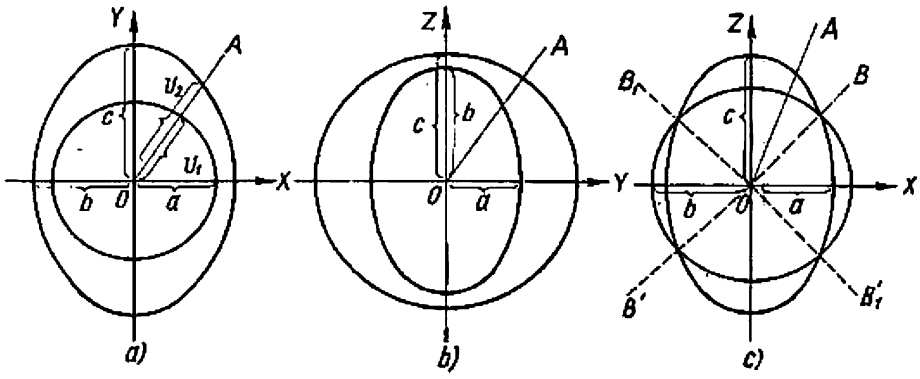

Fig. 159. Secciones de las superficies de onda por los planos OXY (*a*), OYZ (*b*) y OXZ (*c*) en un cristal biáxico.

de onda en un cristal biáxico. Como anteriormente entendemos por superficie de onda aquella que representa de por sí el lugar geométrico de los extremos de los *rayos*. Por lo tanto, los puntos de intersección de cualquier radio vector OA (fig. 159) con las partes correspondientes de esta superficie determinan las velocidades v_1 y v_2 con que se propagan ambos rayos en esta dirección. Como puede verse en la fig. 159, *c*, existen *dos* direcciones BB' y B_1B_1' a lo largo de las cuales coincide el valor de las velocidades v_1 y v_2. Estas direcciones se llaman *ejes ópticos de primer orden* o *birradiales*. Estos cristales se llaman biáxicos por tener estos dos ejes. El ángulo que forman entre sí los ejes varía mucho en los diferentes cristales y puede alcanzar muchos grados. Si disminuimos mentalmente el ángulo entre ejes, los puntos de intersección de la circunferencia con la elipse (fig. 159) se irán aproximando y en el límite coincidirán. Al ocurrir esto la superficie de onda se dividirá en dos: una esférica y otra elipsoidal, que serán tangentes en dos puntos, lo cual corresponde al caso de los cristales uniáxicos. Por lo tanto, el cristal uniáxico puede considerarse como un caso particular del biáxico.

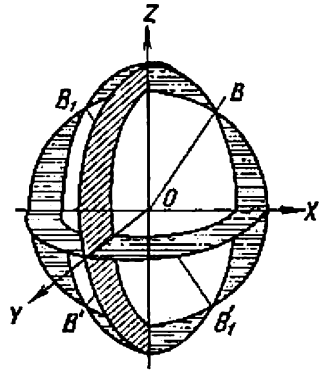

Fig. 160. Superficies de onda en un cristal biáxico.

La teoría de la propagación de la luz en los cristales biáxicos parte de la hipótesis de que cada una de las partículas del cristal es un oscilador anisótropo. Estos osciladores tienen la propiedad de que al desplazarse a lo largo de tres direcciones determinadas, perpendiculares entre sí, provocan una fuerza cuasielástica dirigida en sentido contrario al desplazamiento. Si hacemos que coincidan con estas tres direcciones los tres ejes de coordenadas OX, OY y OZ de un sistema cartesiano, podemos suponer que

$$f_x = -k_x \cdot x, \quad f_y = -k_y \cdot y, \quad f_z = -k_z \cdot z.$$

Si la dirección de traslación s forma con los ejes de coordenadas los ángulos α, β y γ, la fuerza f que se produce vendrá determinada por el valor de sus componentes sobre los ejes:

$$f_x = -k_x s \cos\alpha, \quad f_y = -k_y s \cos\beta, \quad f_z = -k_z z \cos\gamma.$$

En este caso la fuerza f no estará dirigida en sentido contrario al desplazamiento, sino que formará con él un ángulo obtuso. A las tres direcciones OX, OY y OZ les corresponden los tres valores principales de la constante dieléctrica del cristal ε_x, ε_y y ε_z y los tres valores de la velocidad de la luz:

$$v_a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad v_b = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}}, \quad v_c = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}}.$$

Estos valores de las velocidades v_a, v_b y v_c determinan los radios de las circunferencias y los semiejes de las elipses a, b y c en las correspondientes secciones de la superficie de onda (fig. 159).

Las relaciones

$$\frac{c}{v_a} = n_a, \quad \frac{c}{v_b} = n_b \text{ y } \frac{c}{v_c} = n_c$$

se llaman *índices de refracción principales* del cristal biáxico. En la tabla VI se dan los valores de los índices de refracción principales y de los ángulos entre los ejes ópticos de algunos cristales biáxicos.

Tabla VI

Valores de los índices de refracción principales n_a, n_b y n_c de los ángulos 2α entre los ejes ópticos de los cristales biáxicos para $\lambda = 0{,}589\ \mu$

Cristal	n_a	n_b	n_c	2α
Mica	1,560	1,594	1,598	42°
Aragonita	1,531	1,682	1,686	18°
Azufre (cristal)	1,950	2,043	2,240	69°
Topacio	1,619	1,620	1,627	49°

En los cristales biáxicos la superficie de onda presenta en los lugares por donde pasan los ejes ópticos de primer orden unos huecos cónicos (cuatro en total). La existencia de estos huecos da lugar a fenómenos ópticos muy peculiares que se llaman *refracciones cónicas internas y externas.*

La circunferencia y la elipse que resultan al cortar la superficie de onda con el plano XOZ tienen una tangente común MM' (fig. 161). La recta OB, trazada desde el centro al punto de intersección de la circunferencia con la elipse, es un eje óptico de primer orden. La perpendicular ON trazada desde el centro a la tangente MM' es lo que se llama binormal (eje óptico de segundo orden).

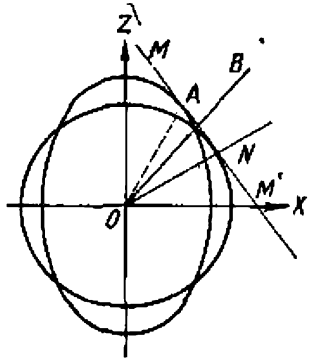

Fig. 161. Explicación de la refracción cónica interna.

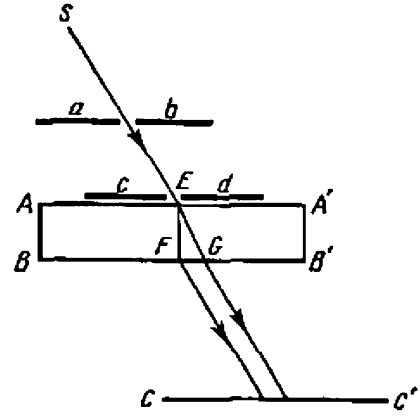

Fig. 162. Procedimiento para observar la refracción cónica interna.

Si se hace pasar por MM' un plano perpendicular a la binormal ON, los puntos de tangencia de este plano con la superficie de onda formarán un círculo. Por esto, el frente de onda plano MM' corresponde a una infinidad de rayos situados a lo largo de las generatrices del cono cuyo vértice es el punto O y cuya base circular tiene el diámetro NA. Uno de estos rayos coincide con la binormal ON. Cuando la luz sale del cristal todos los rayos se orientan perpendicularmente al frente de onda plano; esto da lugar a que los rayos formen un cilindro hueco que produce en la pantalla (o en la retina del ojo cuando la observación es visual) un anillo brillante redondo. Este fenómeno se llama refracción cónica interna. Este tipo de refracción puede observarse en una lámina de aragonita cuyas caras planas AA' y BB' sean perpendiculares a la binormal ON. Las pantallas ab y cd, (fig. 162) con un pequeño agujero cada una, sirven para dejar pasar un rayo de luz estrecho SE. Cuando este rayo SE tiene una dirección determinada, dentro de la lámina de cristal se forma el cono de rayos hueco EFG. Al salir la luz del cristal este cono se transforma en un cilindro también hueco que produce en la pantalla CC' un anillo brillante cuyo diámetro no depende de la distancia que hay entre la pantalla CC' y el cristal.

La refracción cónica externa se debe a que al rayo OB que se propaga en el cristal biáxico a lo largo de un eje óptico de primer orden, le corresponden una infinidad de frentes de onda planos BM, BM', etc. (fig. 163). Al salir del cristal estos frentes planos se propagan en diferentes direcciones y los rayos perpendiculares a ellos se sitúan a lo largo de las generatrices del cono. Para observar la refracción cónica externa hay que dirigir sobre un cristal (fig. 164) un cono de rayos convergente conseguido con la lente L, de manera que en dicho cristal se forme un rayo SE que pase a lo largo del eje óptico de primer orden. Cuando este rayo sale del cristal, a través del agujero E de una pantalla opaca,

origina un cono de rayos hueco *EFG*. Este cono de rayos forma en la pantalla *CC'* un anillo brillante cuyo diámetro aumenta a medida que se separa la pantalla *CC'* del cristal.

La existencia de la refracción cónica es una magnífica confirmación de la teoría de la propagación de la luz en los cristales.

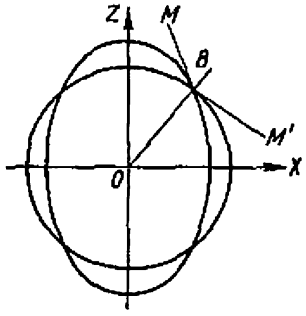

Fig. 163. Explicación de la refracción cónica externa.

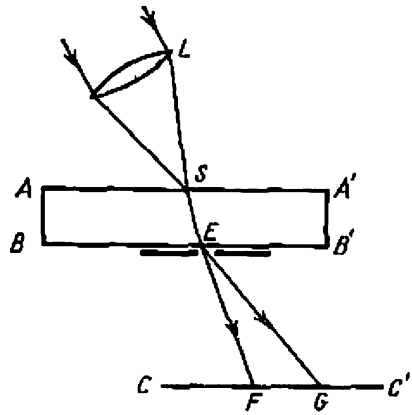

Fig. 164. Procedimiento para observar la refracción cónica externa.

§ 289. **Aparatos polarizadores.** Para obtener de la luz natural luz plano polarizada puede utilizarse la reflexión bajo el ángulo de Brewster o la doble refracción en un cristal cualquiera. Sin embargo, estos dos procedimientos utilizados directamente son poco cómodos. La luz que se refleja bajo el ángulo de Brewster constituye solamente una pequeña fracción de la incidente y, por lo tanto, el rayo plano polarizado que se obtiene es poco intenso. Cuando se emplea la doble refracción, si el espesor del cristal no es muy grande, la distancia entre los dos rayos es muy pequeña. Para aumentar esta distancia se utilizan sistemas de cristales más complicados, de los cuales vamos a estudiar los de uso más frecuente.

1. **Prisma de Wollaston.** El prisma de Wollaston (fig. 165) consta de dos prismas rectangulares de espato de Islandia. Estos prismas están pegados por sus hipotenusas. El prisma *ABC* tiene el eje óptico paralelo al cateto *AB*; el *ACD* lo tiene paralelo a la arista *C* y perpendicular al plano del dibujo. El rayo natural incide normalmente sobre la cara *AB*; los dos rayos que se forman en el prisma *ABC*, ordinario y extraordinario, siguen una dirección perpendicular al eje óptico teniendo respectivamente las velocidades v_o y v_e. Al pasar al segundo prisma *ACD*, estos rayos siguen también la dirección perpendicular al eje óptico, pero como los ejes ópticos de los prismas son perpendiculares entre sí, el rayo ordinario del primer prisma se transforma en extraordinario del segundo y viceversa. De esta forma el rayo que era ordinario en el primer prisma se refracta en la super-

ficie de separación con un índice de refracción relativo n_e/n_o, mientras que el rayo que era extraordinario en el primer prisma se refracta con un índice de refracción relativo n_o/n_e. Para el espato de Islandia $n_o > n_e$, por consiguiente, $\frac{n_e}{n_o} < 1$; $\frac{n_o}{n_e} > 1$, y el primer rayo se refracta hacia la arista C del prisma ACD, mientras que el segundo lo hace en dirección a su base AD. De esta forma se consigue

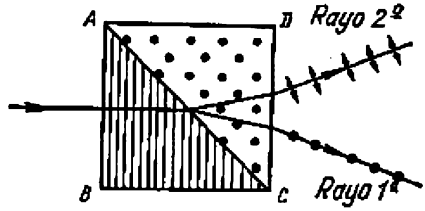

Fig. 165. Prisma Wollaston.

una separación considerable de los rayos. Ambos rayos resultan plano polarizados: en el primer rayo (extraordinario del segundo prisma) el vector campo eléctrico vibra paralelamente al eje óptico del segundo prisma; en el segundo (ordinario del segundo prisma) el vector campo eléctrico vibra perpendicularmente a dicho eje.

2. **Prisma de Nicol.** El prisma de Nicol o simplemente nicol (fig. 166, *a*) está formado por dos prismas rectangulares de espato

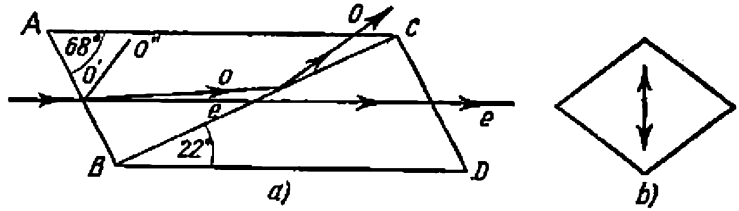

Fig. 166. Prisma de Nicol

de Islandia. Los ángulos agudos de estos prismas miden 68° y 22°. Los dos prismas están pegados con bálsamo del Canadá por el cateto BC. El eje óptico $O'O''$ se encuentra en el plano del dibujo y forma un ángulo de 48° con la cara BA (lo mismo ocurre en el segundo prisma). En el primer prisma el rayo incidente se divide en dos, de los cuales el ordinario O cae sobre la capa de bálsamo del Canadá BC formando un ángulo de cerca de 76°. El índice de refracción del bálsamo del Canadá $n = 1{,}550$ es menor que el índice de refracción del rayo ordinario $n_o = 1{,}658$; el ángulo de incidencia $i = 76°$ es mayor que el

ángulo límite y el rayo ordinario O experimenta la reflexión total en la superficie de separación cristal-bálsamo del Canadá. Así esto se debe que este rayo, en vez de pasar al segundo prisma, salga por la cara AC. El índice de refracción del rayo extraordinario es menor que el del bálsamo del Canadá y, por consiguiente, como no sufre la reflexión total, pasa a través del segundo prisma. De esta forma solamente el rayo extraordinario pasa por los dos prismas. El ordinario puede ser absorbido por la superficie pintada de negro de

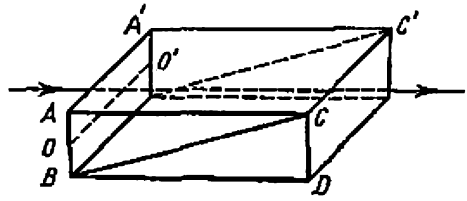

Fig. 167. Prisma de polarización con el eje óptico OO' paralelo a la cara AA'.

engaste del prisma. El prisma de Nicol deja pasar luz totalmente polarizada en forma de haces con ángulos de divergencia de hasta 29°.

La sección transversal de este prisma tiene forma de rombo. En la luz que pasa, el vector campo eléctrico vibra en dirección paralela a la diagonal menor del rombo (indicada con la flecha en la fig.166,*b*).

El inconveniente del prisma de Nicol es que el bálsamo del Canadá no es transparente a los rayos ultravioletas y, por lo tanto, solamente puede utilizarse para obtener luz plano polarizada de los rayos visibles.

Una variante del prisma de Nicol, que también se basa en la reflexión total de uno de los rayos, se muestra en la fig. 167. El eje óptico OO' es paralelo en este caso a la cara AA'. Las dos mitades del prisma se pegan con bálsamo del Canadá o con glicerina; el empleo de esta última hace que el prisma sea transparente a los rayos ultravioletas. Las superficies delantera y trasera del prisma son perpendiculares a las aristas AC y $A'C'$, lo que permite que la luz pase por el prisma sin cambiar de dirección.

3. Dispositivo basado en el dicroísmo. Como dijimos en el § 285, los cristales de turmalina presentan gran dicroísmo: un cristal de turmalina de 1 mm de espesor sólo deja pasar prácticamente al rayo extraordinario y, por lo tanto, puede servir de polarizador. Pero la turmalina tiene el inconveniente de que absorbe selectivamente incluso la luz del rayo extraordinario. Además, la luz plano polarizada que pasa a través de la turmalina tiene una coloración amarillo-verdosa bastante intensa. Esta circunstancia limita considerablemente el empleo de los cristales de turmalina como dispositivos polarizadores.

Ultimamente se han extendido mucho las láminas polarizadoras llamadas *polaroides*. Son éstas unas películas de celuloide o de otro material transparente cualquiera sobre las cuales se extiende una capa delgada de cristalitos microscópicos debidamente orientados de sustancias de gran dicroísmo. La sustancia que más se utiliza es el sulfato de iodoquinina, llamado también herapatita. La herapatita presenta una notable selectividad en la absorción, gracias a lo cual dos polaroides cruzados dejan pasar sensiblemente el extremo violeta del espectro. Pero la ventaja principal del polaroide es

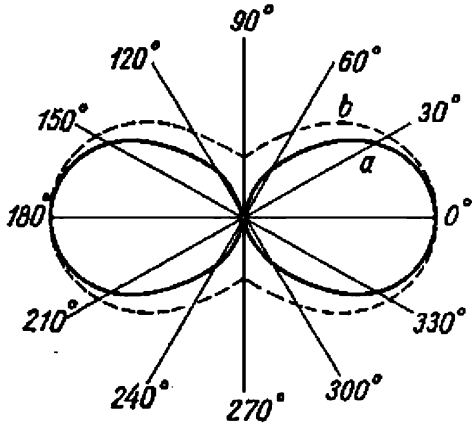

Fig. 168. Variación de la potencia de la luz en función del ángulo que forma el nicol con el plano en que vibra el vector campo eléctrico: a) plano polarizada; b) polarizada parcialmente.

la de tener forma de hojas delgadas que pueden alcanzar grandes dimensiones, además de ser ligero y relativamente barato, por lo que se emplea mucho en todos aquellos casos en que no es necesario obtener un grado de polarización demasiado alto.

Los aparatos polarizadores se utilizan para transformar la luz natural en luz polarizada y para analizar el carácter de la polarización. Si la luz que se observa se extingue por completo cuando el nicol toma una posición determinada es señal de que está polarizada totalmente. Como ya hemos dicho, la dirección de las vibraciones del vector campo eléctrico de la luz que pasa a través de un prisma de Nicol es paralela a la diagonal menor de su sección transversal. Por esta razón el plano de polarización de la luz viene dado por la dirección que toma la diagonal menor del prisma *cuando la luz se extingue por completo*.

Si la dirección que toma la diagonal menor del nicol forma un ángulo α con el plano en que vibra el vector campo eléctrico E_0 de la luz que incide en el prisma, la amplitud del vector campo eléctrico de las vibraciones que pasan el prisma será $E = E_0 \cos \alpha$.

De aquí, llamando w_0 a la potencia del flujo de la luz polarizada que incide sobre el prisma de Nicol y w a la del que lo atraviesa, tendremos

$$w = w_0 \cos^2 \alpha. \tag{1}$$

La fig. 168 representa la variación de w en función del ángulo α en forma de diagrama vectorial (la curva de trazo continuo). En dos posiciones ($\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$) la luz pasa en su totalidad por el prisma, mientras que en otras dos posiciones $\left(\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ y } \alpha = \frac{3\pi}{2}\right)$ se extingue totalmente. En realidad en cada nicol existen pérdidas de luz y cierta difusión producida por heterogeneidades locales (burbujas, rayaduras, etc.), lo que hace que cuando $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$ la potencia de la luz transmitida w sea menor que w_0, y cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, hasta cierto punto pasa luz a través del prisma.

Los aparatos polarizadores permiten también determinar el grado de polarización de una luz parcialmente polarizada. Cuando la luz que incide sobre un nicol (u otro aparato polarizador) está polarizada parcialmente no es posible extinguirla variando la posición del prisma. La variación de la potencia del flujo luminoso en función del ángulo α (fig. 168) se representa en este caso por la curva de trazo punteado (más adelante veremos que esta misma es la dependencia que existe cuando la luz está polarizada elípticamente). La luz parcialmente polarizada puede considerarse como una mezcla de luz polarizada y luz natural.

Se llama *grado de polarización* de una luz parcialmente polarizada la magnitud

$$p = \frac{w_{\parallel} - w_{\perp}}{w_{\parallel} + w_{\perp}}, \tag{2}$$

donde $w_{\parallel}$ es la potencia del flujo en aquella posición del nicol en que dicho flujo alcanza un máximo (en la fig. 168, 0° y 180°) y $w_{\perp}$, la potencia del flujo cuando alcanza un mínimo (en la fig. 168, 90° y 270°). *El grado de polarización* se suele expresar en %. Se llama *defecto de polarización* la magnitud

$$\rho = \frac{w_{\parallel}}{w_{\perp}}.$$

§ 290. Interferencia de rayos polarizados. Polarización elíptica y circular. Los rayos ordinario y extraordinario que se producen con la doble refracción de la *luz natural* no son coherentes. Si un rayo natural se descompone en dos, polarizados en distintos planos *A* y *B*, y luego, por medio de un aparato polarizador, se hace que estos últimos vibren en un mismo plano, no interferirán. Esto se explica por el hecho de que en la luz natural las vibraciones que tienen lugar en distintos planos son producidas por distintos átomos o moléculas que no están relacionados entre sí y, por consiguiente, no tienen diferencias de fase constantes (es decir, no son coherentes).

En cambio, los rayos, ordinario y extraordinario, *que proceden de un mismo rayo polarizado* son coherentes. Si las vibraciones de dos de estos rayos se reducen a un mismo plano por medio de un apa-

rato de polarización, interferirán como de ordinario. Cuando las vibraciones de dos rayos coherentes plano polarizados tienen lugar en direcciones perpendiculares entre sí, se componen lo mismo que dos movimientos vibratorios perpendiculares entre sí y producen una vibración de carácter elíptico (t. 1, § 101).

Las ondas luminosas cuyo vector campo eléctrico varía con el tiempo de forma que su extremo describe una elipse, se dice que *están polarizadas elípticamente*. En el caso particular en que la elipse se transforma en circunferencia se tratará de luz *polarizada circularmente*. El vector campo magnético de la onda siempre es perpendicular al vector campo eléctrico, y en las ondas del tipo que estudiamos también varía con el tiempo de manera que su extremo describe una elipse o un círculo.

Examinemos detenidamente el caso de la formación de ondas elípticas. En el § 287 vimos que cuando un haz de rayos incide normalmente sobre una lámina de cristal uniáxico cuyo eje óptico es paralelo a la superficie de refracción, los rayos ordinario y extraordinario siguen una misma dirección pero con velocidades diferentes. Supongamos ahora que sobre una lámina de este tipo incide un rayo plano polarizado cuyo plano de polarización forma con el de la sección principal de la lámina un ángulo distinto de cero y de $\pi/2$. En este caso dentro de la lámina se formarán dos rayos, uno ordinario y otro extraordinario, que serán coherentes. En el momento en que estos rayos aparecen en la lámina la diferencia de fase entre ellos es igual a cero; pero irá aumentando a medida que los rayos penetran en el cristal. Calculemos esta diferencia de fase.

Cada rayo al pasar a través de una lámina de cristal de espesor l sufre un retraso de fase igual a $\frac{2\pi l}{\lambda}$, siendo λ la longitud de onda de dicho rayo en el cristal. Para el rayo ordinario la longitud de onda $\lambda_o = \frac{v_o}{\nu}$, donde v_o es la velocidad de propagación en el cristal y ν, la frecuencia de sus vibraciones. Como $v_o = \frac{c}{n_o}$, en que n_o es el índice de refracción del rayo ordinario, $\lambda_o = \frac{c}{n_o \nu}$. De la misma forma obtenemos para la longitud de onda del rayo extraordinario en el cristal la expresión $\lambda_e = \frac{c}{n_e \nu}$, siendo n_e el índice de refracción del rayo extraordinario. De aquí se deduce que la diferencia de fase entre ambos rayos será

$$\Delta = \frac{2\pi l}{\lambda_o} - \frac{2\pi l}{\lambda_e} = \frac{2\pi l \nu}{c}(n_o - n_e).$$

Y como c/ν es la longitud de onda en el vacío λ, tenemos que

$$\Delta = \frac{2\pi l}{\lambda}(n_o - n_e). \qquad (1)$$

Por lo tanto, la diferencia de fase entre ambos rayos será tanto mayor cuanto mayor sea la diferencia entre los índices de refracción $n_o - n_e$ y mayor el espesor del cristal l. Si este espesor se escoge de forma que $\Delta = k\pi$, donde k es un número entero, ambos rayos, al salir de la lámina, vuelven a dar un rayo plano polarizado. Cuando k sea un número par, el plano de polarización de este rayo coincidirá con el del rayo que incide sobre la lámina; cuando k sea impar, el plano de polarización del rayo que sale del cristal formará un ángulo igual a $\pi/2$ con el plano de polarización del rayo incidente

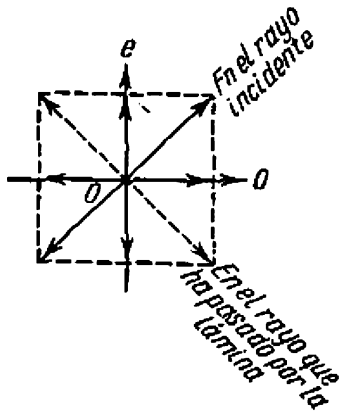

Fig. 169. Composición de dos vibraciones perpendiculares entre sí cuya diferencia de fase es $k\pi$.

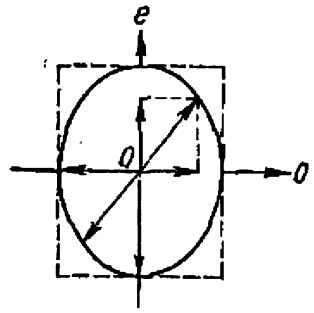

Fig. 170. Generación de las vibraciones elípticas.

(fig. 169). Para todos los demás valores de la diferencia de fase Δ las vibraciones de ambos rayos al salir de la lámina se componen produciendo una vibración elíptica. Si $\Delta = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, los ejes de la elipse coinciden con las direcciones de vibración de los rayos ordinario y extraordinario (fig. 170).

Las amplitudes de las vibraciones de los rayos ordinario y extraordinario vienen determinadas por el ángulo que forma el plano de polarización del rayo que incide sobre la lámina con el plano de la sección principal de dicha lámina (§ 285). Las amplitudes de los dos rayos serán iguales entre sí cuando el plano de polarización del rayo incidente forme un ángulo de 45° con el plano de la sección principal de la lámina. En este caso la elipse se transforma en circunferencia y, por consiguiente, se produce una luz polarizada circularmente.

El espesor mínimo de una lámina capaz de transformar un rayo plano polarizado en otro polarizado circularmente ($\Delta = \pi/2$) se

determina por la expresión [véase la fórmula (1)]

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi l}{\lambda}(n_o - n_e),$$

de donde

$$l = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)}. \qquad (2)$$

Esta lámina producirá una diferencia de marcha entre el rayo ordinario y el extraordinario igual a $\lambda/4$, por esta razón se la denomina abreviadamente *lámina de cuarto de onda*. Es evidente que una lámina de cuarto de onda solamente puede producir una diferencia de marcha igual a $\lambda/4$ entre ambos rayos cuando se trate de una luz de longitud de onda λ determinada. Para luces que tengan otras longitudes de onda producirá una diferencia de marcha que será algo diferente de $\lambda/4$, debido tanto a que l depende directamente de λ, como a que la diferencia de índices de refracción $n_o - n_e$ también depende de λ.

Es evidente que lo mismo que pueden hacerse láminas de cuarto de onda también se pueden hacer *láminas de «media onda»*, es decir, láminas que producen entre los rayos ordinario y extraordinario una diferencia de marcha igual a $\lambda/2$, lo que corresponderá a una diferencia de fase igual a π. De acuerdo con lo antedicho una lámina de éstas puede servir para hacer girar en $\pi/2$ el plano de polarización de la luz plano polarizada.

Examinemos, por ejemplo, el caso de una lámina de cuarto de onda hecha de espato de Islandia. Para los rayos amarillos ($\lambda = 0{,}59\ \mu$) el espato de Islandia presenta una diferencia de índices de refracción $n_o - n_e = 0{,}172$. Por lo tanto, de acuerdo con la fórmula (2) obtenemos que para que la lámina sea de cuarto de onda su espesor deberá ser:

$$l = \frac{5{,}9 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 0{,}172}\ \text{cm} = 8{,}6 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}.$$

Este mismo espato presenta para los rayos azules ($\lambda = 0{,}46\ \mu$) una diferencia de índices de refracción $n_o - n_e = 0{,}184$ y, por consiguiente, el espesor de una lámina de cuarto de onda para estos rayos será igual a $7{,}8 \cdot 10^{-5}$ cm.

Como puede verse el espesor de las láminas de cuarto de onda es muy pequeño y su fabricación presenta dificultades. Por esta razón, las láminas se hacen generalmente de un espesor capaz de producir una diferencia de fase $\Delta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, siendo k un número entero cualquiera. El efecto que producen estas láminas es equivalente al producido por las de cuarto de onda, puesto que la diferencia de la fase complementaria $2k\pi$ no juega ningún papel.

Por regla general las láminas de cuarto de onda no se hacen de espato de Islandia, sino de mica o yeso (espejuelo), que son más fáciles de labrar. Los cristales de estas dos últimas sustancias son biáxicos (§ 288), pero pueden tallarse también en láminas que produzcan una diferencia de marcha entre los rayos ordinario y extraordinario igual a $\lambda/4$.

Como ya hemos dicho, por medio de una lámina de cuarto de onda ($\lambda/4$) se puede conseguir que un rayo plano polarizado se polarice elíptica o circularmente y, viceversa, de un rayo polarizado elíptica o circularmente se puede obtener, por medio de una lámina de cuarto de onda, un rayo plano polarizado.

Esta propiedad se emplea para distinguir la luz polarizada elípticamente de la polarizada parcialmente o la luz polarizada circularmente de la luz natural. Pero un solo instrumento polarizador, por ejemplo un nicol, es insuficiente para diferenciar estos tipos de polarización de los rayos. Efectivamente, tanto en el caso de la luz polarizada elípticamente como en el de la polarizada parcialmente, al girar el nicol sólo se observa una variación de la intensidad de la luz entre ciertos valores máximos y mínimos de la misma. En el caso de lea luz polarizada circularmente o de la luz natural, cualquiera que sea el giro que se dé al nicol la intensidad de la luz permanece invariable. Ahora bien, si previamente se intercala una lámina de cuarto de onda ($\lambda/4$), y se orienta debidamente, la luz polarizada elípticamente se convierte en linealmente polarizada y puede extinguirse con el nicol. La luz polarizada parcialmente, por el contrario, no sufre alteración al atravesar la lámina de $\lambda/4$. Análogamente, la luz polarizada circularmente puede distinguirse de la natural basándose en la circunstancia de que aquélla, después de pasar por una lámina de $\lambda/4$, puede extinguirse con un nicol.

Cuando una luz polarizada elípticamente se hace pasar por un nicol, su intensidad depende del ángulo de giro que se dé a éste, lo mismo que en el caso de la luz polarizada parcialmente. En la fig. 168 se representa con línea de trazo punteado el diagrama polar que da la potencia del flujo luminoso w en función del ángulo de giro α del nicol. Las direcciones en las cuales se obtienen los valores máximo y mínimo de la potencia del flujo luminoso $w_{máx}$ y $w_{mín}$, dan las direcciones de los ejes de la elipse $2a$ y $2b$. La relación entre los semiejes

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{w_{máx}}{w_{mín}}}.$$

Esta igualdad es consecuencia de que las amplitudes de las vibraciones correspondientes a los valores máximo y mínimo de la potencia del flujo luminoso son iguales a los semiejes de la elipse a y b.

El análisis de la luz polarizada elípticamente que acabamos de indicar puede efectuarse valiéndose de láminas de $\lambda/4$ cuando la polarización elíptica se produce como resultado de la composición de dos vibraciones de distinta amplitud perpendiculares entre sí cuya diferencia de fase sea igual a $\pi/2$. Pero si la polarización elíptica está producida por la composición de dos vibraciones perpendiculares entre sí cuya diferencia de fase $\Delta \neq \pi/2$, para convertir la luz en plano polarizada hay que introducir una diferencia de fase suplementaria Δ' que sumada a la Δ dé como resultado una diferen-

cia de fase igual a π (o a $2k\pi$). En estos casos, en lugar de las láminas de $\lambda/4$ se emplean unos instrumentos especiales llamados *compensadores*, con los cuales se puede conseguir cualquier diferencia de fase Δ.

El tipo de componsador más simple es el que se conoce con el nombre de *compensador de Babinet* que está formado por dos cuñas de cuarzo talladas de tal manera que sus ejes ópticos son perpendiculares entre sí (fig. 171). Esto hace que el rayo ordinario del prisma superior se transforme en extraordinario del inferior y viceversa. Gracias a esto, en el sitio donde la luz atraviesa espesores iguales en ambas cuñas, entre los rayos no se produce ninguna diferencia de fase. Pero en cualquier otro sitio la luz atraviesa un espesor d_1 en una de las cuñas y otro diferente d_2 en la otra, por lo que entre los rayos se produce una diferencia de fase determinada. De esta forma la diferencia de fase que se obtiene puede ser cualquiera y depende del sitio de las cuñas por donde pasa la luz. El compensador de Babinet resulta incómodo por tener que operar con haces de luz muy estrechos, puesto que si éstos son anchos en cada una de sus partes se producirá una diferencia de fase distinta. Este inconveniente se evita en el *compensador de Soleil* que consta de dos cuñas de cuarzo de ejes ópticos paralelos y de una lámina plana de caras paralelas, también de cuarzo, cuyo eje es perpendicular a los de las cuñas (fig. 172). La cuña superior puede desplazarse paralelamente a sí misma por medio de un tornillo micrométrico. Este desplazamiento sirve para variar el espesor conjunto de las dos cuñas (en el

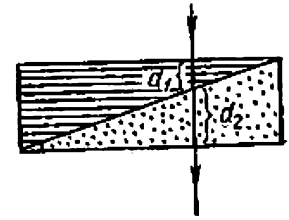

Fig. 171. Compensador de Babinet.

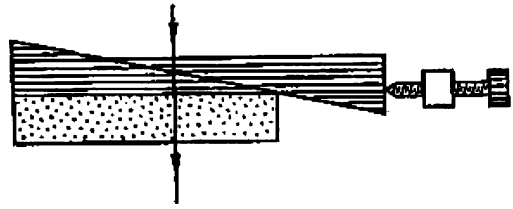

Fig. 172. Compensador de Soleil.

espacio en que éstas se cubren entre sí), el cual puede regularse de forma que sea igual o distinto del de la lámina inferior. En el primer caso el compensador no produce ninguna diferencia de fase entre los dos rayos, mientras que en el segundo puede conseguirse la diferencia de fase que sea necesaria.

§ 291. Una lámina de cristal entre dos nicoles. Hasta aquí hemos estudiado las interferencias de rayos polarizados cuyas vibraciones tienen lugar en direcciones perpendiculares entre sí. Examinemos ahora el caso de la interferencia de dos rayos polarizados cuyas vibraciones se reducen a un plano. Este caso puede realizarse colocando una lámina de cristal de caras planas paralelas AB entre dos nicoles N_1 y N_2 (fig. 173). Supongamos que la lámina está hecha de un cristal uniáxico tallado paralelamente al eje óptico. Supongamos también que los nicoles están cruzados y que a través de todo

esto sistema pasa un haz de rayos paralelos. Representemos la posición de las secciones principales de ambos nicoles por medio de las líneas N_1 y N_2 (fig. 174). En estas condiciones, en el rayo que haya pasado por el primer nicol el vector campo eléctrico vibrará en la dirección N_1 y la amplitud de estas vibraciones se representará por el vector A_1. Admitamos que OO' coincide con la posición del plano de la sección principal de la lámina AB (fig. 173). Todo rayo que llegue a la lámina AB se desdoblará en uno ordinario y otro extraordinario,

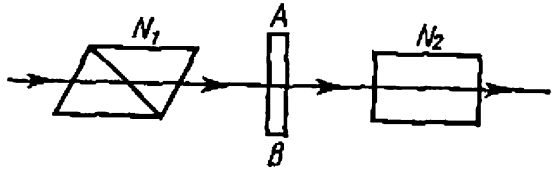

Fig. 173. Lámina de cristal de caras planas paralelas entre dos nicoles N_1 y N_2

los cuales se propagarán por dicha lámina en una misma dirección pero con velocidades distintas. El vector campo eléctrico vibrará en la onda extraordinaria en dirección OO' y en la ordinaria en dirección perpendicular a OO'. Llamemos A_e al vector amplitud de la primera de estas vibraciones y A_o al de las segundas. El valor de los vectores A_e y A_o se puede determinar proyectando el vector A_1 respectivamente sobre las direcciones OO' y la perpendicular a ella. Si la sección principal de la lámina forma un ángulo α con la sección principal del primer nicol, tendremos que

$$A_e = A_1 \cos\alpha \quad \text{y} \quad A_o = A_1 \operatorname{sen}\alpha. \tag{1}$$

Entre las vibraciones de ambos rayos, cuyas amplitudes son A_e y A_o respectivamente, habrá una diferencia de fase:

$$\Delta = \frac{2\pi l}{\lambda}(n_o - n_e). \tag{2}$$

El segundo nicol dejará pasar únicamente las vibraciones que representen de por sí la proyección de las A_e y A_o sobre la dirección N_2. Los vectores amplitud de estas vibraciones están representados en la fig. 174 por las flechas A_{2e} y A_{2o}. De la fig. 174 y de la igualdad (1) tenemos:

$$A_{2e} = A_e \operatorname{sen}\alpha = A_1 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha,$$
$$A_{2o} = A_o \cos\alpha = A_1 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha.$$

Por consiguiente, las amplitudes A_{2e} y A_{2o} son numéricamente iguales entre sí. Estas dos vibraciones proceden de una misma vibración plano polarizada A_1 y, por lo tanto, son coherentes y pueden interferir. Como puede verse en la fig. 174, los vectores A_{2e} y A_{2o}

están dirigidos en sentidos contrarios, por consiguiente, entre las correspondientes vibraciones, además de la diferencia de fase Δ determinada por la fórmula (2), existe una diferencia de fase complementaria π. De esta forma, la suma de sus diferencias de fase Δ_1 será

$$\Delta_1 = \frac{2\pi l}{\lambda}(n_o - n_e) + \pi. \qquad (3)$$

Cuando $\Delta_1 = 2k\pi$, siendo k un número entero, las vibraciones se refuerzan mutuamente al máximo y al mirar el campo a través de los

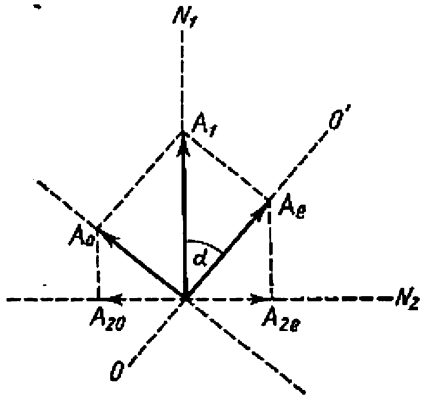

Fig. 174. Esquema para determinar la amplitud de las vibraciones después de haber atravesado una lámina de cristal y dos nicoles cruzados.

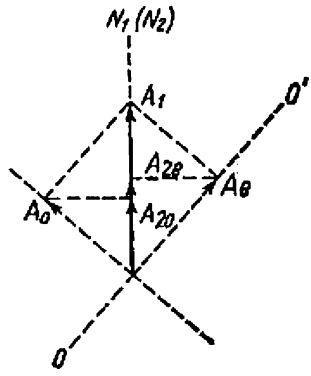

Fig. 175. Esquema para determinar la amplitud de las vibraciones después de haber atravesado una lámina de cristal y dos nicoles paralelos.

nicoles cruzados lo vemos iluminado. Cuando $\Delta_1 = (2k + 1)\pi$ las vibraciones se extinguen unas a otras y el campo queda oscuro. Si el sistema se ilumina con luz blanca las condiciones del reforzamiento máximo o de la amortiguación de las vibraciones no se realiza simultáneamente en los rayos de distintas longitudes de onda y por esto, para un espesor dado de la lámina de caras planas y paralelas intercalada entre los nicoles cruzados, el campo resulta uniformemente coloreado. El matiz de su coloración depende del espesor de la lámina y del valor que tome la diferencia de los índices de refracción $n_o - n_e$.

Si las secciones principales de los nicoles se colocan paralelamente la una a la otra (fig. 175), tendremos que

$$A_{2e} = A_e \cos\alpha = A_1 \cos^2\alpha.$$

$$A_{2o} = A_o \operatorname{sen}\alpha = A_1 \operatorname{sen}^2\alpha.$$

En este caso los dos vectores A_{2e} y A_{2o} estarán dirigidos en el mismo sentido y la diferencia de fase entre las vibraciones corres-

pondientes será:

$$\Delta_2 = \Delta = \frac{2\pi l}{\lambda}(n_o - n_e),$$

es decir, se diferencia de Δ_1 en π.

Cualquiera que sea el valor de ángulo α, a excepción de $\pm\pi/4$, las amplitudes A_{2e} y A_{2o} serán ahora diferentes y, por lo tanto, ningún espesor de la lámina puede hacer que las vibraciones se anulen totalmente entre sí. Cualquiera que sea el espesor de la lámina intercalada entre dos nicoles paralelos (y cualquiera que sea el valor de $n_o - n_e$) el campo resultará más o menos iluminado y coloreado.

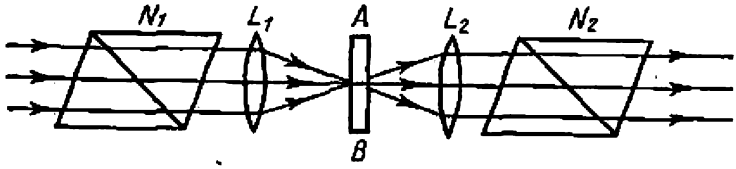

Fig. 176. Lámina de cristal entre dos nicoles sobre la que incide un cono de rayos convergentes.

Si los nicoles están colocados paralelamente las amplitudes A_{2e} y A_{2o} sólo serán iguales entre sí cuando $\alpha = \pm \pi/4$. En este caso la lámina intercalada entre los nicoles puede extinguir la luz.

Como la diferencia entre Δ_2 y Δ_1 es π, los nicoles paralelos amortiguan aquellos rayos que, con la misma lámina intercalada, se reforzaban cuando los nicoles estaban cruzados, y viceversa. Consecuencia de esto es que si el sistema antedicho se ilumina con luz blanca, la coloración que producen los nicoles paralelos es diferente de la que se obtiene con los nicoles cruzados. Estas dos coloraciones se llaman *complementarias*. Si se gira uno de los nicoles la coloración varía continuamente. Lo mismo ocurre si los nicoles permanecen inmóviles pero se hace que gire la lámina intercalada (varía el ángulo α).

Los fenómenos que acabamos de describir se conocen con el nombre de *polarización cromática*. Esta polarización se utiliza como método muy sensible para descubrir la doble refracción. Cuando la diferencia entre los índices de refracción $n_o - n_e$ es pequeña es difícil descubrir la doble refracción por observación directa de los rayos ordinario y extraordinario. Pero si se observa una lámina de sustancia débilmente anisótropa colocándola entre dos nicoles, el campo se ilumina, lo cual es una demostración de que existe doble refracción.

Un caso más complejo de polarización cromática es el que se observa en los rayos convergentes, cuando sobre una lámina de cristal AB (fig. 176), situada entre dos nicoles N_1 y N_2, se dirige por medio de una lente L_1 un cono de rayos convergentes. Un rayo que forme

con la normal a la superficie de la lámina un ángulo i_2 (fig. 177) recorrerá por ella una distancia

$$l' = \frac{l}{\cos i_2}.$$

Dos rayos, uno ordinario y otro extraordinario, que se propaguen por la lámina en la dirección dada adquirirán una diferencia de marcha:

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l}{\cos i_2} (n_o - n_i),$$

siendo n_i el índice de refracción del rayo extraordinario en la dirección que examinamos. Como resultado de la interferencia de estos rayos se produce una figura compleja, de la que en la fig. 178, *a* se

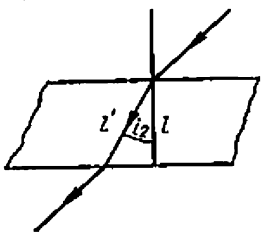

Fig. 177. Recorrido de un rayo que forma un ángulo i_2 con la normal a la superficie de una lámina.

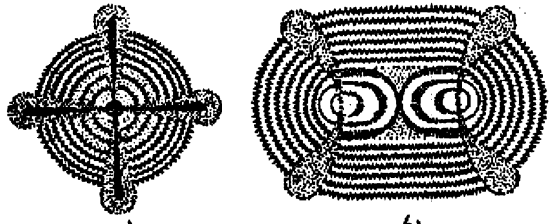

Fig. 178. Figura de interferencia producida por el paso de un haz convergente a través de una lámina situada entre dos nicoles: *a*, cuando el cristal es uniáxico; *b*, cuando el cristal es biáxico.

representa un caso particular. Aún más complicado el aspecto que toma la figura de interferencia cuando las láminas se tallan de cristales biáxicos; un caso particular de figura de este tipo es el representado en la fig. 178, *b*.

§ 292. Doble refracción artificial. A principios del siglo pasado se descubrió el fenómeno de la doble refracción que se produce en los cuerpos transparentes isótropos como consecuencia de deformaciones mecánicas. La forma más fácil de observar la anisotropía óptica por deformación mecánica es colocar el cuerpo que se analice A entre dos nicoles cruzados (fig. 179).

Cuando este cuerpo se somete a compresión o tracción unilateral a lo largo de la dirección OO' se produce en él una anisotropía óptica equivalente a la de un cristal uniáxico cuyo eje óptico sea OO'. Tanto el rayo ordinario como el extraordinario se propagan en dirección perpendicular a OO' sin separarse, pero con velocidades diferentes v_o y v_e. Si la sección principal del nicol N_1 (fig. 179) no es

paralela ni perpendicular a OO', la luz que pasa a través del cuerpo deformado quedará polarizada elípticamente y no podrá extinguirse con el nicol N_2.

La diferencia entre los índices de refracción $n_o - n_e = \frac{v_o}{c} - \frac{v_e}{c}$ puede servir de medida de la anisotropía. La experiencia demuestra

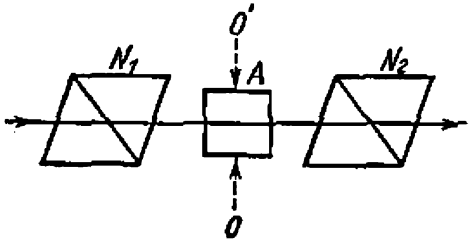

Fig. 179. Observación de la doble refracción producida por deformación mecánica.

que la diferencia $n_o - n_e$ es proporcional a la presión p a que se somete el cuerpo que se deforma:

$$n_o - n_e = kp,$$

siendo k una constante que depende de las cualidades de la sustancia. La diferencia de fase que adquieren los rayos ordinario y extraordinario al pasar por el cuerpo la distancia l es igual a

$$\Delta = \frac{2\pi l}{\lambda}(n_o - n_e) = cpl,$$

donde $c = \frac{2\pi k}{\lambda}$ es una nueva constante. Esta constante, que depende de la naturaleza de la sustancia y de la longitud de onda, puede ser positiva o negativa. Como Δ depende de λ, al producirse la deformación el campo iluminado tiene una coloración análoga a la que presenta cuando se observa la polarización cromática que producen los cristales naturales.

Esta doble refracción persiste después de cesar la acción de la fuerza deformadora, siempre que en el cuerpo siga existiendo tensión. Por ejemplo, los trozos de vidrio templado revelan una polarización cromática bien manifiesta. Este género de polarización cromática se utiliza para investigar las tensiones en cuerpos transparentes. La doble refracción artificial también se emplea para estudiar las deformaciones que se producen en modelos transparentes. Como quiera que la anisotropía óptica es proporcional a la presión p, por la forma que presentan las franjas de igual color (isócromas), que se observan cuando el modelo se coloca entre dos nicoles cruzados, puede juzgarse la magnitud de las tensiones que soporta. Haciendo

modelos de materiales transparentes (por regla general de celuloide) se puede resolver toda una serie de problemas teóricos y prácticos relacionados con las deformaciones que se producen en cuerpos de formas diferentes sometidos a cargas determinadas. Este método de estudio de las deformaciones (llamado *fotoelástico*) se ha extendido mucho últimamente. La foto 3 (véase el apéndice) representa las isócromas que se forman en una lámina con un orificio redondo pequeño sometida a tracción unilateral.

La anisotropía óptica puede producirse también en los líquidos sometidos a acciones dinámicas externas. Puede servir de ejemplo la doble refracción que se observa en las corrientes de ciertos líquidos cuando existe gradiente de velocidad. Si el líquido fluye laminarmente entre dos paredes, por ejemplo, entre las paredes de dos cilindros coaxiales, uno fijo y otro giratorio, se hace ópticamente anisótropo. Esta anisotropía se caracteriza por la magnitud de la diferencia de los índices de refracción de los rayos ordinario y extraordinario Δn y por el ángulo α que forma el eje óptico del líquido con la dirección del flujo. La anisotropía del líquido homogéneo que fluye es debida a las tensiones que experimenta, y en este sentido es análoga a la anisotropía que se produce en los cuerpos sólidos al deformarse. Si en el líquido existe cualquier clase de partículas anisótropas, la doble refracción se debe a la orientación de estas partículas en el flujo. La doble refracción también se produce cuando las partículas son de por sí isótropas, pero su forma no es esférica. El papel de estas partículas puede ser desempeñado por las moléculas de una sustancia disuelta, por ejemplo, las grandes moléculas de algunas sustancias orgánicas.

El fenómeno de la anisotropía óptica que se produce en el flujo fue utilizado por V. Tsvetkov y sus colaboradores para estudiar las propiedades de los polímeros, en particular de los polímeros que se utilizan en la fabricación de los cauchos sintéticos y de los plásticos.

§ 293. Doble refracción en un campo eléctrico. Otro ejemplo de anisotropía artificial es la que se produce en los cuerpos sometidos a la acción de un campo eléctrico. Este tipo de anisotropía fue descubierto en 1875 por Kerr y se conoce con el nombre de *fenómeno o efecto de Kerr*. La doble refracción en un campo eléctrico se observó primeramente al colocar dieléctricos sólidos entre las placas de un condensador cargado. Pero en este caso podía pensarse que el papel del campo eléctrico en esta doble refracción no era directo y que esta última se debía a deformaciones mecánicas producidas por el campo (fenómeno de la electrostricción; t. II, § 141). La existencia de la acción directa del campo eléctrico fue establecida definitivamente cuando Kerr descubrió este efecto en líquidos en los que la compresión estática no produce anisotropía óptica. Más tarde (en el año 1930) la doble refracción por acción de un campo eléctrico fue descubierta también en los gases.

El fenómeno de Kerr se puede observar en los líquidos colocando una cubeta, en la que previamente se instalan las placas de un condensador plano («célula de Kerr»), entre dos nicoles cruzados N_1 y N_2 (fig. 180). Cuando se carga el condensador la luz comienza a pasar por los nicoles. El líquido adquiere la misma propiedad que un

cristal uniáxico cuyo eje estuviera dirigido a lo largo del campo eléctrico. Este experimento demuestra que la diferencia entre los índices de refracción $n_o - n_e$ *es proporcional al cuadrado de la intensidad del campo* E. De aquí que la diferencia de fase Δ que se produce entre los rayos ordinario y extraordinario será:

$$\Delta = BlE^2,$$

siendo l el espacio de líquido recorrido por la luz y B una constante que depende exclusivamente de las propiedades de dicho líquido (*constante de Kerr*). Para la mayoría de los líquidos $B > 0$, pero existen líquidos para los que $B < 0$. El líquido que presenta la

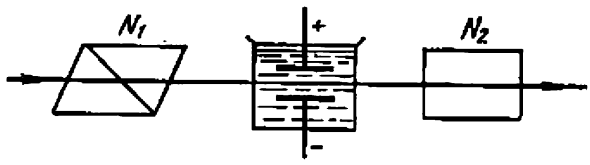

Fig. 180. Observación de la doble refracción producida por un campo eléctrico.

mayor constante de Kerr es el nitrobenceno, para él $B = 2 \cdot 10^{-5}$ *CGSE*. Como Δ depende del cuadrado de E, la diferencia de fase entre los rayos ordinario y extraordinario no depende de la dirección del campo eléctrico.

El fenómeno de Kerr se explica por la orientación de las moléculas anisótropas del líquido que produce la acción del campo eléctrico exterior. Esta acción orientadora del campo puede deberse a que las moléculas tengan constantemente un momento eléctrico (moléculas dipolos) o a que lo adquieran bajo la influencia del campo exterior. El tiempo necesario para que las moléculas se orienten en el campo eléctrico exterior no excede de 10^{-9} s; este mismo tiempo es suficiente para que se desorienten después de cesar la acción del campo y para que, como resultado, desaparezca la doble refracción.

Este valor tan pequeño del tiempo necesario para que aparezca o desaparezca la doble refracción fue determinado por primera vez mediante el experimento cuyo esquema se muestra en la fig. 181. La luz procedente de una chispa S, después de reflejarse en el sistema de espejos $M_1M_2M_3M_4$, pasa por los nicoles N_1 y N_2, entre los que se encuentra la célula de Kerr K. A las placas de esta célula y a los electrodos productores de las chispas S se les comunica una diferencia de potencial procedente de una misma fuente de fuerza electromotriz alterna. Cuando la diferencia de potencial alcanza el valor de la tensión disruptiva salta la chispa entre los electrodos S y el condensador de la célula de Kerr se descarga. Separando los espejos M_1 y M_2 se puede aumentar el camino que recorre la luz desde la chispa hasta la célula de Kerr y de esta forma conseguir una diferencia

muy pequeña, pero perceptible, entre el momento en que se descarga el condensador y el momento en que la luz llega hasta él. Si este intervalo de tiempo es suficiente para que las moléculas se desorienten, el líquido deja de producir la doble refracción y la luz será extinguida por el nicol N_2. De las experiencias realizadas se deduce que para que en la célula de Kerr desaparezca la doble refracción

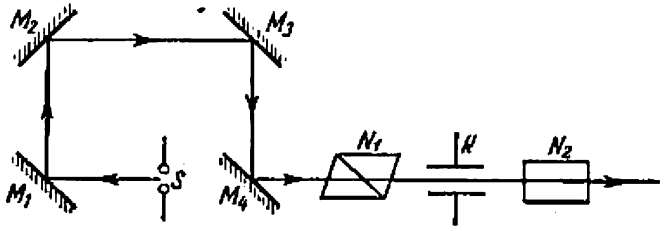

Fig. 181. Esquema del experimento para determinar el tiempo necesario para que desaparezca la doble refracción.

la longitud del camino que recorre la luz, desde la chispa hasta dicha célula, debe ser aproximadamente igual a 3 m. La luz tarda en recorrer esta distancia 10^{-8} s.

Mediciones más exactas realizadas posteriormente han demostrado que el tiempo necesario para que la anisotropía del líquido desaparezca, después de desconectar el campo eléctrico, es aproximadamente igual a 10^{-9} s.

La doble refracción artificial se produce también en algunos líquidos por la acción de un campo magnético. La diferencia de índices de refracción $n_o - n_e$ producida por el campo magnético es proporcional al cuadrado de la intensidad de dicho campo. El valor de la diferencia $n_o - n_e$ que se obtiene en campos magnéticos realizables es muy pequeño.

La pequeñez del intervalo necesario para que se produzca o desaparezca la doble refracción en el campo eléctrico hace posible la utilización de la célula de Kerr como obturador instantáneo, cosa que encuentra diversas aplicaciones tanto prácticas como en los laboratorios. En el § 254 citábamos el valor de la velocidad de la luz determinado por medio de células de Kerr. El esquema de la instalación (fig. 182) que permitió realizar esta medición coincide en principio con el del experimento de Fizeau. Las dos células de Kerr K_1 y K_2 reciben sincrónicamente una diferencia de potencial alterna de frecuencia dada ν. Ambas células se encuentran entre nicoles cruzados. La luz pasa a través del sistema formado por una célula de Kerr y dos nicoles cuando a las armaduras de la célula se les comunica una diferencia de potencial. La luz que deja pasar el primer sistema, es decir, el de la célula K_1, llega al espejo M, se refleja en él y va a parar al segundo sistema, o sea, al de la célula K_2. Si durante

el tiempo τ que tarda la luz en propagarse desde la célula K_1 hasta el espejo M y luego hasta la célula K_2 la diferencia de potencial baja hasta cero, la luz será extinguida por el nicol N_4. Determinando

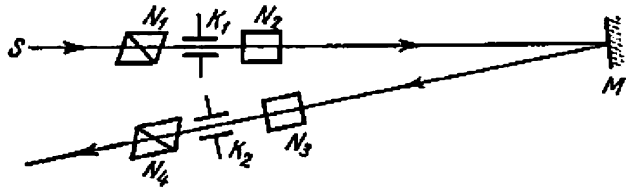

Fig. 182. Determinación de la velocidad de la luz por medio de células de Kerr.

el tiempo τ por la frecuencia ν de la diferencia de potencial alterna y conociendo la distancia que recorre la luz, se puede hallar su velocidad c.

La célula de Kerr se emplea como obturador instantáneo para diferentes fines técnicos, por ejemplo, en los aparatos de televisión, en los registradores del sonido de las películas de cine, etc.

§ 294. Giro del plano de polarización. En los cristales la luz se propaga en la dirección del eje óptico lo mismo que en un medio homogéneo, sin que tenga lugar la doble refracción. No obstante, en los cristales de cuarzo se notó que esta propagación de la luz a lo largo del eje óptico se diferencia de su propagación en un medio isótropo. Resultó que cuando la luz plano polarizada se propaga en el cristal de cuarzo a lo largo del eje óptico su plano de polarización sufre un giro. Posteriormente este fenómeno se descubrió también en una serie de cristales y en ciertos líquidos y recibió el nombre de *giro o rotación del plano de polarización*. Las sustancias que hacen girar el plano de polarización se llaman *ópticamente activas*.

Si se intercala una lámina de cuarzo, tallada perpendicularmente a su eje óptico, entre dos nicoles cruzados el campo se ilumina. Haciendo girar el segundo nicol (analizador) un ángulo determinado el campo se obscurece. Esto demuestra que la luz sigue siendo plano polarizada, pero que su plano de polarización ha girado cierto ángulo. La luz sólo puede extinguirse por completo, haciendo girar el nicol, cuando procede de una fuente monocromática. Si la luz que se emplea es blanca, al intercalar la lámina de cuarzo entre los nicoles cruzados se obtiene un campo coloreado; al girar uno de los nicoles varía esta coloración. Esto demuestra que el poder giratorio depende de la longitud de onda (dispersión de la actividad giratoria). El ángulo de giro del plano de polarización $\Delta\psi$ es proporcional al espesor de la lámina. Si se mira en sentido contrario al del avance del rayo, el plano de polarización podrá haber girado, según

las propiedades del cristal de que se trate, en una dirección determinada: en el sentido de las agujas del reloj (hacia la derecha) o en sentido contrario (hacia la izquierda). Si la lámina gira 180° esta dirección del giro permanecerá invariable. Por esto, si se hace que un rayo pase por una lámina de cristal, que tenga la propiedad de hacer girar el plano de polarización a lo largo de su eje óptico, y que, después de reflejarse normalmente en un espejo, este rayo vuelva a pasar por la misma lámina en sentido contrario, podrá observarse que su plano de polarización no acusa el giro.

Las sustancias que hacen que el plano de polarización gire hacia la derecha se llaman *dextrógiras*, mientras que las que lo hacen girar hacia la izquierda se denominan *levógiras*. Los cristales de cuarzo presentan dos variedades: una dextrógira y otra levógira. Estas dos variedades del cuarzo pueden distinguirse por la forma externa de los cristales, porque la de uno de ellos es como la imagen reflejada de la del otro; en cristalografía estas dos formas se conocen con la denominación de *enantiomorfas*.

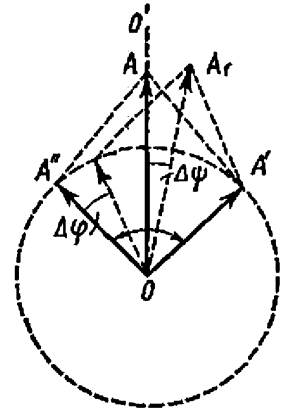

Fig. 183. Explicación del giro del plano de polarización.

El giro que produce el cuarzo es considerable: una lámina de esta sustancia de 1 mm de espesor hace que gire un ángulo de 21,7° el plano de polarización de los rayos amarillos ($\lambda = 0{,}5890\ \mu$) y uno de 48,9° el de los rayos violetas ($\lambda = 0{,}4047\ \mu$); este giro es aún mayor en la zona ultravioleta del espectro. Esta misma lámina hace girar 236° el plano de polarización de los rayos cuya longitud de onda $\lambda = 0{,}2147\ \mu$.

Fresnel demostró que el giro del plano de polarización se puede explicar suponiendo que los rayos polarizados circularmente, con dirección de giro hacia la derecha o hacia la izquierda, se propagan en el cristal con distintas velocidades. Como ya indicamos en el t. I, § 101, todo movimiento armónico rectilíneo se puede descomponer en dos vibraciones circulares de la misma frecuencia pero de sentido inverso.

Admitamos que la dirección OO' (fig. 183) es la de la vibración de la onda plano polarizada que incide sobre el cristal. Descompongamos el vector amplitud $\mathbf{A}$ de esta vibración en dos vectores $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{A}''$, de los cuales el primero gira hacia la derecha y el segundo hacia la izquierda.

Si las velocidades de propagación de las vibraciones circulares en el cristal son diferentes, cuando la luz haya pasado un espesor l de dicho cristal, la vibración circular $\mathbf{A}'$ llevará un retraso de fase

igual al ángulo $\varphi' = 2\pi \frac{l}{\lambda'}$, y la vibración A'' otro de $\varphi'' = 2\pi \frac{l}{\lambda''}$; siendo λ' y λ'' las longitudes de onda correspondientes a cada una de las vibraciones circulares.

Supongamos que el espesor de la lámina l es tal que el ángulo φ' es múltiplo de 2π. Entonces el vector A' volverá a ocupar su posición anterior, mientras que el A'', para el que $\varphi'' \neq \varphi'$, ocupará la nueva posición señalada en la fig. 183 con trazo de puntos. Esta nueva posición estará girada respecto a la antigua un ángulo:

$$\Delta\varphi = \varphi' - \varphi'' = 2\pi l \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''}\right).$$

El vector resultante A tomará a su vez la nueva posición A_1, girada con relación a A un ángulo:

$$\Delta\psi = \frac{\Delta\varphi}{2} = \pi l \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''}\right). \qquad (1)$$

Introduciendo los coeficientes de refracción n' y n'', de los rayos polarizados circularmente hacia la derecha y hacia la izquierda,

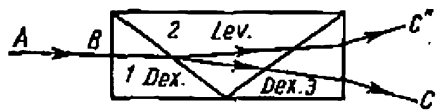

Fig. 184. Separación de los rayos por medio de un prisma complejo formado por cristales de cuarzo dextrógiro y levógiro.

tendremos que $\lambda' = \frac{\lambda_0}{n'}$ y $\lambda'' = \frac{\lambda_0}{n''}$, donde λ_0 es la longitud de onda en el vacío de la luz que se estudia. Poniendo estos valores de λ' y λ'' en (1), hallamos:

$$\Delta\psi = \pi \frac{l}{\lambda_0}(n' - n''). \qquad (2)$$

De esta forma el ángulo de giro del plano de polarización $\Delta\psi$ viene determinado por la diferencia de coeficientes de refracción n' y n'' de los rayos polarizados circularmente hacia la derecha y hacia la izquierda.

Fresnel comprobó su hipótesis haciendo pasar la luz por un prisma compuesto, formado por tres trozos de cuarzo pegados (fig. 184). Los trozos *1* y *3* son de cuarzo dextrógiro, mientras que el *2* lo es de cuarzo levógiro. Los tres trozos están tallados en forma de prismas cuyos ejes ópticos son paralelos a sus bases. Si sobre este sistema de prismas incide normalmente un rayo plano polarizado *AB*, pasará por el primer prisma sin refractarse. En el límite de separación entre el primer prisma y el segundo, se dividirá en dos, puesto que los índices de refracción de las vibraciones circulares inversas

en que puede descomponerse son diferentes. Al refractarse en el límite entre el segundo y el tercer prisma estos rayos se separarán aún más. Como resultado, del prisma compuesto salen dos rayos C' y C'', ambos polarizados circularmente: uno con dirección de giro hacia la derecha y otro, hacia la izquierda.

Existen líquidos que también tienen la propiedad de hacer girar el plano de polarización. Entre ellos figura la esencia de trementina o aguarrás, las soluciones acuosas de azúcar, las de ácido tartárico, etc. Este último tiene dos variantes, dextrógira y levógira. Las soluciones cumplen las leyes siguientes: el ángulo de giro $\Delta\psi$ es proporcional al espesor l de la capa de solución y a la concentración c de la sustancia activa:

$$\Delta\psi = \alpha c l. \qquad (3)$$

La magnitud α depende de las propiedades de la sustancia y se llama *poder rotatorio* o *giratorio específico*. Todas las sustancias activas en estado amorfo (fundidas o en disolución) también lo son en forma de cristales, aunque el poder rotatorio α puede ser diferente para ambos estados. Por el contrario, existe toda una serie de sustancias inactivas en estado amorfo, pero que hacen girar al plano de polarización en estado cristalino. Por ejemplo, el cuarzo, que en estado cristalino hace girar enérgicamente dicho plano, pierde su actividad en estado amorfo (cuarzo fundido). De aquí se deduce que la propiedad de hacer girar el plano de polarización se debe a la estructura de las moléculas y a su disposición en la red cristalina.

Los primeros intentos de explicar la propiedad rotatoria desde el punto de vista de la teoría electrónica se redujeron a considerar que en las moléculas ópticamente activas los electrones están unidos de forma que bajo la acción de las ondas luminosas se mueven siguiendo trayectorias helicoidales. En los cristales activos, por ejemplo, en el cuarzo, las partículas de silicio y de oxígeno están situadas según líneas helicoidales. Posteriormente se esclareció que el giro del plano de polarización puede explicarse por la existencia de moléculas anisótropas, exentas de centros y planos de simetría. Hay que tener en cuenta además que el campo electromagnético de las ondas luminosas no es homogéneo dentro de las dimensiones de las moléculas.

El fenómeno del giro del plano de polarización se aplica en la práctica para medir la concentración de azúcar en las disoluciones. Una vez determinado el poder rotatorio específico α para unas condiciones determinadas, por medio de la fórmula (3) se puede hallar la concentración de la solución. En la industria azucarera estas mediciones se practican con unos aparatos especiales llamados *sacarímetros*. El esquema de un sacarímetro muy simple se muestra en la fig. 185. Entre dos nicoles N_1 y N_2 se encuentra una cubeta cerrada por unas ventanillas planas y paralelas. Antes de colocar la disolución los nicoles se gradúan de forma que den «oscuridad», es decir, de forma que sus secciones principales sean perpendiculares entre sí. Al llenar la cubeta con la solución el campo se ilumina.

Para que este campo vuelva a oscurecerse hay que girar el nicol N_2 (analizador) un ángulo, el cual determina el giro experimentado por el plano de polarización en la disolución (siempre que sea menor que π).

Como quiera que los nicoles no se pueden regular exactamente para que den «oscuridad», hoy día se usan otros dispositivos polarizadores. Los que más se

Fig. 185. Esquema de un sacarímetro.

emplean son los llamados *analizadores de penumbra*. Estos analizadores se hacen cortando un prisma de Nicol según dos planos simétricos al de su sección principal OO'. Estos dos planos forman entre sí un pequeño ángulo β (la situación de estos planos se señala en la fig. 186, *a* por medio de dos líneas punteadas). La cuña que queda entre dichos planos (rayada en la fig. 186, *b*) se quita, y las

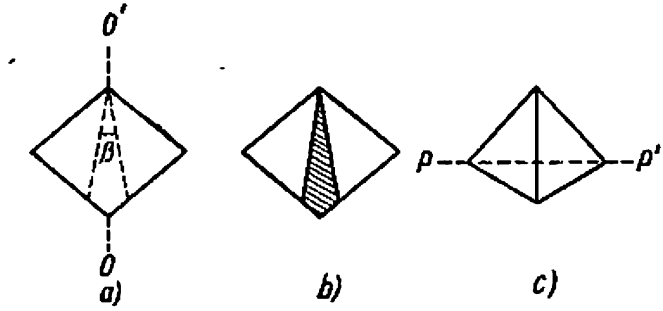

Fig. 186. Estructura de un analizador de penumbra.

dos mitades restantes se pegan de manera que su sección transversal toma la forma de un rombo irregular (fig. 186, *c*). Cada una de las dos mitades es un analizador independiente, con la particularidad de que sus secciones principales forman entre sí un ángulo β. Si el plano de polarización de la luz incidente PP' es perpendicular al plano de unión de las dos mitades (fig. 186, *c*), estas dos mitades presentarán la misma brillantez*). Cualquiera otra posición del plano de polarización hará que una de las mitades se vea más brillante que la otra. Y como el ojo humano es capaz de distinguir con gran exactitud cuando dos campos contiguos están iluminados igualmente, por este procedimiento se puede fijar la posición del plano de polarización PP'. Cuando se trabaja con analizadores de penumbra hay que utilizar luz monocromática, para lo cual, en calidad de fuente de luz, se emplean lámparas de vapor de sodio o de mercurio con filtro verde.

§ 295. Giro magnético del plano de polarización. Las sustancias que por su naturaleza no tienen la propiedad de hacer girar el plano

*) Ambas mitades aparecerán también igualmente brillantes cuando el plano de polarización PP' sea paralelo al plano de unión de las partes del prisma. Pero en este caso la brillantez será mayor y las condiciones de trabajo, peores.

de polarización la adquieren cuando están sometidas a la acción de un campo magnético exterior. El fenómeno del giro magnético del plano de polarización fue descubierto en el año 1846 por Faraday. Este descubrimiento fue resultado de los laboriosos intentos de Faraday para descubrir la relación entre los fenómenos luminosos y magnéticos. Faraday supuso que había conseguido hallar la influencia directa del campo magnético sobre la luz y escribió sobre esto: «He conseguido magnetizar y electrizar un rayo de luz e iluminar

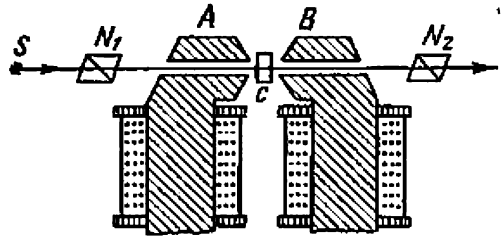

Fig. 187. Esquema del experimento para observar el giro magnético del plano de polarización.

una línea de fuerza magnética». Pero en realidad el fenómeno descubierto por Faraday tiene un carácter diferente: el campo magnético influye sobre la sustancia sometida a él, y esta última es la que varía el carácter de la propagación de la luz.

El giro magnético del plano de polarización se produce cuando la luz se propaga en una sustancia transparente a lo largo de las líneas de fuerza magnéticas. Por esto lo más cómodo para observar el giro magnético es taladrar unos canales estrechos en los extremos de un electroimán. El esquema de este experimento se muestra en la fig. 187, donde S es un foco luminoso, A y B son los extremos del electroimán, N_1 y N_2 son dos nicoles y C el cuerpo en que tiene lugar el giro del plano de polarización. Mientras no existe campo magnético (es decir, cuando se desconecta la corriente que pasa por el electroimán), si los nicoles N_1 y N_2 están cruzados, la luz no pasa a través de todo este sistema. Pero al conectar la corriente y producirse entre los polos del electroimán el campo magnético, el plano de polarización de la luz que pasa por el cuerpo transparente C gira y ésta es transmitida por el nicol N_2.

El ángulo de giro ψ del plano de polarización es proporcional a la longitud l del camino recorrido por la luz a través de la sustancia sometida al campo magnético y a la intensidad de este campo H.

$$\psi = klH; \qquad (1)$$

el coeficiente k caracteriza el poder que para hacer girar el plano de polarización tiene el cuerpo dado cuando se encuentra sometido a la acción del campo magnético. Los valores de k, en general, no

son grandes. Tanto los cuerpos sólidos transparentes como los líquidos y los gases presentan la propiedad de hacer girar el plano de polarización cuando se encuentran en un campo magnético. Para algunas clases de vidrio (flint pesado) k llega a tener un valor de 0,1, si el ángulo ψ se mide en minutos, H en erstedios y l en centímetros.

Cuando en un campo magnético se introducen cuerpos que ya de por sí son ópticamente activos, a su propiedad natural de hacer girar el plano de polarización se suma la que produce el campo magnético.

Giros bastante grandes se observan en capas muy delgadas (tan delgadas que son transparentes) de metales ferromagnéticos, como el hierro, níquel y cobalto. Una película de hierro de 0,1 μ de espesor situada en un campo cuya intensidad sea de 10 000 Oe hace que el plano de polarización gire 2°. El ángulo de giro que producen los cuerpos ferromagnéticos es proporcional al grado de magnetización de la sustancia ferromagnética y por esto no se cumple la correlación (1).

No todos los cuerpos sometidos a la acción de un campo magnético hacen que el plano de polarización gire en el mismo sentido. Se llaman *dextrógiros o positivos* aquellos cuerpos que hacen que el plano de polarización gire hacia la derecha del observador que mira a lo largo del campo magnético. En otras palabras, si la dirección de las líneas de fuerza magnéticas se compara con el movimiento de avance de un sacacorchos, la dirección de giro de su cabeza indica la dirección en que hacen girar el plano de polarización los cuerpos positivos. El coeficiente k de estos cuerpos se considera positivo. Los cuerpos que hacen girar el plano de polarización en dirección inversa a la indicada anteriormente se llaman *levógiros* o *negativos*. Los cuerpos negativos tienen siempre en su composición átomos paramagnéticos. Pero las sustancias paramagnéticas no son siempre negativas. La dirección de giro que produce cada sustancia *depende únicamente de la dirección del campo magnético y no de la dirección en que se propaga la luz*. El giro magnético se diferencia en esto del natural, puesto que para este último la dirección de giro depende de cómo se hace la observación, en el sentido que sigue el haz luminoso o en sentido contrario. Como indicamos en el § 294, el plano de polarización de los rayos de luz que pasan dos veces (una en un sentido y otra en el opuesto) a través de un cuerpo, que produce el giro natural, no experimenta ninguna rotación. Pero cuando el giro es magnético, si el rayo pasa el cuerpo dos veces (una en un sentido y otra en el opuesto), el ángulo de giro aumenta. Esta circunstancia da la posibilidad de aumentar el ángulo de giro del plano de polarización haciendo que la luz se refleje varias veces dentro del cuerpo sometido a la acción del campo magnético. Para esto, entre los polos de un electroimán se coloca el cuerpo *ab* que se va a analizar, cual tiene la forma de paralelepípedo con las caras opuestas platea-

das, a excepción de dos franjas estrechas en sus extremos contrarios (fig. 188, el rayado representa las partes plateadas). El rayo de luz pasa a través del cuerpo varias veces, hacia adelante y hacia atrás, reflejándose en las superficies plateadas, y, de acuerdo con lo dicho anteriormente, el ángulo de giro de su plano de polarización $\Delta\psi$ aumenta proporcionalmente a la longitud del camino que recorre dentro del cuerpo.

La magnitud del giro magnético depende de la longitud de onda, por esto, para una misma sustancia, el coeficiente k tiene valores algo diferentes para distintas longitudes de onda.

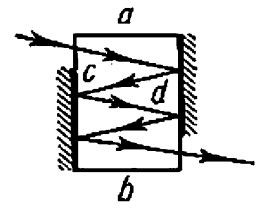

Fig. 188. Aumento del ángulo de giro magnético del plano de polarización por medio de múltiples reflexiones.

El fenómeno del giro magnético del plano de polarización se debe a la precesión que experimentan los electrones que entran en la composición de los átomos o las moléculas, cuando existe un campo mangético externo. Como resultado de esta precesión en el cuerpo adquieren valores diferentes los índices de refracción de los rayos polarizados circularmente en el sentido de las agujas del reloj y en el inverso. Por esta razón la velocidad de propagación de los rayos polarizados circularmente en sentidos distintos resulta distinta. Esta última circunstancia conduce, como explicamos en el § 294, al giro del plano de polarización. El fenómeno del giro magnético del plano de polarización está relacionado estrechamente con el llamado efecto Zeeman (véase el § 345), que consiste en la variación que experimenta la frecuencia de la luz que emiten los átomos cuando se someten a la acción de un campo magnético. El tiempo necesario para que se produzca el giro del plano de polarización, una vez conectado el campo magnético, es muy pequeño, lo mismo que el que se precisa para que desaparezca después de desconectar dicho campo. Este tiempo, lo mismo que en el caso del efecto de Kerr, es del orden de 10^{-9} s.

La influencia del campo mangético se deja sentir también cuando la luz se refleja en una superficie metálica pulimentada. Concretamente, si una luz plano polarizada se refleja en una superficie pulimentada de hierro magnetizado tomará una polarización elíptica diferente de la que tendría si se reflejase (en iguales condiciones) sobre una superficie de hierro no magnetizado (véase el § 278).

CAPITULO XXVI

Propagación de la luz en medios en movimiento

§ 296. Experimentos con cuerpos en movimiento. El estudio de la propagación de la luz en los medios en movimiento jugó un papel de extraordinaria importancia en el desarrollo de nuestros conocimientos sobre la naturaleza de los fenómenos físicos y, como después se esclareció, sobre la naturaleza del espacio y del tiempo. La teoría ondulatoria de la luz, como indicamos en el § 250, condujo a la hipótesis del éter como medio que llenaba todo el espacio universal y calaba todos los cuerpos. Al principio se supuso que al éter se le podían aplicar las leyes de la mecánica clásica, y que, al ser un medio mecánico, podía servir de sistema de referencia, es decir, que podría determinarse el movimiento de los cuerpos con relación al éter. El hecho de que el desarrollo de la teoría electromagnética de la luz diera lugar a la sustitución de la idea del éter como medio mecánico por conceptos electromagnéticos más generales no influyó en el criterio que admitía la posibilidad de determinar el movimiento de los cuerpos con respecto al éter (véase el t. II, § 216). Como se suponía que el éter era un medio que llenaba todo el espacio universal, el movimiento con respecto a él se consideraba como movimiento «absoluto». En adelante se entenderá por movimiento «absoluto» al que tiene lugar con relación a este inmóvil hipotético.

La hipótesis de la existencia del éter planteó la realización de una serie de experimentos encaminados a estudiar las propiedades del éter y el carácter de su interacción con los cuerpos ordinarios. Ante todo se planteó el problema de si los cuerpos transparentes, al moverse, arrastraban o no al éter que había en ellos. La respuesta a este problema debía darla el experimento llevado a cabo por Fizeau en 1851. Este experimento se realizó de acuerdo con el esquema siguiente (fig. 189): el rayo de luz S incide sobre la lámina semiplateada A y se desdobla originando los rayos AB y AC. Los espejos B, C y D, colocados formando ángulos de 45° con los rayos que sobre ellos caen, hacen que estos últimos giren 90°. De esta forma, los rayos desdoblados en A recorrerán la instalación, uno en el sentido de las agujas del reloj y otro en el inverso. Al llegar de nuevo al espejo semitransparente A, estos rayos vuelven a unirse, lo que permite observar una figura de interferencia. En el camino a recorrer por los rayos se intercalan unos tubos L_1 y L_2 por los que circula agua a la velocidad u en las direcciones que se indican en la figura. Uno de los rayos, al pasar a lo largo de los tubos, va siempre siguiendo

la corriente, mientras que el otro va en contra. Si el éter que hay en el agua es arrastrado por ella, ambos rayos, después de pasar por la instalación y unirse en el punto O, tendrán cierta diferencia de fase, debida a la diferencia entre los tiempos que emplean en recorrer el camino. Esta diferencia de fase determina el carácter de la interferencia en O. La diferencia entre los tiempos que tardan los rayos en recorrer la instalación puede deberse únicamente al movimiento del agua, puesto que por lo demás sus caminos son iguales. Llamemos v a la velocidad de la luz en el agua en reposo. Esta velocidad v, desde el punto de vista de la teoría del éter, es la velocidad de la luz *en el*

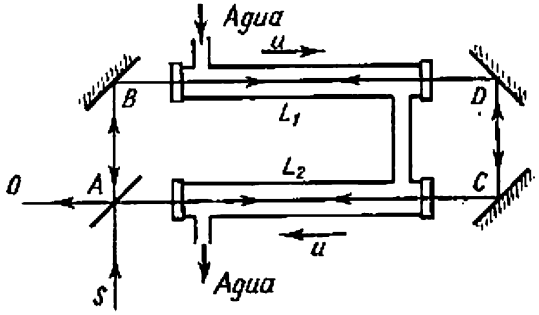

Fig. 189. Esquema del experimento de Fizeau, de arrastre del éter por el agua corriente.

éter que se encuentra en el agua en reposo. Supongamos que el éter es arrastrado por el agua en movimiento, pero no total, sino parcialmente, es decir, que su velocidad con respecto a la instalación es igual a αu, donde α es menor o igual que la unidad y debe ser hallada como resultado del experimento.

En estas condiciones la velocidad de luz en el agua, con relación a la instalación, para el rayo que se propaga contra la corriente será igual a $v - \alpha u$, mientras que para el rayo que lo hace a favor de la corriente será igual a $v + \alpha u$. De aquí hallamos que la diferencia entre los tiempos Δt que tardan ambos rayos en hacer su recorrido será

$$\Delta t = \frac{2l}{v-\alpha u} - \frac{2l}{v+\alpha u} = \frac{4l\alpha u}{v^2-\alpha^2u^2},$$

siendo l la longitud de cada uno de los tubos llenos de agua. La diferencia de fase entre los dos rayos δ será igual a $2\pi\nu\Delta t$, donde ν es la frecuencia de la luz. De esta forma resulta que la diferencia de fase δ está relacionada con el coeficiente de arrastre α.

Fizeau obtuvo las figuras de interferencia correspondientes al agua en reposo y en movimiento y midió el desplazamiento experimentado por las franjas de interferencia. Partiendo de este desplazamiento se pudo hallar la diferencia de fase y, por consiguiente, el

coeficiente de arrastre del éter. Los experimentos de Fizeau demostraron que el valor de α viene expresado por la fórmula

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}, \qquad (1)$$

donde n es el índice de refracción del agua*).

Es decir, por medio de las interferencias quedó establecido que el éter hipotético era arrastrado parcialmente por el medio en movimiento y que el «coeficiente de arrastre» α dependía del índice de refracción de dicho medio: toda sustancia cuyo índice de refracción sea igual a la unidad no deberá arrastrar al éter.

Los resultados de los experimentos de Fizeau dieron al parecer la posibilidad de hallar el movimiento «absoluto» de la Tierra. Efectivamente, como la atmósfera de aire tiene un índice de refracción n aproximadamente igual a la unidad, no deberá arrastrar al éter y, por consiguiente, el movimiento de la Tierra con respecto a las partes del éter más próximas a ella será su movimiento «absoluto» en el sentido que hemos dado antes a esta expresión. La idea del experimento para descubrir el movimiento «absoluto» de la Tierra consiste en lo siguiente: supongamos que la Tierra se mueve en el éter, en una dirección determinada con una velocidad v. Se trata de calcular el tiempo que tardará la luz, que se propaga en el éter con una velocidad c, en recorrer en la Tierra una distancia l. Si la luz avanza en la misma dirección en que se mueve la Tierra en el éter, este tiempo será igual a $\frac{l}{c-v}$, puesto que la velocidad de la luz con relación a la Tierra será igual a la diferencia entre la velocidad de la luz en el éter y la velocidad de éste con respecto a la Tierra. Es evidente que en el caso en que la luz avanza en dirección contraria al movimiento de la Tierra en el éter el tiempo necesario para recorrer el camino l será igual a $\frac{l}{c+v}$. Supongamos ahora que la luz recorre el camino l avanzando en dirección perpendicular al supuesto movimiento de la Tierra en el éter. En este caso durante el tiempo t que emplea la luz en recorrer, *con relación a la Tierra*, un camino $l = ab$ (fig. 190), la Tierra recorrerá con respecto al éter un espacio $aa' = vt$. El camino recorrido por la luz *con relación al éter* vendrá representado por la recta ab' y el tiempo que tarda en recorrer este camino en el éter podrá determinarse por la correlación

$$t = \frac{\sqrt{l^2 + (vt)^2}}{c},$$

*) Fizeau realizó sus experimentos con el propósito de comprobar la fórmula (1) que había sido hallada anteriormente por Fresnel al elaborar la teoría del éter.

donde en el numerador figura el camino recorrido por el rayo en el éter y en el denominador su velocidad. Despejando t en esta expresión, obtenemos:

$$t = \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (2)$$

Como vemos, el tiempo necesario para recorrer un mismo camino en la Tierra debe depender de la dirección que tenga este camino con respecto a la del movimiento de la Tierra en el éter.

Este criterio sirvió de base al experimento llevado a cabo por Michelson en el año 1881 valiéndose de su interferómetro (§ 264).

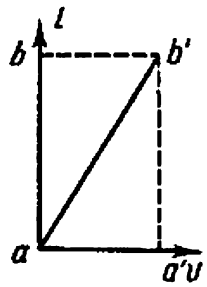

Fig. 190. Esquema para calcular el tiempo que tarda la luz que se propaga en dirección perpendicular al movimiento de la Tierra en recorrer la distancia l.

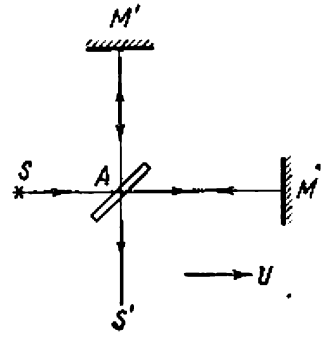

Fig. 191. Esquema del experimento de Michelson.

El esquema de este experimento se muestra en la fig. 191. Un rayo luminoso procedente de un foco S cae sobre la lámina semiplateada A, que forma un ángulo de 45° con la dirección del rayo incidente; esta lámina hace que el rayo se divida en dos cuyas direcciones son perpendiculares. Los rayos AM y AM', después de reflejarse en los espejos M y M' vuelven a A, donde otra vez cada rayo se divide en dos partes. Parte de la luz vuelve a la fuente S, mientras que la restante se dirige a S', donde se observa la interferencia. La figura de interferencia sirve para hallar la diferencia de marcha entre ambos rayos. Como los caminos AM y AM' son iguales geométricamente, la diferencia de marcha sólo puede deberse a que los tiempos necesarios para recorrer los caminos $AM = AM' = l$ sean distintos.

Supongamos que el interferómetro se coloca en la Tierra de tal forma que el «brazo» AM sea paralelo a la velocidad de la Tierra en el éter. Entonces, el rayo que recorre el camino AM en una y otra

dirección tardará en hacerlo un tiempo

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

El segundo rayo, que recorre en una y otra dirección el camino AM', perpendicular a la dirección del movimiento de la Tierra en el éter, tardará, de acuerdo con la fórmula (2), un tiempo

$$t_2 = 2t = 2\frac{l}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

La diferencia entre estos tiempos será

$$t_2 - t_1 = \frac{2l}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right),$$

lo que, considerando pequeña la relación $\frac{v}{c} = \beta$, puede tomar la forma aproximada de

$$t_2 - t_1 \cong -\frac{l\beta^2}{c}.$$

Si se hace que todo el aparato gire 90°, de forma que la dirección AM coincida con la primitiva AM', los rayos cambian su dirección con respecto a la del mivimiento de la Tierra y la diferencia entre los tiempos cambia de signo. Por consiguiente, el giro del aparato da lugar a que la diferencia entre los tiempos varíe en la magnitud $\frac{2l\beta^2}{c}$. Si la variación de la diferencia entre los tiempos fuera igual a un período de la vibración luminosa, la figura de interferencia se desplazaría en una franja. Pero en nuestro caso, al girar el aparato, la figura deberá desplazarse solamente en una parte de franja igual al cociente de dividir la magnitud $\frac{2l\beta^2}{c}$ por el período T, es decir, en la fracción:

$$x = \frac{2l\beta^2}{cT} = \frac{2l}{\lambda}\beta^2,$$

donde λ es la longitud de onda.

Midiendo el desplazamiento de las franjas de interferencia que origina el giro del aparato se puede determinar β y, por consiguiente, la velocidad de la Tierra en el éter.

Para valorar el efecto esperado, supongamos que la velocidad de la Tierra en el éter es igual a su velocidad de traslación por la órbita alrededor del Sol, es decir, $v = 3 \cdot 10^6$ cm/s. En los últimos experimentos realizados por Michelson (1887) la longitud l era igual a 11 m y la observación se practicó con luz cuya longitud de onda era igual a $5{,}9 \cdot 10^{-5}$ cm, por lo tanto, era de esperar que la

figura de interferencia se desplazase en un número de franjas:

$$x = \frac{2l\beta^2}{\lambda} = \frac{2 \cdot 1{,}1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8}}{5{,}9 \cdot 10^{-5}} = 0{,}4.$$

La precisión del aparato permitía registrar desplazamientos de centésimas de franja.

Pero los experimentos de Michelson no acusaron ningún desplazamiento apreciable. Estos experimentos se repitieron en diferentes estaciones del año y en puntos geográficos diversos, no obstante sus resultados fueron siempre negativos.

De estos resultados se podía deducir que o el éter era arrastrado totalmente por la atmósfera terrestre, cosa que estaba en contradicción con los resultados del experimento de Fizeau, o que nuestro criterio del éter, como medio capaz de servir de referencia, era falso. La primera conclusión, es decir, la del arrastre total del éter, no sólo está en desacuerdo con el experimento de Fizeau, sino también con el fenómeno de la aberración de la luz. Como sabemos, esta aberracion se explica perfectamente basándose en el teoroma elemental de la suma de velocidades, suponiendo que la Tierra se mueve en el éter como en un medio en reposo (véase el § 254). Si la aberración de la luz se observa con un telescopio lleno de agua se obtienen resultados que confirman plenamente la teoría del acarreo parcial, es decir, los resultados del experimento de Fizeau. Por consiguiente, si tomamos como base la hipótesis del éter nos encontramos ante la imposibilidad de explicar al mismo tiempo el experimento de Fizeau, el fenómeno de la aberración de la luz y el experimento de Michelson. Para poder comprender los resultados del experimiento del Michelson el éter tendría que tener unas propiedades y para explicar el fenómeno de la aberración de la luz y los resultados del experimento de Fizeau otras, totalmente contrarias.

Los resultados negativos de los experimentos de Michelson provocaron una discusión científica amplia y aguda. Se hicieron intentos de explicar el experimento de Michelson sin renunciar a la teoría del éter. Por ejemplo, se propuso la hipótesis de que la velocidad de la luz en el éter depende de la velocidad que tenga la fuente luminosa y es igual a la suma de la velocidad de dicha fuente y de la que tiene la luz en el éter cuando aquélla está en reposo. Esta hipótesis explicaba el experimento de Michelson, pero no estaba de acuerdo ni con la existencia del efecto Doppler (t. I, § 113) ni con los resultados de las observaciones de focos externos (por ejemplo, de las estrellas dobles). Finalmente, hace pocos años (en 1956) las mediciones directas de la velocidad de la luz emitida por distintos bordes del disco solar, realizados por A. M. Bonch-Bruévich y A. P. Molchánov, demostraron que dicha velocidad no depende de la velocidad de la fuente (en este caso del Sol, que gira sobre su eje).

Pero con anterioridad a esto se había propuesto ya la hipótesis de que las dimensiones de los cuerpos en movimiento disminuyen. Según esta hipótesis todo cuerpo es más corto (en la dirección de avance) cuando se mueve con relación al éter que cuando está en reposo. La relación entre las dimensiones lineales del cuerpo en movimiento y estas mismas dimensiones cuando está en reposo se suponen iguales a

$$\frac{l'}{l} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2}.$$

donde v es la velocidad del cuerpo en el éter. Esta hipótesis, que explicaba el experimento de Michelson, jugó en su tiempo un gran papel en la teoría electrónica.

Además del experimento de Michelson se realizaron y analizaron otros experimentos con los cuales también se pretendió hallar el movimiento absoluto de la Tierra (véanse, por ejemplo, los experimentos de Trouton y Noble; t. II, § 216), pero todos ellos dieron resultados negativos.

El conjunto de todos estos experimentos demostró que *la hipótesis sobre la posibilidad de determinar el movimiento con relación al éter no corresponde a la realidad y que el éter, como medio, no puede servir de sistema de referencia.* La hipótesis sobre la existencia del éter resulta absurda, puesto que contradice los hechos observados directamente. Los experimentos de Michelson ponen de manifiesto que *la velocidad de la luz en el vacío es igual para todos los sistemas de referencia, independientemente del estado de movimiento en que se encuentren.* En consecuencia llegamos a dos postulados que formuló Einstein en el año 1905: 1) la velocidad «absoluta» de los sistemas no existe, y 2) la velocidad de la luz en el vacío, medida desde dos sistemas que se encuentren mutuamente en movimiento rectilíneo y uniforme tiene un mismo valor (siempre que sea común la unidad con que se mide). Estos dos postulados sirvieron de base a la teoría de la relatividad.

Hay que tener en cuenta que muchos filósofos burgueses interpretan la teoría de la relatividad desde las posiciones de la filosofía relativista idealista. Pero en realidad esta interpretación de la teoría de la relatividad carece de fundamento. La verdadera esencia de la teoría de la relatividad se reduce a explicar las propiedades objetivas del espacio y del tiempo y a establecer las leyes naturales que, existentiendo objetivamente, determinan las fórmulas de transición entre los sistemas de referencia que se mueven, unos con respecto a otros, rectilínea y uniformemente.

§ 297. Teoría de la relatividad. La mecánica de Newton estaba supeditada al principio mecánico de la relatividad. Este principio era una consecuencia de las leyes de Newton, que relacionaban

la aceleración de un punto material con las fuerzas que sobre él actuaban:

$$m\ddot{x} = f_x; \quad m\ddot{y} = f_y; \quad m\ddot{z} = f_z, \tag{1}$$

donde $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ y $\ddot{z}$ son las componentes de la aceleración y f_x, f_y y f_z, las componentes de las fuerzas a lo largo de los ejes de coordenadas.

Las ecuaciones de Newton son ciertas con respecto a cualquier sistema inercial, es decir, con relación a una cantidad innumerable de sistemas de coordenadas que se encuentran recíprocamente en movimiento rectilíneo y uniforme. Como quiera que las leyes de la mecánica (1) son iguales para todos los sistemas inerciales, ningún experimento mecánico realizado dentro de un sistema puede servir para determinar su movimiento rectilíneo y uniforme. Esta última afirmación puede considerarse como el enunciado del principio mecánico de la relatividad (t. I, § 19).

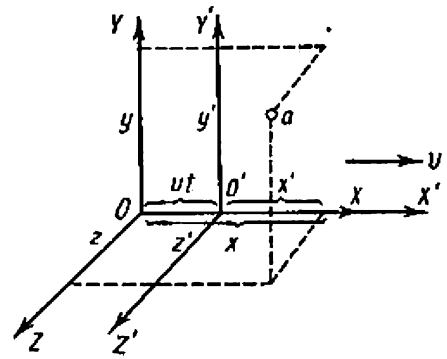

Fig. 192. Dos sistemas de coordenadas que se mueven, el uno con respecto al otro, con una velocidad v.

Pero este problema puede considerarse desde otro punto de vista. El paso de un sistema de coordenadas a otro que se mueva con respecto al primero implica una transformación de las coordenadas. Supongamos que un sistema XYZ está en reposo y que otro $X'Y'Z'$, cuyos ejes son paralelos a los del primero, se mueve con respecto a aquél, a lo largo del eje OX, con una velocidad constante v (fig. 192). En este caso, las coordenadas tomadas a lo largo de los ejes perpendiculares a la dirección del movimiento serán iguales para ambos sistemas, mientras que las coordenadas correspondientes a la dirección del movimiento estarán relacionadas entre sí por la correlación $x' = x - vt$. De esta forma tenemos la siguiente relación entre las coordenadas del punto en ambos sistemas:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{2}$$

Esta correlación entre las coordenadas se conoce con el nombre de *transformación de Galileo*. Como la velocidad v es constante, de la transformación (2) se deduce que $\ddot{x}' = \ddot{x}$, $\ddot{y}' = \ddot{y}$ y $\ddot{z}' = \ddot{z}$, es decir, que la aceleración del punto con respecto a ambos sistemas es la misma, de donde resulta que las ecuaciones de Newton (1) son iguales en los dos sistemas. La forma de las ecuaciones de Newton

no varía al pasar de las coordenadas XYZ a las coordenadas $X'Y'Z'$, o, como se suele decir, *las ecuaciones de la mecánica de Newton son invariantes con respecto a la transformación de Galileo.*

De la transformación de Galileo se deduce el teorema de la suma de las velocidades. Efectivamente, tomando la derivada con respecto al tiempo de la primera ecuación (2), obtenemos:

$$\dot{x}' = \dot{x} - v \quad \text{o} \quad \dot{x} = \dot{x}' + v.$$

Es evidente que $\dot{x}$ es la proyección de la velocidad sobre el eje OX (proyección de la velocidad «absoluta»), $\dot{x}'$ es la proyección de la velocidad sobre el eje OX' (proyección de la velocidad relativa) y v es la velocidad de arrastre.

Por consiguiente, la igualdad $\dot{x} = \dot{x}' + v$ significa que la componente de la velocidad del punto a a lo largo del eje OX en el sistema de coordenadas XYZ es igual a la suma de la proyección de la velocidad del punto a a lo largo del eje OX' en el sistema de coordenadas $X'Y'Z'$ y de la velocidad de arrastre v del sistema de coordenadas $X'Y'Z'$ (dirigida como hemos supuesto a lo largo del eje OX) con respecto al sistema XYZ.

Los experimentos de Michelson demostraron que el movimiento «absoluto» de un sistema no puede determinarse ni por medios mecánicos ni basándose en los fenómenos ópticos. Además, tiene importancia señalar que en los intentos hechos para descubrir por procedimientos ópticos el movimiento de un sistema con relación al éter se partió de la suposición de que el teorema de la suma de velocidades era aplicable al campo de los fenómenos ópticos. El cálculo del experimento de Michelson se realizó de acuerdo con este teorema. Por esto, el resultado negativo de este experimento puede interpretarse como demostración de que dicho teorema no es aplicable a este campo y, por consiguiente, de que tampoco se puede aplicar la transformación de Galileo.

Lorentz, que utilizó el modelo del éter para elaborar la teoría electrónica, demostró que los resultados experimentales relativos a la imposibilidad de descubrir el movimiento con relación al éter concuerdan con las ecuaciones teóricas si se admite la hipótesis de que los cuerpos que están en movimiento respecto al éter se acortan y si en el sistema de coordenadas en movimiento se toma una medida de tiempo diferente de la del sistema en reposo. Este resultado fue expresado matemáticamente por Lorentz en forma de una transformación que relaciona las coordenadas y el tiempo de los dos sistemas que recíprocamente se encuentran en movimiento rectilíneo y uniforme. Las fórmulas de la transformación de Lorentz para dos sistemas que se mueven según indica la figura 192 tienen

la forma:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (3)$$

Aquí $\beta = \frac{v}{c}$ es la razón de la velocidad del sistema a la velocidad de la luz.

Cuando se trata de velocidades ordinarias las transformaciones de Lorentz se diferencian poco de las clásicas de Galileo, puesto que la diferencia entre ellas viene determinada por los miembros que contienen la magnitud $\beta = \frac{v}{c}$, que generalmente es pequeña; en el límite $\beta \to 0$ y la transformación de Lorentz pasa a ser igual a la de Galileo.

Lorentz consideraba que sus transformaciones tenían un sentido formal, viendo el sentido físico directo en la hipótesis del acortamiento de la longitud de los cuerpos que se mueven con respecto al éter y en la necesidad de introducir en los sistemas de coordenadas en movimiento su «tiempo local». Pero el análisis de los datos experimentales nos lleva a la conclusión de que *las transformaciones de Lorentz no están ligadas a la hipótesis de la existencia del éter ni son un procedimiento matemático auxiliar*, sino que *representan la expresión de las propiedades objetivas principales del espacio y del tiempo* deducidas de los experimentos. Si esto es así, y la verdadera transformación de las coordenadas y del tiempo da las relaciones (3), quiere decir que la transformación de Galileo era solamente aproximada y aplicable a los casos en que la razón $\frac{v}{c}$ es pequeña, como suele ocurrir en los experimentos mecánicos ordinarios.

La Física clásica utilizaba los conceptos metafísicos del espacio y el tiempo «absolutos». Newton formuló estos conceptos de la forma siguiente: «El tiempo es de por sí absoluto, verdadero y matemático, y por su naturaleza transcurre regularmente y sin tener relación con ningún otro objeto», y «El espacio absoluto, por su naturaleza e independencia de cualquier otro objeto, permanece siempre igual e inmóvil». Pero las cualidades objetivas del espacio y del tiempo son en realidad, otras, que podemos conocer únicamente a través de los datos experimentales.

Los postulados principales de la teoría de la relatividad se basan en la aplicación consecuente de las conclusiones que se sacan de los datos experimentales y son (véase el § 296): 1) todos los sistemas que se encuentran en movimiento uniforme y rectilíneo son equivalentes, es decir, ningún experimento realizado dentro de un sistema puede determinar su movimiento «absoluto»; 2) la velocidad de la luz, medida en cualquiera de los sistemas que se encuentran

en movimiento relativo uniforme y rectilíneo, es la misma, independientemente del movimiento que tenga su fuente. De estos postulados, como puede demostrarse (véase la letra pequeña) se deducen las fórmulas de la transformación de Lorentz. Por lo tanto, si se desecha la hipótesis de que el éter puede servir de sistema de referencia y se utilizan únicamente las deducciones indicadas de los datos experimentales, la transformación de Lorentz se obtiene sin necesidad de ninguna hipótesis física complementaria. Por el contrario, aplicando la transformación de Lorentz se puede descifrar cualquier fenómeno físico que se manifieste cuando los sistemas de referencia se mueven el uno con respecto al otro, incluyendo los fenómenos de la óptica de los cuerpos en movimiento. En todos estos casos se obtienen resultados que concuerdan perfectamente con los datos experimentales.

La teoría de la relatividad considera que toda ley física debe satisfacer la transformación de Lorentz. Esto quiere decir que toda ley de la naturaleza expresada matemáticamente en coordenadas de un sistema determinado debe conservar su forma al pasarse a las coordenadas de otro sistema según la fórmula (3), es decir, *debe ser invariante con respecto a la transformación de Lorentz.* Las ecuaciones de la mecánica de Newton, que eran invariantes con respecto a la transformación de Galileo, no lo son con relación a la transformación de Lorentz. Por esto, el desarrollo de las ideas de la teoría de la relatividad condujo a variar las ecuaciones de Newton en el sentido de establecer ecuaciones de la mecánica invariantes con respecto a la transformación de Lorentz, las cuales toman la forma de las ecuaciones de Newton en el caso límite, es decir, cuando la razón $\beta = \frac{v}{c}$ es infinitamente pequeña. La comprobación de los resultados obtenidos con las nuevas ecuaciones de la mecánica demostró prácticamente la veracidad de las mismas. En cuanto se refiere a las ecuaciones de la electrodinámica (ecuaciones de Maxwell), resultaron ser invariantes con respecto a las transformaciones de Lorentz. De esta forma quedó establecido que las leyes de la Física clásica satisfacen las exigencias de la teoría de la relatividad en el campo del electromagnetismo y, por consiguiente, en el de la óptica, mientras que en el campo de la mecánica (de Newton) solamente son ciertas para velocidades $v \ll c$ y tienen que ser modificadas para adaptarlas al caso general. Queremos llamar la atención sobre el hecho de que para la velocidad $v > c$ la transformación de Lorentz deja de tener sentido. Esto corresponde al hecho de que los cuerpos no pueden moverse a velocidades mayores que la de la luz.

Para deducir la transformación de Lorentz estudiamos el caso de dos sistemas de coordenadas: uno XYZ (convencionalmente inmóvil) y otro $X'Y'Z'$ (convencionalmente móvil) (fig. 193), que se encuentran en movimiento de traslación relativo. Los ejes de ambos sistemas los tomamos paralelos entre sí,

la velocidad relativa constante v del sistema $X'Y'Z'$ con respecto al sistema XYZ la dirigimos a lo largo del eje OX y suponemos que en el momento inicial ($t = 0$, $t' = 0$) los orígenes de ambos sistemas coinciden. En estas condiciones es fácil demostrar que las coordenadas y y z se transforman según las correlaciones:

$$y' = y, \quad z' = z,$$

y no nos detendremos en ellas. Pero veamos cómo se transforma la coordenada x en el tiempo t. Tomemos un punto que corresponda *al origen de coordenadas del sistema móvil*; su coordenada x', será evidentemente igual a cero:

$$x' = 0. \qquad (4)$$

La coordenada de este mismo punto x (en el sistema inmóvil) en el momento t (contado en el sistema inmóvil) será $x = vt$. Esta igualdad podemos escribirla en la forma:

$$x - vt = 0. \qquad (5)$$

Comparando las igualdades (4) y (5) vemos que en un mismo punto del espacio se hacen iguales a cero las magnitudes x' (en el sistema $X'Y'Z'$) y $x - vt$ (en el sistema XYZ), por lo tanto, podemos suponer que x' y $x - vt$ se diferenciarán entre sí en cualquier momento en un factor constante α:

$$x' = \alpha (x - vt). \qquad (6)$$

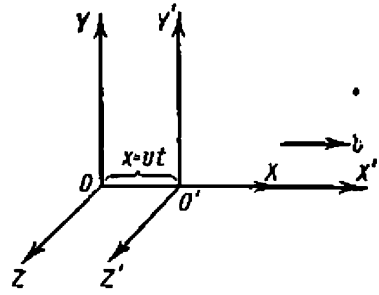

Fig. 193. Esquema para deducir las fórmulas de la transformación de Lorentz.

Veamos ahora lo que ocurre con un punto que corresponda al origen de coordenadas del sistema inmóvil; su coordenada x en este sistema será igual a cero:

$$x = 0. \qquad (7)$$

En el sistema móvil este mismo punto tendrá en el momento t' (contado en el sistema móvil) la coordenada $x' = -vt$, de donde, para este punto se cumplirá la igualdad:

$$x' + vt' = 0.$$

Comparando esta última igualdad con la (7), que caracteriza a este mismo punto en el otro sistema, podemos suponer como en el caso anterior que

$$x = \alpha (x' + vt'). \qquad (8)$$

El hecho de que los coeficientes de proporcionalidad α de ambas fórmulas (6) y (8) deben ser iguales es fácil de demostrar basándose en el postulado experimental de la equivalencia de los dos sistemas, es decir, de la imposibilidad de establecer cuál de dichos sistemas se encuentra en movimiento absoluto.

Para hallar la ley de la transformación hay que determinar el coeficiente α. Para ello podemos valernos del hecho experimental según el cual la velocidad de una señal luminosa dé un mismo valor c al ser medida en ambos sistemas. Emitamos una señal luminosa en la dirección del eje OX ($O'X'$) en el instante en que los orígenes de ambos sistemas de coordenadas coinciden (este momento lo consideramos inicial en ambos sistemas: $t = t' = 0$). En otros momentos tomados arbitrariamente t (t') las señales llegarán, en ambos sistemas, hasta puntos cuyas coordenadas vendrán determinadas respectivamente por las igualdades:

$$x = ct, \quad x' = ct'. \qquad (9)$$

Multiplicando las ecuaciones (6) y (8) tenemos:

$$xx' = \alpha^2 (x - vt)(x' + vt').$$

Poniendo en esta igualdad en lugar de x y x' sus valores por medio de ct y ct', según (9), hallamos que:

$$c^2 = \alpha^2 (c^2 - v^2).$$

Resolviendo esta ecuación con respecto a α, tenemos (cuando delante de la raíz va el signo positivo):

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Este valor de α nos permite escribir la transformación de las coordenadas (6) y (8) de la forma:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

De aquí puede hallarse fácilmente la transformación del tiempo. De la segunda igualdad tenemos:

$$x\sqrt{1 - \beta^2} = x' + vt'.$$

Poniendo aquí el valor de x' de la primera igualdad, hallamos:

$$x\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} + vt'.$$

Resolviendo esta igualdad con respecto a t', obtenemos:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Operando análogamente, obtenemos:

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Reuniendo todas las correlaciones obtenidas podemos escribir las expresiones de las coordenadas y del tiempo en el sistema móvil por medio de las coordenadas y el tiempo en el inmóvil:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

y las expresiones de las coordenadas y del tiempo en el sistema inmóvil por medio de las coordenadas y el tiempo en el móvil:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

Las fórmulas (10) y (10a) expresan la transformación de las coordenadas y del tiempo al pasar de un sistema de referencia a otro. Como puede verse, las fórmulas (10) coinciden con la transformación de Lorentz (3).

Volvemos a recordar que los sistemas, $X'Y'Z'$ y XYZ, son equivalentes y, por consiguiente, la transformación (10) puede obtenerse de la (10a) cambiando el signo de la velocidad relativa.

§ 298. Consecuencias de la transformación de la teoría de la relatividad. Estudiemos ahora las consecuencias más importantes de la transformación de Lorentz.

a) Longitud de los cuerpos en sistemas distintos. La transformación de Lorentz demuestra que un mismo cuerpo tiene unas dimensiones lineales en el sistema respecto al cual se encuentra en reposo y otras distintas en el sistema que se encuentra en movimiento con relación a él. Supongamos que en el sistema XYZ se halla en reposo una barra orientada en dirección OX cuya longitud en este sistema es l (igual a la diferencia entre las coordenadas de sus extremos):

$$l = x_2 - x_1.$$

¿Cuál será la longitud de esta barra en un sistema de coordenadas móvil ($X'Y'Z'$) que se mueva respecto a ella con una velocidad v en el sentido de su longitud?

Para hallar la longitud l' hay que expresarla como la diferencia entre las coordenadas de los extremos de la barra x'_2 y x'_1 en el sistema móvil. En estas condiciones, al aplicar la transformación de Lorentz hay que tomar las coordenadas x'_2 y x'_1 *en un mismo instante, determinado en el sistema móvil.* De esta forma, al relacionar x'_2 y x'_1 con x_2 y x_1, según las fórmulas (3) del § 297, hay que *medir el tiempo en el sistema* $X'Y'Z'$, suponiendo que este tiempo sea constante, tendremos:

$$x'_2 = x_2\sqrt{1-\beta^2} - vt', \quad x'_1 = x_1\sqrt{1-\beta^2} - vt',$$

de donde se deduce que

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1)\sqrt{1-\beta^2} \text{ o } l' = l\sqrt{1-\beta^2}.$$

Es decir, *la barra es más corta en el sistema de coordenadas que se mueve con respecto a ella que en el sistema en que ella misma se encuentra en reposo*:

$$l' < l.$$

Si consideramos que la barra está en reposo en el sistema $X'Y'Z'$, su longitud en él será $l' = x'_2 - x'_1$ y en el sistema XYZ, $l = x_2 - x_1$; en este caso la medición habría que hacerla en un mismo instante t del sistema XYZ. Aplicando las transformaciones de Lorentz (3) del § 297, expresaremos x_2 y x_1 por medio de x'_2 y x'_1 y tendremos:

$$x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1)\sqrt{1-\beta^2} \text{ o } l = l'\sqrt{1-\beta^2},$$

es decir, la barra es otra vez más larga en el sistema en que ella misma se encuentra en reposo.

En las direcciones de los ejes OY y OZ las dimensiones del cuerpo son iguales en ambos sistemas.

Esta deducción de la teoría de la relatividad sustituye a la hipótesis de la contracción de las dimensiones de los cuerpos que se hallan en movimiento con respecto al éter. Según la teoría de la relatividad la barra tiene la longitud máxima en aquel sistema *con respecto al cual se halla en reposo.*

b) Duración de los sucesos en sistemas distintos. La duración de los sucesos también es distinta en diferentes sistemas de coordenadas. Supongamos que en un punto A de coordenada x en el sistema de coordenadas XYZ (fig. 194) ocurre un suceso cuya duración

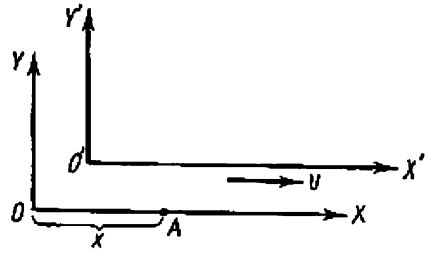

Fig. 194. Esquema para determinar la duración de los sucesos en distintos sistemas de coordenadas.

es igual a $\tau = t_2 - t_1$, donde t_2 y t_1 son los instantes en que comienza y termina dicho suceso, tomados en el sistema de coordenadas XYZ.

¿Cuál será la duración $\tau' = t'_2 - t'_1$ de este suceso en el sistema de coordenadas $X'Y'Z'$?

Los instantes t_1 y t_2 tomados en el sistema de coordenadas XYZ corresponden a los instantes t'_1 y t'_2 tomados en el sistema $X'Y'Z'$ para el punto A, es decir, para un mismo valor de la coordenada x. Por consiguiente debemos aplicar la fórmula de transformación (3) del § 297, que relaciona t' con t para un mismo valor de x. De esta forma tenemos:

$$\sqrt{1-\beta^2}\cdot t'_1 = t_1 - \frac{xv}{c^2}; \quad \sqrt{1-\beta^2}\cdot t'_2 = t_2 - \frac{xv}{c^2},$$

de donde se deduce que

$$\sqrt{1-\beta^2}\,(t'_2 - t'_1) = t_2 - t_1 \quad \text{o} \quad \tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Es decir, el intervalo τ' será mayor que τ.

Podemos plantearnos el problema inverso. Supongamos que en el sistema $X'Y'Z'$ (x' constante) la duración de un suceso $\tau' = t'_2 - t'_1$. ¿Cuál será la duración de este mismo suceso en el sistema XYZ?

Para responder aplicaremos la transformación (3) del § 297, en la que x' suponemos constante. En estas condiciones obtenemos:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{o} \quad \tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Ahora el intervalo τ es mayor que el τ'. De aquí podemos sacar la siguiente conclusión: *la duración de un suceso que tiene lugar en un punto determinado A es menor cuando se relaciona con el sistema de coordenadas con respecto al cual dicho punto se encuentra en reposo.*

Según la fórmula matemática de la transformación (3) del § 297 la diferencia de duración de los sucesos, determinada con relación a dos sistemas, será tanto mayor cuanto mayor sea la velocidad relativa entre estos sistemas.

c) Teorema de la suma de velocidades. En la mecánica de Newton el teorema de la suma de velocidades, como ya indicamos, está relacionado con la transformación de Galileo. Generalmente este teorema se formula así: la velocidad «absoluta» **u** de un punto es igual a la suma geométrica de sus velocidades relativa (**u'**) y de arrastre (**v**):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}.$$

Se entiende por velocidad «absoluta» (que no debe confundirse con la velocidad «absoluta» hipotética con respecto al éter) la velocidad del punto con relación a aquel sistema de referencia que por las condiciones del problema se toma como inmóvil. Designemos este sistema por medio de XYZ. Por consiguiente, la velocidad «absoluta» se mide en el sistema XYZ. La velocidad relativa u' será la velocidad del punto medida en el sistema $X'Y'Z'$ y la de arrastre será la velocidad del sistema $X'Y'Z'$ respecto al sistema XYZ. De acuerdo con la transformación de Lorentz la relación entre las velocidades antedichas es otra que la admitida por la mecánica newtoniana. Para determinar esta relación dividamos miembro a miembro la primera ecuación (3), del § 297, por la última y obtendremos:

$$\frac{x}{t} = \frac{x' + vt'}{t' + \frac{x'v}{c^2}} = \frac{\frac{x'}{t'} + v}{1 + \frac{x'}{t'}\frac{v}{c^2}}.$$

Teniendo en cuenta que x/t es la proyección de la velocidad «absoluta» sobre el eje OX (o mejor dicho, su valor medio), que x'/t' es la proyección de la velocidad relativa sobre el eje $O'X'$ y que v es la velo-

cidad de arrastre, podemos escribir la última expresión de la forma:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x \frac{v}{c^2}}. \qquad (1)$$

Para las demás proyecciones de las velocidades obtenemos de forma análoga:

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + u'_x \frac{v}{c^2}}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + u'_x \frac{v}{c^2}}. \qquad (1a)$$

Aplicando las ecuaciones (3) del § 297 se puede obtener por este mismo procedimiento

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x \frac{v}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - u_x \frac{v}{c^2}}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - u_x \frac{v}{c^2}}.$$

Estas fórmulas (deducidas partiendo de la suposición de que el movimiento relativo de los sistemas tiene lugar a lo largo del eje OX) sustituyen a las fórmulas ordinarias del teorema clásico de la suma de velocidades. Como vemos, las expresiones (1) y (1a), para las proyecciones «transversal» y «longitudinal» de la velocidad, son diferentes. Los resultados de los cálculos hechos con estas fórmulas se diferencian mucho de los que proporcionan las clásicas cuando se trata de velocidades del orden de la velocidad de la luz. Veamos, por ejemplo, el caso de un rayo de luz que en el sistema $X'Y'Z'$ marcha con una velocidad c en la dirección $O'X'$ y determinemos su velocidad en el sistema XYZ. Por la fórmula (1), suponiendo $u'_x = c$, obtenemos que la magnitud buscada será:

$$u_x = \frac{c + v}{1 + c \frac{v}{c^2}} = c.$$

Es decir, la velocidad en el sistema XYZ será igual a c, mientras que la fórmula clásica nos daría, naturalmente, $c + v$. Lógicamente este resultado era de esperar, puesto que para deducir la fórmula de Lorentz se partió del hecho de que la velocidad de la luz es independiente del movimiento del sistema.

El carácter de límite de la velocidad de la luz, que hemos señalado anteriormente, se aprecia claramente si en la fórmula de la suma de velocidades se toman u'_x y v iguales a c, en cuyo caso obtendremos también que el valor de u_x es igual a c.

§ 299. La óptica de los cuerpos en movimiento y la teoría de la relatividad. Como indicamos con anterioridad, la falta de solidez de la teoría del éter se puso de manifiesto cuando se intentó interpretar los experimentos de Fizeau y Michelson y el fenómeno de la

aberración de la luz desde un mismo punto de vista. Como es natural se plantea la pregunta: ¿cómo interpreta estos fenómenos la teoría de la relatividad?

El experimento de Michelson no necesita ponerse a discusión, puesto que fue precisamente el que sirvió de base para establecer los postulados principales de la teoría de la relatividad.

Los resultados del experimento de Fizeau se obtienen, sin necesidad de admitir el arrastre parcial del éter, como consecuencia del teorema de la suma de velocidades. Examinemos este experimento desde este punto de vista. Llamando n al índice de refracción del agua, obtenemos que la velocidad relativa de la luz en dicho medio u'_x será:

$$u'_x = \frac{c}{n}.$$

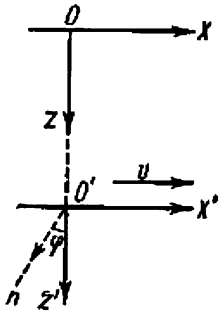

Fig. 195. Esquema para explicar el fenómeno de la aberración de la luz.

La corriente de agua viene determinada por la velocidad de arrastre v. La figura de interferencia dependerá de la velocidad de la luz u_x con respecto a la instalación (aparato). Considerando que v/c es una magnitud pequeña y despreciando los miembros que contienen v/c en grado segundo y mayores, por el teorema de la suma de velocidades (1) del § 298, obtenemos:

$$u_x = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{c}{n}\frac{v}{c^2}} \cong \left(\frac{c}{n} + v\right)\left(1 - \frac{v}{nc}\right)$$

y prescindiendo luego del miembro que contiene v/c, tendremos:

$$u_x = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \qquad (1)$$

Este resultado coincide con el del teorema ordinario de la suma de velocidades cuando se supone que el coeficiente de arrastre del éter es igual a $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, es decir, este resultado está en concordancia con el del experimento de Fizeau. De esta forma los experimentos de Michelson y de Fizeau se interpretan desde el mismo punto de vista.

Examinemos ahora el fenómeno de la aberración de la luz. Para esto consideraremos que el sistema XYZ se refiere a la estrella que se observa y que el sistema $X'Y'Z'$ se refiere a la Tierra, en la cual se halla instalado el telescopio (fig. 195). Supongamos que el rayo luminoso de la estrella lleva la dirección del eje OZ. Determinemos el ángulo que forma este rayo con el eje $O'Z'$ (en la Tierra). Los ejes OX y $O'X'$ de ambos sistemas los suponemos dirigidos paralela-

mente a la velocidad de la Tierra v. La ecuación del rayo de luz que avanza en el plano XOZ, en dirección OZ, tiene la forma:

$$s = a \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{c}\right), \qquad (2)$$

donde a es la amplitud y ν, la frecuencia de las vibraciones. En el sistema $O'X'Z'$ este mismo rayo no se propagará a lo largo del eje $O'Z'$, sino siguiendo la dirección del vector n que se encuentra en el plano $O'X'Z'$. La ecuación de este rayo se puede escribir de la forma:

$$s = a \cos 2\pi\nu' \left(t' - \frac{x'\alpha + z'\gamma}{c}\right), \qquad (3)$$

donde α y γ son los cosenos de los ángulos que forma el rayo con los ejes $O'X'$ y $O'Z'$, y t' es el tiempo tomado en el sistema $X'Y'Z'$.

Para determinar la dirección del rayo en el sistema relacionado con la Tierra, transformamos las coordenadas y el tiempo de la ecuación (2), aplicando las fórmulas de Lorentz, y hallamos la fase de las vibraciones en el sistema $X'Y'Z'$.

Aplicando la transformación (3) del § 297, obtenemos

$$s = a \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{c}\right) = a \cos 2\pi\nu \left(\frac{t' + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{z'}{c}\right)$$

o

$$s = a \cos 2\pi \frac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(t' + \frac{x' \frac{v}{c} - z'\sqrt{1-\beta^2}}{c}\right).$$

Comparando esta expresión con la fórmula (3), vemos que

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \alpha = -\frac{v}{c} \text{ y } \gamma = \sqrt{1-\beta^2}. \qquad (4)$$

Por las fórmulas (4) podemos apreciar que en el sistema de coordenadas referido a la Tierra la luz de la estrella forma con el eje $O'Z'$ un ángulo φ cuyo coseno es igual a $\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$; por consiguiente, el tubo del telescopio que se encuentra en la Tierra deberá inclinarse un ángulo igual a éste con respecto a la vertical. El seno del ángulo φ será igual a $\beta = \frac{v}{c}$. Y como la velocidad de la Tierra por su órbita es igual a $3 \cdot 10^6$ cm/s y la de la luz $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s, tendremos que $\beta = 10^{-4}$; para estos valores de β el seno y la tangente son prácticamente iguales y, por consiguiente, obtenemos la coincidencia con las condiciones clásicas para la aberración de la luz, es decir, *la tangente del ángulo de inclinación del eje del telescopio es igual a v/c*. Para esta explicación del fenómeno de la aberración hemos

tomado un caso particular, pero el problema se puede generalizar para el caso en que la dirección del rayo se toma arbitrariamente*).

El papel que desempeña la transformación de Lorentz en la interpretación del efecto Doppler es muy importante. Este efecto consiste en la variación que experimenta la frecuencia de la luz cuando se percibe en un sistema que se encuentra en movimiento con respecto a su fuente. El efecto Doppler ordinario, referido a las ondas que se propagan en un medio elástico, se reduce a lo siguiente (t. I, § 113). Cuando la fuente de ondas se mueve en el medio en que se propagan las vibraciones, la frecuencia ν', percibida por cualquier aparato registrador, será diferente de la frecuencia ν que emite la fuente. La frecuencia ν' se relaciona con la ν por medio de la fórmula:

$$\nu' = \nu \frac{V - v_1}{V - v_2}, \qquad (5)$$

siendo V la velocidad de propagación de las vibraciones en el medio y v_1 y v_2 las proyecciones de las velocidades respectivas del aparato registrador y de la fuente sobre la recta que los une entre sí; v_1 y v_2 se consideran positivas cuando sus direcciones coinciden con la de propagación de la luz. La fórmula (5) muestra que la variación de la frecuencia no sólo depende de la velocidad relativa $v = v_1 - v_2$, sino también de las mismas velocidades v_1 y v_2 con respecto al medio en que se propagan las vibraciones. Por consiguiente, la medición de la frecuencia puede servir para determinar la velocidad de la fuente (o del aparato registrador) en el medio.

Mientras se admitió que la luz se propagaba en el éter se podía pensar que la variación de la frecuencia debida al efecto Doppler serviría para hallar el movimiento con relación al éter, es decir, el movimiento «absoluto». Pero una vez establecida la imposibilidad de descubrir el movimiento «absoluto» se hizo necesario revisar la teoría del efecto Doppler para las ondas luminosas y ponerla de acuerdo con las exigencias de la teoría de la relatividad.

La variación de la frecuencia, cuando la fuente y el sistema en que se manifiesta la acción de las ondas luminosas tienen movimiento relativo, puede hallarse fácilmente aplicando la transformación de Lorentz. Supongamos que el sistema de coordenadas XYZ sirve de referencia a la fuente S, mientras que la medición de la frecuencia se realiza en el sistema $X'Y'Z'$; la velocidad relativa de estos dos sistemas sigue la dirección del eje $O'X'$.

Si la luz de la fuente S (fig. 196) se propaga a lo largo del eje OX, la fase de las vibraciones en el sistema XYZ es igual a $2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)$,

*) Hablando estrictamente el fenómeno de la aberración tendría que explicarse partiendo del carácter real (no inercial) del movimiento de la Tierra alrededor del Sol, y no sustituyendo este movimiento por el uniforme y rectilíneo.

donde ν es la frecuencia de la luz que emite la fuente; en otras palabras, ν es el número de vibraciones que se perciben en el sistema XYZ en la unidad de tiempo (contadas en este sistema). Transformemos la fase $2\pi\nu\left(t-\frac{x}{c}\right)$ a las coordenadas y al tiempo del sistema $X'Y'Z'$. De acuerdo con la fórmula (3) del § 297, hallamos:

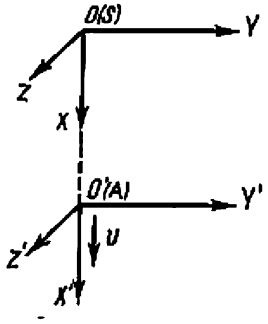

Fig. 196. Esquema para deducir la expresión del efecto Doppler.

$$2\pi\nu\left(t-\frac{x}{c}\right)=2\pi\nu\left(\frac{t'+x'\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{x'+vt'}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right). \tag{6}$$

Pero la magnitud ν no representa el número de vibraciones por unidad de tiempo (es decir, la frecuencia de la luz) en el sistema $X'Y'Z'$, puesto que en este sistema las escalas de las longitudes y del tiempo son otras. La frecuencia ν', que se percibe en el sistema $X'Y'Z'$ se puede hallar reduciendo el segundo término de la expresión (6) a la forma $2\pi\nu'\left(t'-\frac{x'}{c}\right)$. De la igualdad

$$2\pi\nu'\left(t'-\frac{x'}{c}\right)=2\pi\nu\left(\frac{t'+x'\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{x'+vt'}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

obtenemos

$$\nu'=\nu\frac{1-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{7}$$

La expresión (7) puede representarse también de la forma:

$$\nu'=\nu\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}, \tag{7a}$$

o aproximadamente

$$\nu'\cong\nu\left(1-\frac{1}{2}\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{v}{c}\right)\cong\nu\left(1-\frac{v}{c}\right).$$

Con esta misma aproximación la fórmula clásica (5) da:

$$\nu'\cong\nu\left(1-\frac{v_1-v_2}{V}\right)=\nu\left(1-\frac{v}{V}\right).$$

Como puede verse, con la aproximación indicada la fórmula de la teoría de la relatividad coincide con la clásica.

Pero entre la fórmula exacta (7a) y la fórmula clásica (5) existe una diferencia esencial, que consiste en que mientras en la fórmula clásica (5) entran separadamente la velocidad del aparato registrador v_1 y la de la fuente v_2, en la fórmula (7a) *solamente entra la velocidad relativa v del aparato registrador con respecto a la fuente.* Por lo tanto resulta que el efecto Doppler, lo mismo que los demás fenómenos físicos, no sirve para descubrir el movimiento «absoluto» de ningún sistema.

La segunda deducción importante de la teoría de la relatividad es el llamado *efecto transversal Doppler*, es decir, la variación de la frecuencia de la luz en el sistema $X'Y'Z'$ cuando se propaga en dirección perpendicular a la velocidad v.

Si la transformación de Lorentz se aplica al caso de ondas que se propagan en una dirección cualquiera, en lugar de la fórmula (7) obtenemos:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{8}$$

donde φ es el ángulo que forma la dirección en que se propaga la luz con la dirección de la velocidad v (medido en el sistema XYZ). Cuando la luz se propaga en dirección perpendicular a la velocidad $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, la fórmula (8) da:

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cong \nu \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2\right) \tag{8a}$$

[compárese con la fórmula (4)]. Si el ángulo φ se mide en el sistema $X'Y'Z'$, en las fórmulas (8) y (8a) hay que cambiar de sitio respectivamente ν y ν'.

El efecto transversal es mucho menor que el longitudinal, puesto que depende únicamente de β^2.

Los primeros experimentos para descubrir directamente el efecto óptico Doppler fueron realizados por A. A. Bielopolski (en el año 1900). El esquema de este experimento es el siguiente: Cuando la luz se refleja en un espejo móvil la imagen del objeto se mueve. Sea un espejo (fig. 197, *a*) que se mueve en la dirección de la normal con una velocidad v, y un rayo que incide sobre él formando un ángulo φ con dicha normal. En estas condiciones la proyección de la velocidad de la imagen S', sobre la dirección del rayo visual $S'AP$ será igual, como puede calcularse fácilmente, a $2v \cos \varphi$. Si el rayo SA sufre n reflexiones en dos espejos que se mueven el uno al encuentro del otro (fig. 197, *b*), cada una de estas reflexiones producirá una velocidad $2v \cos \varphi$, y la luz que va en la dirección $A'P$ será equivalente a la de un foco que tenga en la dirección $A'P$ una velocidad igual

a $2vn\cos\varphi$. De esta forma el movimiento de los espejos puede suplir al del foco. Si el movimiento relativo de los espejos es como el que se indica en la fig. 197, *b*, será equivalente al de *aproximación* del foco al punto *P*. La frecuencia que se observe en este caso deberá

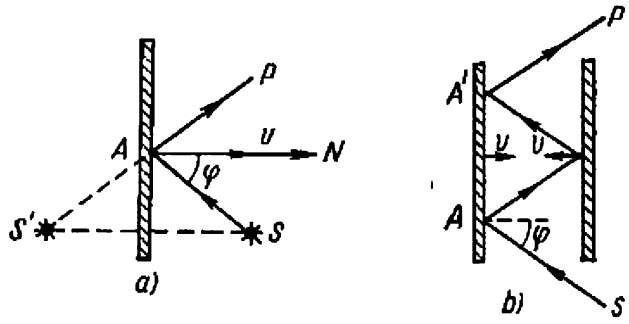

Fig. 197. Translación de la imagen al moverse los espejos.

ser mayor que la del foco, es decir, la raya espectral deberá desplazarse hacia el lado de las longitudes de onda menores. Si los espejos se mueven en direcciones opuestas (separándose) la raya se desplazará hacia el lado de las longitudes de onda mayores. A. A. Bielopolski tomó dos tambores giratorios, de ejes paralelos, provistos

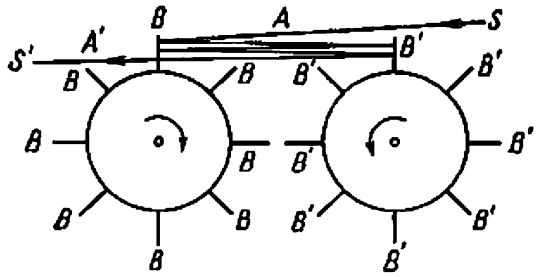

Fig. 198. Esquema del experimento de A. A. Bielopolski.

de unos espejos *B* y *B'* colocados como se muestra en la fig. 198. El rayo de luz *SA*, después de incidir sobre el espejo *B* sufría una serie de reflexiones sucesivas en los espejos *B* y *B'* y siguiendo la dirección *A'S'* iba a parar a un espectroscopio. Cuando los tambores se hacían girar como indica la figura, los espejos *B* y *B'* se movían aproximándose entre sí. Cuando se hacían girar en sentidos contrarios a los anteriores, los espejos se alejaban el uno del otro. Con estos experimentos A. A. Bielopolski consiguió descubrir el desplazamiento de Doppler y demostrar que el signo de éste corresponde al de la veloci-

dad, como prevé la teoría. Posteriormente este experimento fue repetido con mayor precisión por B. B. Golitsin.

El efecto Doppler tiene mucha importancia en las observaciones astronómicas. Por ejemplo, por el desplazamiento de las rayas en los espectros de los cuerpos colestes se deduce la velocidad radiál de estos cuerpos con respecto a la Tierra. El hecho de la existencia de estrellas dobles se descubre por el desdoblamiento espectral de las rayas, producido por la diferencia entre las velocidades radiales de ambas estrellas. La observación de las rayas de Fraunhofer de distintos bordes del disco solar permite establecer el movimiento de la superficie del Sol. Este tipo de investigaciones se llevan a cabo constantemente sobre los espectros de los astros y desempeñan un papel de primera importancia en el estudio de sus movimientos.

No obstante, los experimentos mencionados no son suficientemente exactos para poder esclarecer qué fórmulas son las que concuerdan mejor con la realidad: las obtenidas basándose en la teoría de la relatividad o las de la teoría clásica. La diferencia esencial entre los resultados de ambas teorías consiste en que la de la relatividad da el «efecto transversal», que no existía en la antigua teoría. La observación experimental de este efecto es muy difícil debido a su pequeñez. A pesar de todo, Ives, en el año 1938, descubrió el efecto transversal observando la luz emitida por los rayos canales del hidrógeno, que tienen una velocidad del orden de 10^8 cm/s. Con esto quedó confirmada la fórmula del efecto Doppler correspondiente a la teoría de la relatividad.

§ 300. Mecánica de la teoría de la relatividad. Los razonamientos expuestos anteriormente demuestran que la transformación de Galileo, con relación a la cual son invariantes las leyes de la mecánica de Newton, no es más que una expresión límite de la transformación de Lorentz cuando la razón v/c tiende a cero. Por esto podemos pensar que también las ecuaciones de la mecánica de Newton son ecuaciones límites de otras más generales, invariantes con respecto a la transformación de Lorentz, como lo exige la teoría de la relatividad.

La forma de las ecuaciones de la mecánica de la teoría de la relatividad puede hallarse introduciendo en las ecuaciones de Newton las modificaciones necesarias para hacerlas invariantes con relación a la transformación de Lorentz.

Escribamos la ecuación de la mecánica de Newton en forma vectorial:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{f}. \tag{1}$$

En la mecánica newtoniana la masa m se considera magnitud constante, independiente del estado de movimiento. Como puede demos-

trarse, esta suposición es incompatible con las exigencias de invariabilidad de la ecuación con respecto a la transformación de Lorentz. La exigencia de que tanto en la mecánica de la teoría de la relatividad como en la mecánica de Newton todo sistema de cuerpos aislado debe cumplir, en cualquier sistema de referencia, la ley de la conservación de la cantidad de movimiento y las leyes de la transformación de las velocidades al pasar de un sistema de referencia a otro, nos lleva a la conclusión de que la masa del cuerpo debe tener diferentes valores en distintos sistemas de referencia que se encuentren en movimiento relativo. En este caso la ley de la transformación de las masas resulta ser la siguiente:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (2)$$

Aquí m_0 es el valor de la masa medido en el sistema de referencia en que ésta se halla en reposo; m es el valor de esta misma masa medido en el sistema de referencia que se mueve con relación al primero con una velocidad constante v. Las ecuaciones de la mecánica serán invariantes respecto a la transformación de Lorentz siempre que en la fórmula (1) se entienda por masa m una magnitud que puede variar según la ley (2). De esta forma, las ecuaciones de la mecánica de la teoría de la relatividad toman la forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{v}\right) = \mathbf{f}. \qquad (3)$$

Es evidente que estas ecuaciones, al diferenciarse de las de Newton, deberán conducir a otras consecuencias que las ecuaciones de la mecánica clásica. La comprobación de estas consecuencias en la práctica sirve al mismo tiempo para comprobar las propias ecuaciones.

Como sabemos, en la mecánica clásica la ecuación del movimiento puede escribirse de la forma: $\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{f}$, donde $\mathbf{p}$ es la cantidad de movimiento. Comparando esta ecuación con la (3) vemos que en la mecánica de la teoría de la relatividad el papel de la cantidad de movimiento lo desempeña la magnitud:

$$\mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\mathbf{v}. \qquad (4)$$

La relación entre la fuerza y la aceleración, deducida de la fórmula (3), puede ser distinta y depende de cómo actúa la fuerza: en la dirección de la velocidad inicial o perpendicularmente a ella. En el primer caso la fuerza y la aceleración se llaman longitudinales (f_l, w_l), en el segundo, transversales (f_t, w_t). Para la fuerza longitudinal

se obtiene:

$$\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} w_l = f_l$$

y para la transversal

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} w_l = f_t,$$

por esto se dice con frecuencia que $\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ es la masa transversal y que $\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}}$ es la masa longitudinal. La última fórmula fue comprobada aplicándola al movimiento de los electrones en un campo eléctrico transversal, en los experimentos que estudiamos en el t. II, § 218, que confirmaron totalmente la validez de la fórmula.

Una consecuencia de extraordinaria importancia de la mecánica de la teoría de la relatividad es la relación entre la energía y la masa. Establezcamos esta relación basándonos en la fórmula (3). En la mecánica clásica la variación de la energía cinética de un punto material viene determinada por el trabajo realizado por las fuerzas aplicadas a dicho punto. Veamos lo que ocurre a este respecto según la fórmula (3). El trabajo elemental dA de la fuerza f es igual a producto escalar de la fuerza por la traslación $d\mathbf{r}$ del punto:

$$dA = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

Esta magnitud debe producir un incremento de la energía cinética del punto:

$$dA = dE_c.$$

Basándonos en la fórmula (3) tenemos:

$$dE_c = dA = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{v}\right)\cdot d\mathbf{r}.$$

Diferenciando, obtenemos

$$dE_c = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{m_0 v}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt}\mathbf{v}\right)\cdot d\mathbf{r},$$

o como $d\mathbf{r}/dt$ es igual a la velocidad v, tendremos

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot d\mathbf{v} = v\,dv; \quad \frac{dv}{dt}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = dv\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = v^2\,dv,$$

por consiguiente

$$dE_c = \frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}dv.$$

Por otra parte, por la fórmula (2), hallamos:

$$dm = \frac{m_0 v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} dv.$$

De la comparación de las dos últimas fórmulas obtenemos la siguiente relación entre dE_c y dm:

$$dE_c = c^2 dm. \tag{5}$$

La variación de la energía es proporcional a la variación de la masa, con la particularidad de que el coeficiente de proporcionalidad es el cuadrado de la velocidad de la luz. Este postulado lógicamente puede generalizarse considerando que *entre la energía E y la masa m existe una profunda relación mutua*, que puede expresarse con la correlación:

$$E = mc^2. \tag{5a}$$

La masa y la energía son características cualitativamente distintas de las propiedades de aquellas formas de la materia que estudia la Física. La masa caracteriza las propiedades inerciales de la materia (segunda ley de Newton) y las propiedades que se ponen de manifiesto en los fenómenos de la gravitación universal. La energía es una magnitud cuya variación determina el trabajo que realiza un sistema. Las correlaciones (5) y (5a) que se deducen de la teoría de la relatividad muestran que entre estas dos características existe una relación: la variación de una de ellas conduce a una variación equivalente de la otra. La variación de la masa de un sistema no sólo puede producirse como resultado de un intercambio de sustancia (átomos, moléculas) con los cuerpos externos, sino también a consecuencia de una transmisión de energía. Por ejemplo, si se le cede al sistema una cantidad de calor ΔQ, que hace que su energía aumente en una magnitud ΔE, de acuerdo con la correlación (5) aumentará al mismo tiempo su masa en una magnitud $\Delta m = \Delta E/c^2$. Otro ejemplo: si como resultado de la emisión de luz la energía de un sistema disminuye en ΔE, paralelamente disminuye su masa en la magnitud $\Delta m = \Delta E/c^2$. Pero dentro de un sistema cerrado se conserva tanto su masa como su energía total.

Como el valor numérico de la velocidad de la luz c en el vacío es enorme, a una variación numérica determinada de la energía ΔE le corresponde una variación muy pequeña de la masa Δm. Si la energía de un sistema E aumenta en 1 J $= 10^7$ erg, su masa se incrementa solamente en $\Delta m \cong 1{,}1 \cdot 10^{-14}$ g. Por esto, cuando se trata de variaciones ordinarias de la energía de los cuerpos, las variaciones que experimentan sus masas son tan pequeñas que es imposible apreciarlas directamente. No obstante, la Física moderna puede comprobar

la correlación entre la energía y la masa gracias a las enormes cantidades de energía que se liberan en las transformaciones nucleares (§ 368).

De la correlación entre la energía y la masa se deduce la fórmula que relaciona la energía con la cantidad de movimiento. Poniendo en (5a) en lugar de m su valor según (2), obtenemos:

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, c^2; \qquad (6)$$

elevando al cuadrado esta igualdad y haciendo las transformaciones algebraicas necesarias, hallamos:

$$m_0^2 c^4 = E^2 - E^2 \frac{v^2}{c^2},$$

o basándonos en (4)

$$m_0^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2. \qquad (7)$$

Las consecuencias de la teoría de la relatividad que hemos examinado se deducen del principio según el cual todos los procesos físicos se desarrollan igualmente en todos los sistemas inerciales, es decir, en aquellos sistemas que se mueven rectilínea y uniformemente unos con respecto a los otros. En el caso de sistemas acelerados no ocurre lo mismo. En éstos (véase el t. I) surgen fuerzas de inercia. Estas fuerzas de inercia se manifiestan como complementarias con respecto a las fuerzas que actúan en los sistemas inerciales. De esta forma, la aceleración de los sistemas puede determinarse por la magnitud de las fuerzas de inercia.

Einstein intentó extender el concepto de la relatividad a los sistemas acelerados. Esta nueva teoría recibió el nombre de «teoría general de la relatividad», para diferenciarla de la «teoría especial de la relatividad» que estudia únicamente la relatividad del movimiento rectilíneo uniforme. Según la teoría general de la relatividad las fuerzas de inercia son equivalentes a las de gravitación. Observando las fuerzas de inercia en un sistema de referencia cualquiera, por ejemplo, las fuerzas que tienden a desviar el plano en que oscila un péndulo en la Tierra (experimento de Foucault), nos encontramos ante la imposibilidad de distinguir si estas fuerzas son de inercia, debidas a la aceleración del sistema de referencia, o fuerzas de gravitación, cuya procedencia se debe a un campo de gravitación complementario. Sin embargo, como demostró posteriormente V. A. Fok, esta equivalencia no es justa en los límites de grandes escalas espaciales y temporales. El sistema inercial de referencia, es decir, el relacionado con el conjunto de las estrellas fijas, es el privilegiado, y la aceleración en este sistema no tiene el carácter relativo que tiene la velocidad.

Pero localmente, el principio de la equivalencia de las fuerzas de inercia y de las fuerzas de gravitación, propuesto por Einstein, conserva su efectividad y permite crear una teoría de la gravitación cuyas deducciones son confirmadas perfectamente por los experimentos. Entre estas deducciones se encuentran: la desviación de los rayos luminosos por un campo gravitatorio y la dependencia que existe entre la frecuencia de las vibraciones luminosas y la fuerza de la gravedad. La primera de estas deducciones fue confirmada observando exactamente las posiciones que ocupaban las estrellas que se veían en las proximidades del disco solar durante un eclipse total. La posición aparente de estas estrellas resultó estar desplazada debido a la desviación que sufrieron sus rayos de luz al pasar cerca del Sol, donde el campo gravitatorio era muy intenso.

La segunda deducción de la teoría general de la relatividad consiste en que la frecuencia de la luz cuya fuente se encuentra en el campo de fuerzas de la gravedad es menor que la frecuencia de la luz cuya fuente está fuera de dicho campo. La raya espectral que emite un átomo que se encuentra en un campo de gravitación intenso está desviada hacia la parte roja del espectro. Esta desviación se observa en realidad en las rayas espectrales que emiten las estrellas pertenecientes al tipo de «enanas blancas». Estas estrellas se caracterizan por tener una densidad extraordinariamente grande, y el campo gravitatorio en su superficie es tan enorme que provoca un desplazamiento sensible de las líneas espectrales hacia el lado rojo. Ultimamente (en el año 1958) la influencia del campo gravitatorio sobre la frecuencia de la emisión se ha confirmado también al observar la emisión de rayos γ de núcleos radiactivos (véase efecto Mössbauer, § 372).

La teoría de la relatividad, lo mismo que todos los grandes descubrimientos de la Física, ha exigido la revisión de muchas ideas establecidas y habituales, como los conceptos de que la longitud de los cuerpos es independiente de su movimiento, de que la masa es invariable, etc. Muchos filósofos idealistas intentaron, y continúan haciéndolo hasta nuestros días, aprovechar estos descubrimientos para fundamentar sus puntos de vista, para afirmar que «la materia desaparece», etc. La falsedad de estas afirmaciones fue puesta de manifiesto por V. I. Lenin en su libro «Materialismo y Empiriocriticismo». Creemos oportuno volver a recordar aquí la cita de Lenin a que hicimos referencia en la introducción al presente curso (t. I, § 1): «"La materia desaparece": esto quiere decir que desaparecen los límites dentro de los cuales conocíamos la materia hasta ahora, y que nuestro conocimiento se profundiza; desaparecen propiedades de la materia que anteriormente nos parecían absolutas, inmutables, primarias (impenetrabilidad, inercia, masa, etc.) y que hoy se revelan como relativas, inherentes solamente a ciertos estados de la materia. Porque la *única* «propiedad» de la materia con cuya admisión está ligado el materialismo filosófico, es la propiedad *de ser*

una realidad objetiva, es decir, de existir fuera de nuestra conciencia».*)

Otra tendencia errónea relacionada con la teoría de la relatividad es la que pretendió justificar el relativismo filosófico, es decir, el sistema filosófico idealista que afirma que todos nuestros conocimientos son relativos, que dependen de un punto de vista arbitrario, etc. Pero en realidad esta conclusión no puede deducirse de ninguna manera de los postulados físicos de la teoría de la relatividad. El hecho de que un mismo suceso se manifieste de diferente forma con relación a distintos sistemas de referencia, o de que entre sistemas que se mueven uno con respecto a otro rectilínea y uniformemente no exista ningún privilegio, no quiere decir, ni mucho menos, que ya es imposible describir objetivamente los fenómenos de la naturaleza. La teoría de la relatividad da las fórmulas de transición de unos sistemas de referencia en movimiento a otros (las fórmulas de la transformación de Lorentz) y permite establecer unívocamente cómo un suceso dado se manifiesta en cualquiera de los sistemas en movimiento. Por lo tanto, se ponen de manifiesto las cualidades objetivas de las correlaciones espacio-tiempo y las cualidades objetivas de la materia en movimiento.

---

*) V. I. Lenin, «*Materialismo y empiriocriticismo*», Ediciones en lenguas extranjeras, Moscú, 1948, pág. 297 o Editorial Política, La Habana, 1963, pág. 251.

CAPITULO XXVII

Flujo luminoso y termodinámica de la radiación

§ 301. Sensibilidad relativa. Flujo luminoso. La cantidad de energía que transportan las ondas luminosas en la unidad de tiempo a través de una superficie se llama *flujo de energía radiante o flujo radiante*. El flujo de energía radiante tiene una potencia y puede medirse por la cantidad de calor que recibe el cuerpo que absorbe por completo dicho flujo.

La luz sólo en casos excepcionales está formada por ondas de longitudes aproximadamente iguales y se percibe por el ojo como luz espectralmente «pura» (monocromática). En la mayoría de los casos se trata de conjuntos de ondas de longitudes muy diversas correspondientes tanto a la zona de los rayos visibles como a la de los invisibles. En la luz blanca que se obtiene por la incandescencia de cuerpos sólidos o líquidos existen ondas de todas las longitudes posibles. Para dar una característica energética de este tipo de luz es preciso indicar cómo *está distribuida la energía entre las distintas longitudes de onda*. Separemos de un flujo radiante, cuya potencia total sea E, un intervalo de longitudes de onda que abarque desde una determinada longitud λ_1 hasta otra, también determinada, λ_2. Si el intervalo que se toma entre las longitudes de onda $\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda$ es muy pequeño, la potencia $\Delta E_{\lambda,\ \lambda+\Delta\lambda}$, correspondiente a este intervalo, puede considerarse proporcional a $\Delta\lambda$:

$$\Delta E_{\lambda,\ \lambda+\Delta\lambda} = e_\lambda \cdot \Delta\lambda. \qquad (1)$$

En el límite podemos suponer que $\Delta\lambda$ es infinitamente pequeño y escribir la correlación (1) de la forma:

$$dE_{\lambda,\ \lambda+d\lambda} = e_\lambda \cdot d\lambda. \qquad (1a)$$

La magnitud e_λ es igual a la potencia referida a un intervalo unidad de longitudes de onda próximo a la longitud λ dada y se llama *función de distribución de la energía entre las longitudes de onda*. Esta magnitud es función de la longitud de onda, cuyo tipo depende de la naturaleza del cuerpo radiante y de las condiciones en que se produce la radiación. En la fig. 199 se representa e_λ en función de λ para un caso particular. La potencia correspondiente al intervalo de longitudes de onda que comprende desde λ hasta $\lambda + d\lambda$, está representada por la superficie de la columna rayada. La potencia correspondiente al intervalo finito comprendido entre las longitudes de onda λ_1 y λ_2

puede expresarse por medio de la integral:

$$E_{\lambda_1,\,\lambda_2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e_\lambda \, d\lambda. \qquad (2)$$

La potencia $E_{\lambda_1,\,\lambda_2}$ estará representada gráficamente por la superficie $ABCD$.

El flujo total, referido a todas las longitudes de onda, puede obtenerse extendiendo la integral de la expresión (2) a todo el campo

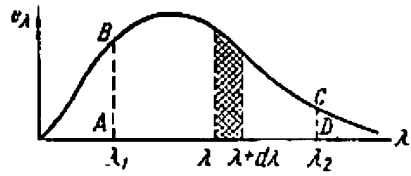

Fig. 199. Distribución de la potencia de la radiación entre las longitudes de onda.

de longitudes de onda, desde $\lambda_1 = 0$ hasta $\lambda_2 = \infty$:

$$E = \int_0^\infty e_\lambda \, d\lambda \qquad (2a)$$

Esta característica del flujo radiante es completa desde el punto de vista energético, pero no nos dice nada de la intensidad de la sensación subjetiva que produce dicho flujo. La intensidad de la sensación depende del grado de sensibilidad que tiene el ojo humano para percibir la luz de diferentes longitudes de onda. Un flujo compuesto por rayos infrarrojos o ultravioletas no provoca ninguna sensación visual aunque la energía que transporte sea bastante grande. Por el contrario, si el flujo está formado por los rayos que mejor percibe el ojo, aunque su potencia sea pequeña, producirán una sensación visual intensa. El ojo humano tampoco tiene la misma sensibilidad para los rayos visibles de distintos colores. Así, por ejemplo, para que los rayos rojos produzcan la misma sensación de intensidad que los verdes su potencia tendrá que ser mucho mayor que la de éstos. Por esta razón, para introducir una magnitud que caracterice el poder que tiene un flujo radiante para producir sensaciones visuales es necesario estudiar la sensibilidad que tiene el ojo para con las ondas luminosas de diferente longitud. Pero como la sensibilidad del ojo varía mucho de unas personas a otras, hay que tomar la sensibilidad «media». Esta sensibilidad «media» se obtiene como resultado del reconocimiento de un número elevado de personas, después de eliminar aquellas que presentan defectos visuales evidentes. La magnitud que caracteriza la sensibilidad «media» relativa del

ojo humano para con las ondas de diferentes longitudes se llama *sensibilidad relativa, eficacia luminosa monocromática* o *factor de luminosidad relativa**). La construcción de la curva de la sensibilidad relativa presenta dificultades, ya que desde el punto de vista subjetivo no es fácil establecer cuando es igual el «brillo» de rayos de distintos colores, por ejemplo, de los rayos rojos y azules (para más detalles véase el § 305).

En la actualidad, para construir las curvas de sensibilidad relativa se emplea el método de «paso a paso», que consiste en equilibrar la iluminación subjetiva de dos haces cuyas longitudes de onda se diferencian poco entre sí.

Supongamos que dos campos contiguos, por ejemplo, dos partes adyacentes de un vidrio esmerilado están iluminadas por sendos haces de este tipo. Como las longitudes de onda se diferencian poco entre sí, los campos parecerán casi del mismo color, lo que permite con suficiente exactitud determinar el momento en que es igual el brillo subjetivo de ambos campos. Supongamos que el primer flujo está formado por ondas correspondientes a un intervalo estrecho $d\lambda$, próximo a una determinada longitud de onda λ_1, y que el segundo flujo consta de ondas correspondientes a un intervalo $d\lambda$, próximo a la longitud de onda λ_2, que a su vez se diferencia poco de λ_1. Las potencias de estos dos flujos serán $dE_{\lambda_1} = e_{\lambda_1} d\lambda$ y $dE_{\lambda_2} = e_{\lambda_2} d\lambda$. Si el ojo tuviera la misma sensibilidad para con los flujos de ambas longitudes de onda, los dos campos parecerían igualmente brillantes cuando las potencias de dichos flujos fueran iguales: $dE_{\lambda_1} = dE_{\lambda_2}$. Pero en realidad para igualar el brillo subjetivo de ambos campos hay que tomar potencias distintas de los flujos dE_{λ_1} y dE_{λ_2}: se necesitará menos potencia de aquel flujo a cuyas longitudes de onda sea más sensible el ojo.

Por esto, para caracterizar el ojo por la sensibilidad relativa V_λ suponemos que *el valor numérico de la eficacia luminosa monocromática* V_λ *de las longitudes de onda* λ_1 *y* λ_2, *próximas entre sí, es inversamente proporcional a las potencias* dE_{λ_1} *y* dE_{λ_2} *que producen iguales sensaciones de brillo*:

$$\frac{V_{\lambda_1}}{V_{\lambda_2}} = \frac{dE_{\lambda_2}}{dE_{\lambda_1}}. \tag{3}$$

Pasando sucesivamente de una zona espectral contigua a otra, por este procedimiento se pueden establecer los valores de la sensibilidad relativa V_λ dentro de los límites de todo el espectro visible. El ojo humano posee una sensibilidad máxima para con los rayos verdes de longitud de onda igual a 0,555 μ. El valor de la eficacia

*) Sensibilidad relativa, cuando se refiere a la propiedad del ojo, y eficacia luminosa o factor de luminosidad, cuando denota características de la radiación. (*N. del T.*)

luminosa de esta longitud de onda se toma igual a la unidad. Todas las demás longitudes de onda tendrán $V_\lambda < 1$; fuera de los límites del espectro visible $V_\lambda = 0$.

En la tabla VII se dan los valores de la eficacia luminosa V_λ para algunas longitudes de onda*); la variación gráfica de $V_\lambda(\Phi(\lambda))$ en función de la longitud de onda se muestra en la fig. 200 (curva *1*):

Tabla VII

Valores de la eficacia luminosa

λ, en μ	V_λ	λ, en μ	V_λ
0,400	0,0004	0,560	0,995
0,450	0,038	0,590	0,757
0,500	0,323	0,650	0,107
0,550	0,995	0,700	0,0041
0,555	1,000	0,760	0,00006

De la tabla VII se deduce que para producir la misma sensación, la potencia de los rayos rojos con longitud de onda de 0,650 μ deberá

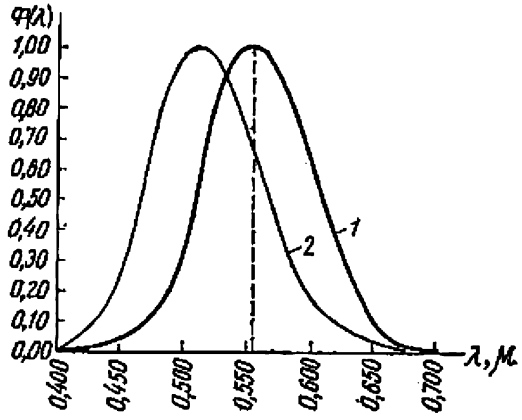

Fig. 200. Sensibilidad relativa de la visión diurna (*1*) y de la visión nocturna (*2*).

ser casi 10 veces mayor que la potencia de los rayos verdes con longitud de onda de 0,555 μ.

Una vez estudiada la sensibilidad relativa o eficacia luminosa podemos introducir una nueva magnitud que caracterice a la luz

*) Más adelante (§ 305) veremos que la variación de la función V_λ depende del valor absoluto de las potencias. Los valores de V_λ que se dan en la tabla VII se refieren a iluminación diurna media.

teniendo en cuenta su aptitud para producir sensaciones visuales. Esta magnitud se llama *flujo luminoso y es igual al producto del flujo radiante (flujo de energía radiante) por la eficacia luminosa.* Para un flujo monocromático referido a un intervalo estrecho de longitudes de onda $d\lambda$ próximo a la onda λ, el flujo luminoso

$$dF_\lambda = V_\lambda \, dE_\lambda = V_\lambda \cdot e_\lambda \, d\lambda. \tag{4}$$

El flujo luminoso total será igual a

$$F = \int_0^\infty V_\lambda e_\lambda \, d\lambda. \tag{4a}$$

La integral se toma entre los límites desde 0 hasta ∞, puesto que para todas las longitudes de onda que se encuentran fuera del espectro visible $V_\lambda = 0$. El flujo luminoso F permite juzgar sobre la intensidad de la sensación visual subjetiva que puede producir una luz de potencia y composición espectral dadas.

§ 302. **Intensidad luminosa, luminosidad e iluminación.** Estudiemos el caso de una fuente luminosa puntual S (fig. 201) que emite

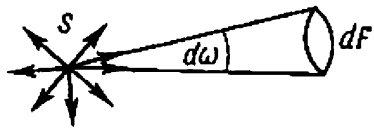

Fig. 201. Flujo luminoso dentro de los límites de un ángulo sólido infinitamente estrecho $d\omega$.

rayos en todas las direcciones. Tomemos en una dirección cualquiera un ángulo sólido infinitamente estrecho $d\omega$. Supongamos que dentro de los límites de este ángulo sólido se propaga un flujo luminoso dF. La magnitud

$$I = \frac{dF}{d\omega} \tag{1}$$

se llama intensidad luminosa de la fuente en la dirección dada. De la correlación (1) se deduce que *la intensidad de la luz es numéricamente igual al flujo luminoso correspondiente al ángulo sólido unidad.* Si la fuente es uniforme, es decir, si su intensidad luminosa es igual en todas las direcciones, en la correlación (1) el ángulo sólido infinitamente estrecho $d\omega$ puede sustituirse por el ángulo sólido finito Ω, y entonces

$$I = \frac{F}{\Omega}.$$

De esta última igualdad, cuando la fuente es uniforme, tenemos que

$$F = I \cdot \Omega. \tag{2}$$

Suponiendo que en la igualdad (2) el ángulo sólido Ω es igual a 4π, obtenemos el flujo total F que emite en todas las direcciones la fuente uniforme cuya intensidad luminosa es I:

$$F = 4\pi I. \tag{2a}$$

Si la fuente no es uniforme la intensidad de la luz será diferente en las distintas direcciones. Tomando coordenadas polares obtenemos que la intensidad de la luz será función de los ángulos polares: $I = I(i, \varphi)$.

Una fuente no uniforme puede caracterizarse gráficamente si tomando un punto determinado O como origen de coordenadas trazamos en todas las direcciones radios vectores cuyas longitudes sean

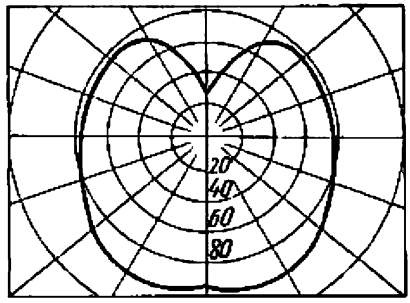

Fig. 202. Diagrama vectorial de la intensidad de la luz de una lámpara eléctrica.

proporcionales a la intensidad de la luz $I(i, \varphi)$ en cada dirección. La envolvente de los extremos de estos radios vectores dará el diagrama de la intensidad luminosa en las distintas direcciones. En la fig. 202 se da un diagrama vectorial de este tipo característico de una lámpara eléctrica ordinaria.

En las fuentes no uniformes puede tomarse en consideración la *intensidad luminosa esférica media* I_0, determinada por la correlación:

$$I_0 = \frac{F}{4\pi} \tag{3}$$

donde F es el flujo luminoso total emitido por la fuente en todas las direcciones.

De la comparación de las igualdades (3) y (2a) se deduce que, si la fuente luminosa es uniforme, su intensidad esférica media coincide con la intensidad luminosa real I.

Supongamos ahora que tenemos una fuente de luz de dimensiones finitas, por ejemplo, un cuerpo sólido incandescente. Tomemos en

él una superficie elemental dS, y llamemos dF (fig. 203) al flujo luminoso total que emite esta superficie dS en todas las direcciones (dentro de los límites de un ángulo sólido igual a 2π).

La magnitud

$$R = \frac{dF}{dS} \tag{4}$$

se llama *luminosidad o emitancia luminosa* de la superficie dS. *La luminosidad es numéricamente igual al flujo luminoso total emitido por la unidad de superficie del cuerpo luminoso.*

El flujo luminoso procedente de un cuerpo no sólo puede deberse a que éste sea por sí mismo fuente de vibraciones luminosas (cuerpos

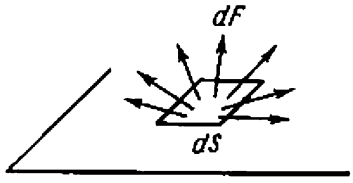

Fig. 203. Flujo luminoso total de la superficie dS.

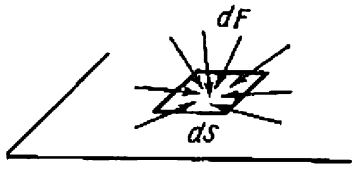

Fig. 204. La iluminación (iluminancia) de la superficie dS está determinada por el flujo luminoso total dF que incide sobre ella.

incandescentes, fosforescentes, etc.), sino también a que en él se refleje o difunda la luz que emiten otras fuentes. Por esto, para resolver muchos problemas importa conocer qué cantidad de flujo luminoso incide sobre una u otra parte del cuerpo iluminado. Para esto se introduce la magnitud llamada *iluminación o iluminancia* que es igual a

$$E = \frac{dF}{dS}, \tag{5}$$

donde dF es el flujo luminoso total que incide sobre la superficie dS (fig. 204). *La iluminación es numéricamente igual al flujo luminoso total que incide sobre la unidad de superficie del cuerpo iluminado.*

La comparación de las fórmulas (4) y (5) pone de manifiesto que la luminosidad R y la iluminación E vienen expresadas por la misma razón dF/dS. La diferencia entre ellas consiste en que en la expresión de la luminosidad se entiende por dF el flujo luminoso *emitido* por la superficie dS, mientras que en la expresión de la iluminación dF es el flujo *que incide* sobre la superficie dS.

Es evidente que la luminosidad de un cuerpo que por sí mismo es fuente de vibraciones luminosas, en general, no está relacionada con su iluminación. Por el contrario, la luminosidad de un cuerpo cuya emisión de luz se debe a los rayos luminosos que difunde o refleja está determinada por su iluminación. Cuanto mayor sea la ilu-

minación E tanto mayor será la luminosidad R de estos cuerpos:

$$R = kE; \tag{6}$$

la magnitud k se llama *coeficiente de difusión (reflexión)*. Para todos los cuerpos reales $k < 1$.

La mayoría de los cuerpos difunden la luz selectivamente, es decir, para ellos k es diferente para distintas longitudes de onda. Estos cuerpos nos parecen «coloreados»: si sobre ellos incide luz blanca, la composición de la luz difusa se diferencia de la de aquélla y produce cierta sensación de colorido. Se llaman blancos aquellos cuerpos cuyo coeficiente k se aproxima mucho a la unidad y es constante para todas las longitudes de onda comprendidas entre los límites del espectro visible. Son negros los cuerpos que para todas

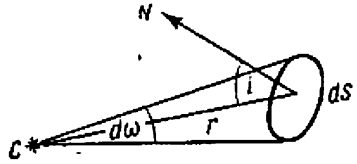

Fig. 205. Esquema para calcular la iluminación que produce la fuente puntual C.

las longitudes de onda tienen igual k, siendo éste mucho menor que la unidad. Para las superficies cubiertas de una capa de magnesia o de nieve recién caída el coeficiente k puede alcanzar valores de 0,9 y mayores. Para las superficies negras deslustradas $k \cong 0{,}01$.

Los cuerpos que tienen diferentes coeficientes de difusión k presentan distinta luminosidad con una misma iluminación. Por ejemplo, si tomamos una hoja de papel blanco, cuyo coeficiente $k = 0{,}8$, y una parte de ella la dejamos blanca mientras la otra la teñimos de negro, de manera que tenga un valor de $k = 0{,}02$, al someterla a una iluminación uniforme la luminosidad de la parte ennegrecida será 40 veces menor que la de la parte blanca.

Para terminar el presente párrafo veamos qué iluminación produce una fuente luminosa puntual de intensidad I sobre una superficie que se encuentra a una distancia r. Sea C la fuente luminosa puntual (fig. 205) y dS la superficie iluminada por ella. Supongamos que el radio vector r, trazado desde el foco luminoso C al centro de la superficie dS, forma con la normal a ésta un ángulo i. Llamemos $d\omega$ al ángulo sólido bajo el cual se ve la superficie dS desde el punto en que se encuentra la fuente C. En estas condiciones el flujo procedente de C que incide sobre la superficie dS, según (1), será:

$$dF = I\, d\omega.$$

Pero el ángulo sólido

$$d\omega = \frac{dS}{r^2} \cos i,$$

de donde obtenemos que

$$dF = dS \frac{I}{r^2} \cos i.$$

Para obtener la iluminación E no hay más que dividir la magnitud del flujo dF por la de la superficie dS:

$$E = \frac{dF}{dS} = \frac{I}{r^2} \cos i. \qquad (7)$$

Por la fórmula (7) vemos que la iluminación producida por una fuente puntual es directamente proporcional a su intensidad I e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que hay desde la fuente hasta la superficie iluminada. La iluminación depende además del ángulo i que forman los rayos con la superficie: cuanto más inclinados inciden los rayos menor es la iluminación que producen.

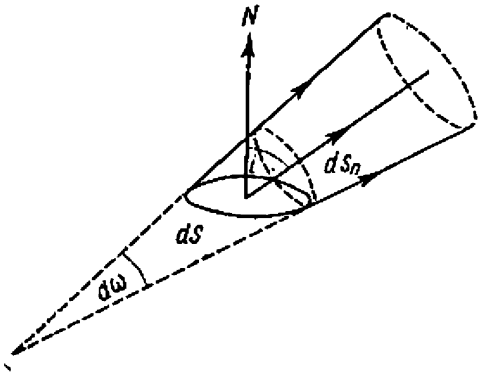

Fig. 206. Esquema para hallar la luminancia.

§ 303. Luminancia (brillo fotométrico). Como dijimos en el párrafo anterior, la luminosidad está determinada por el flujo luminoso que emite una superficie luminosa *en todas las direcciones.* Estudiemos ahora el caso del flujo luminoso dF emitido por un elemento de superficie dS (fig. 206), *en una dirección que forma un ángulo i con la normal, dentro de los límites de un ángulo sólido infinitamente pequeño* $d\omega$. Este flujo es proporcional al ángulo sólido $d\omega$ y depende de la magnitud de la superficie dS, del ángulo i y de la intensidad luminosa de la superficie. Lambert lanzó la hipótesis de que la magnitud del flujo dF viene determinada por las dimensiones visibles de la superficie dS, es decir, por las dimensiones de su proyección dS_n sobre un plano perpendicular a la dirección en que se propaga el flujo. Esta hipótesis se basa en el hecho de que si una esfera luminosa uniforme, por ejemplo, el Sol, se mira a través de niebla o de un vidrio ahumado, nos parece un disco plano de igual brillantez. Como $dS_n = dS \cos i$, suponemos que

$$dF = B \cos i \, dS \, d\omega. \qquad (1)$$

La magnitud B depende de las propiedades de la superficie luminosa y se llama *luminancia* o *brillo fotométrico*. Si la hipótesis de que el flujo dF es proporcional a las dimensiones visibles de la superficie dS es justa, la luminancia B deberá ser una magnitud constante, independiente del ángulo i, para la superficie luminosa dada. En el caso contrario el valor de dF en función de i no dependerá solamente del factor cos i de la fórmula (1), sino también de la luminancia B que representará de por sí una determinada función de i. La experiencia demuestra que para muchos cuerpos luminosos de por sí (por ejemplo, para los cuerpos sólidos incandescentes que tienen la superficie rugosa) el flujo dF es proporcional al cos i con un grado de aproximación suficiente y que la luminancia B es constante. De estos cuerpos se dice que cumplen la *ley de Lambert*; también se conocen con el nombre *de radiadores de coseno*.

En general hay que considerar la luminancia B en función del ángulo i, con la particularidad de que esta dependencia tiene un carácter determinado en cada caso. Cuando la luminosidad de las superficies se debe a la dispersión de la luz, la luminancia no suele ser constante. Unicamente cuando se trata de superficies mate, como son, por ejemplo, la de la porcelana sin esmaltar, la del papel de dibujo y la de la nieve recién caída, B hasta un grado de aproximación suficiente, no depende del ángulo i. La superficie que dispersa la luz cumpliendo exactamente la correlación (1) se llama difusor perfecto. Para la mayoría de las superficies reales B no sólo depende de las propiedades de la propia superficie, sino también de la dirección de la luz incidente. En todos aquellos casos en que la superficie «brilla» más o menos, la luminancia B es mayor en las direcciones próximas a la de la reflexión especular que en las demás (compáreso con lo dicho en el § 251).

La fórmula (1) da el flujo dF que emite el elemento dS de la superficie luminosa dentro de los límites del ángulo sólido infinitamente pequeño $d\omega$. Para obtener el flujo dF emitido por el elemento de superficie dS comprendido entre los límites del ángulo sólido finito Ω no hay más que integrar la expresión (1):

$$dF = dS \int_{\Omega} B \cos i \, d\omega. \tag{2}$$

Si la luminancia B de la superficie dada es constante se puede sacar del signo integral, y entonces:

$$dF = B \, dS \int_{\Omega} \cos i \, d\omega. \tag{2a}$$

Establezcamos la relación que existe entre la luminancia de una superficie y su luminosidad. Para esto vamos a examinar el flujo dF que emite la superficie dS en todas las direcciones. Tomemos un

sistema de coordenadas polares cuyo eje OZ (fig. 207) sea perpendicular a la superficie dS. En coordenadas polares el ángulo sólido $d\omega = \operatorname{sen} i\, di\, d\varphi$. Por lo tanto, el flujo dF, procedente de la superficie dS, comprendido dentro de los límites del ángulo sólido infinitamente pequeño $d\omega$, se expresará de la forma siguiente:

$$dF = B \cos i \operatorname{sen} i\, di\, d\varphi\, dS. \qquad (3)$$

Para obtener el flujo total dF emitido en todas las direcciones hay que integrar la expresión (3) según el ángulo φ desde 0 hasta 2π, y según el ángulo i desde 0 hasta $\pi/2$:

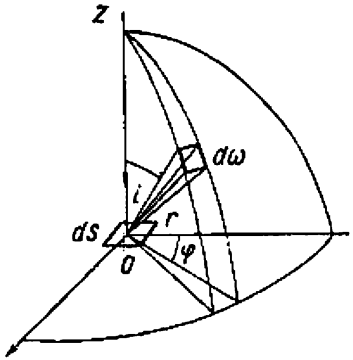

Fig. 207. Esquema para calcular el flujo luminoso total procedente de una superficie de luminancia dada.

$$dF = B\, dS \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{i=0}^{\pi/2} \cos i \operatorname{sen} i\, di\, d\varphi =$$

$$= 2\pi B\, dS \int_{0}^{\pi/2} \cos i \operatorname{sen} i\, di.$$

Y como

$$\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} i \cos i\, di = \frac{1}{2},$$

tendremos que

$$dF = \pi B\, dS. \qquad (3a)$$

De acuerdo con lo dicho en el § 302, la luminosidad de esta misma superficie R es igual a dF/dS, de donde

$$R = \frac{dF}{dS} = \pi B$$

o

$$B = \frac{1}{\pi} R. \qquad (4)$$

Esta correlación sólo es justa si el radiador cumple la ley de Lambert (radiador de coseno), puesto que únicamente en este caso la luminancia B será constante y podrá ser sacada del signo integral en la expresión (2). De esta forma *la luminancia de la superficie de un radiador que cumple la ley de Lambert es π veces menor que su luminosidad.*

Si la luz que da una superficie se debe a la difusión de la radiación que incide sobre ella, según lo expuesto en el § 302, su luminosidad R se determina partiendo de su iluminación E por medio de la expresión

$$R = kE,$$

donde k es el coeficiente de difusión.

Aprovechando la correlación (4) podemos sustituir la luminosidad R por la luminancia B y entonces obtenemos

$$B = \frac{k}{\pi} E. \tag{5}$$

Por la fórmula (5) vemos que la luminancia de una superficie cuya luminosidad proviene de la luz que difunde es proporcional a su iluminación y al coeficiente de difusión.

Establezcamos ahora la relación que existe entre la luminosidad y la intensidad de la luz. Para esto escribiremos la expresión (1) de la forma:

$$B = \frac{dF}{dS \cos i \, d\omega}, \tag{6}$$

pero por la igualdad (1) del §.302

$$\frac{dF}{d\omega} = I,$$

donde I es la intensidad de la luz, de donde obtenemos que

$$B = \frac{I}{dS \cos i}. \tag{6a}$$

De esta expresión se deduce lo siguiente: *La luminancia de una superficie es igual a la intensidad luminosa que emite en dirección normal* ($i = 0$) *por unidad de superficie.*

Finalmente estudiaremos el caso de la iluminación producida por un elemento de superficie dS, de luminancia B, sobre otro elemento de superficie dS' que se encuentra a una distancia r de él. Supongamos que la dirección r forma

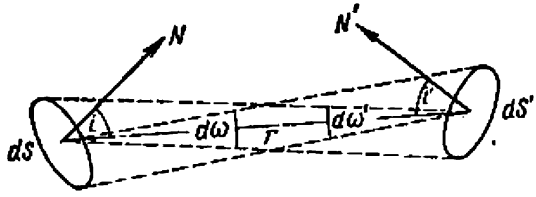

Fig. 208. Esquema para el cálculo de la iluminación que produce una superficie de luminancia dada.

con las respectivas normales a los elementos de superficie dS y dS' (fig. 208) los ángulos i e i'. Sobre la superficie dS' incide el flujo luminoso que emite el elemento dS dentro de los límites del ángulo sólido $d\omega$, bajo el cual se ve la superficie elemental dS' desde el punto en que se encuentra la superficie dS. Según (1), este flujo será

$$dF = B \, dS \cos i \, d\omega,$$

pero $d\omega = \dfrac{dS' \cos i'}{r^2}$, de donde se deduce que

$$dF = B \frac{dS \, dS' \cos i \cos i'}{r^2}. \tag{7}$$

Esta expresión puede transformarse teniendo en cuenta que $\frac{dS \cos i}{r^2}$ es el ángulo sólido $d\omega'$ bajo el cual se ve la superficie elemental dS desde el sitio en que se halla la dS'. De donde obtenemos que

$$dF = B\, dS'\, d\omega' \cos i'.$$

Y la iluminación de la superficie dS' que buscamos será:

$$E' = \frac{dF}{dS'} = B\, d\omega' \cos i'. \qquad (8)$$

Es decir, la iluminación que produce una superficie luminosa elemental es proporcional a su luminancia y al ángulo sólido bajo el cual se ve esta superficie elemental desde el punto cuya iluminación se determina.

Comparando este resultado con la fórmula (7) del § 302, vemos que la iluminación producida por una superficie luminosa es proporcional a su luminancia, mientras que la iluminación que produce una fuente luminosa puntual es proporcional a su intensidad luminosa.

§ 304. Unidades de medición de las magnitudes fotométricas. La parte de la Física que se ocupa de las mediciones luminosas y de las caracterísiticas cuantitativas de los fenómenos luminosos se llama *fotometría*.

Como unidad fotométrica fundamental se toma la unidad de intensidad luminosa. Esta unidad ha tenido en distintas épocas diferentes determinaciones. Al principio se tomó como unidad la intensidad luminosa que emitía en una dirección determinada una bujía de cera. Esta bujía estaba sujeta a normas en las cuales se indicaba el material y el diámetro de la bujía y la longitud del pabilo. Después la llama de la bujía fue sustituida por una lámpara de diseño especial, en la cual ardía amilacetato puro. Más tarde, en lugar de la lámpara de mecha, se tomó la eléctrica.

En el año 1948 se introdujo un nuevo patrón lumínico que se puede reproducir. Este patrón tiene la forma de cuerpo negro (véase el § 308) radiante a la temperatura de solidificación del platino (2 046, 6° K). En la URSS se hizo un patrón de este tipo en el laboratorio fotométrico del Instituto Central de investigación científica de metrología, bajo la dirección del profesor P. M. Tijodéiev. Como unidad de intensidad luminosa se toma la *candela* (cd) igual a 1/60 de la intensidad luminosa emitida en dirección normal por 1 cm^2 del patrón antedicho. En 1960 esta unidad fue adoptada como unidad de intensidad luminosa del sistema internacional de unidades con el nombre de «*candela*» o «*bujía*».

Las unidades de medición de las demás magnitudes fotométricas se establecen sobre la base de sus relaciones normales con la intensidad luminosa.

La unidad de flujo luminoso se estableció basándose en la correlación (1) del § 302:

$$dF = I\, d\omega.$$

Como unidad del flujo luminoso se toma el *lumen* (lm), que es igual al flujo emitido dentro de los límites de un ángulo sólido unidad (1 estereorradián) por un foco puntual uniforme que tenga la intensidad de 1 cd.

El lumen puede determinarse directamente por medio del patrón de intensidad luminosa. En este caso puede definirse de la forma siguiente: el lumen es igual al flujo luminoso que emite el cuerpo negro a la temperatura de solidificación del platino por un área de $5{,}305 \cdot 10^{-3}$ cm^2.

El flujo total que emite un foco uniforme cuya intensidad luminosa es de 1 cd, según la fórmula (2a) del § 302, es igual a

$$F = 4\pi I = 4\pi \text{ lm} \cong 12{,}566 \text{ lm}.$$

La unidad de iluminación se toma fundándose en la correlación (5) del § 302:

$$E = \frac{dF}{dS}.$$

En el sistema internacional de unidades se toma como unidad de iluminación el *lux* (lx), que es igual a la iluminación que produce un flujo de 1 lm uniformemente distribuido sobre una superficie de 1 m^2. Además de lux se emplea otra unidad de iluminación, el *fotio* (ph), que es igual a la iluminación que produce el flujo de 1 lm uniformemente distribuido sobre la superficie de 1 cm^2. Es evidente que entre el lux y el fotio existe la correlación:

$$1 \text{ lm} = 10^{-4} \text{ ph}. \qquad (1)$$

La luminosidad determinada por la correlación $R = dF/dS$ también se mide en lux.

Para establecer la unidad de luminancia se parte de la correlación (6a) del § 303:

$$B = \frac{I}{dS \cdot \cos i}.$$

Basándose en esta correlación, en el sistema internacional de unidades se toma como unidad de luminancia el *nit* que es igual a la luminancia de una superficie plana uniformemente luminosa que en dirección perpendicular a sí misma ($i = 0$) emite luz con intensidad de 1 cd por 1 m^2. Esta unidad se designa también por cd/m^2. Además del nit se utiliza también otra unidad de luminancia llamada *stilb* (abreviado sb) que es la luminancia de una superficie plana uniformemente luminosa que en dirección perpendicular a sí misma emite luz con intensidad de 1 cd por 1 cm^2. Es natural que entre el nit y el stilb existe la relación:

$$1 \text{ nit} = 10^{-4} \text{ sb}.$$

Para medir la luminancia (brillo) de las superficies difusoras se emplea a veces otra unidad llamada *apostilb* que es igual a la luminancia de una superficie perfectamente difusora cuya iluminación es igual a 1 lux. Se entiende por perfectamente difusora la superficie que para todas las longitudes de onda y en todas las direcciones tiene un coeficiente de difusión $k = 1$.

Según la fórmula (5) del § 303, la luminancia de una superficie difusora es igual a

$$B = \frac{k}{\pi} E,$$

siendo E la iluminación. Si medimos E en fotios y B en stilb, y tenemos en cuenta que $\frac{1}{\pi} \cong 0{,}318$, obtenemos:

$$B\,(\text{stilb}) = 0{,}318kE\ (\text{fotios}).$$

De aquí se deduce que la luminancia de una superficie perfectamente difusora ($k = 1$) sobre la que el flujo incidente produce una iluminación de 1 lux = $= 10^{-4}$ ph es igual a

$$B = 0{,}318 \cdot 10^{-4}\ \text{sb} = 3{,}18 \cdot 10^{-5}\ \text{sb}.$$

Junto a las unidades fotométricas de intensidad luminosa, iluminación, luminosidad y luminancia, que acabamos de estudiar, pueden señalarse las magnitudes energéticas análogas a ellas que se obtienen partiendo de las mismas correlaciones aunque sustituyendo el flujo luminoso por el flujo radiante E. Estas magnitudes pueden medirse en unidades absolutas, por ejemplo, la irradiancia («iluminación energética») se mide en erg/s·cm² o W/cm². En la tabla VIII se da una relación de las magnitudes fotométricas y energéticas principales con sus correspondientes unidades de medición.

Tabla VIII

Magnitud	Unidad de medición	
	fotométrica	energética
Flujo luminoso F	lumen	$\frac{\text{erg}}{\text{s}}$; W
Función de distribución e_λ	—	$\frac{\text{erg}}{\text{s}\cdot\text{cm}}$; $\frac{\text{W}}{\text{cm}}$
Intensidad de la luz I	candela, bujía	$\frac{\text{erg}}{\text{s}\cdot\text{sr}}$; $\frac{\text{W}}{\text{sr}}$
Iluminación E	lux, fotio	$\frac{\text{erg}}{\text{s}\cdot\text{cm}^2}$; $\frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$
Luminosidad R	lux, fotio	$\frac{\text{erg}}{\text{s}\cdot\text{cm}^2}$; $\frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$
Luminancia B	nit, stilb	$\frac{\text{erg}}{\text{s}\cdot\text{sr}\cdot\text{cm}^2}$; $\frac{\text{W}}{\text{sr}\cdot\text{cm}^2}$

En la tabla IX se dan los valores aproximados de la iluminación y de la luminancia para una serie de casos frecuentes.

A un flujo luminoso de 1 lm pueden corresponderle potencias diferentes según cual sea la composición espectral de la luz. Pero si por

Tabla IX

Iluminación	Lux	Luminancia	Stilb
Bajo los rayos directos del Sol (en verano)	10^5	De la superficie del Sol a través de la atmósfera	$1{,}47 \cdot 10^6$
En sitio abierto, de día, pero sin Sol	$\sim 10^3$	Del cráter de un arco eléctrico	$1{,}5 \cdot 10^4$
De día en una habitación	$\sim 10^2$	Del filamento de wolframio de una lámpara de incandescencia llena de gas	$4{,}5 \cdot 10^2$
Necesaria para leer	$3 \cdot 10$	Del cielo despejado a 75° del Sol	$1{,}5 \cdot 10^{-1}$
Necesaria para trabajos de precisión	10^2	De la superficie de la Luna a través de la atmósfera	$2{,}5 \cdot 10^{-1}$
Con Luna llena	$2{,}5 \cdot 10^{-2}$	De una superficie blanca bajo los rayos directos del Sol	3
De estrellas de 8ª magnitud	$1{,}4 \cdot 10^{-3}$	De una superficie blanca con iluminación de 30 lux	10^{-3}

convenio se trata de una luz cuya composición espectral está perfectamente establecida, al flujo de un lumen le corresponderá una potencia determinada y, por lo tanto, será posible relacionar entre sí las unidades fotométricas y energéticas. Generalmente se toma la luz correspondiente a un estrecho intervalo de longitudes de onda próximas a $\lambda = 0{,}555\ \mu$, es decir, al intervalo en que la sensibilidad del ojo humano es máxima. En esta zona, a un flujo de 1 lm le corresponde una potencia de 0,00155 W:

$$1\ \text{lm}\,(\lambda = 0{,}555\mu) = 0{,}00155\ \text{W}. \qquad (2)$$

A un flujo de 1 lm cuya composición espectral sea otra cualquiera le corresponderá una potencia mayor. Por esto la magnitud 0,00155 W/lm se llama *equivalente mecánico mínimo de la luz*. De la relación (2) se deduce:

$$1W\ (\lambda = 0{,}555\mu) = 650\ \text{lm}. \qquad (3)$$

Para la luz monocromática de cualquier otra longitud de onda se cumple la correlación

$$1W(\lambda) = 650 \cdot V_\lambda \text{ lm}. \tag{3a}$$

donde V_λ es el valor de la eficacia luminosa monocromática para esta longitud de onda.

Examinemos el siguiente *ejemplo*:

A una altura $h = 4$ m sobre un plano se encuentra una fuente luminosa puntual uniforme de $I = 100$ cd. Hallar la iluminación del plano en un punto C que se encuentra a la distancia x de la base del segmento h (fig. 209).

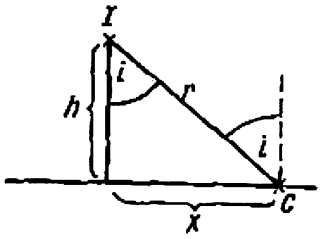

Fig. 209. Esquema para calcular la iluminación que produce la fuente puntual I.

Solución. Por la fórmula (7) del § 302 la iluminación E en el punto C es

$$E = \frac{I \cos i}{r^2}, \tag{4}$$

siendo r la distancia desde la fuente luminosa hasta el punto C. Pero por el dibujo vemos que

$$r = \sqrt{h^2 + x^2}, \quad \cos i = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}},$$

de donde, poniendo estos valores en (4), tendremos:

$$E = \frac{Ih}{(h^2 + x^2)^{3/2}}. \tag{5}$$

Expresando I en bujías internacionales o candelas y h y x en metros obtendremos E en lux. Debajo mismo de la fuente luminosa ($x = 0$)

$$E = \frac{100}{16} \text{ lx} = 6{,}2 \text{ lx}$$

Si $x \gg h$, en la fórmula (5) se puede despreciar h en comparación con x, y entonces:

$$E \cong \frac{Ih}{x^3}.$$

De este ejemplo se deduce que a una distancia de varios metros de una fuente luminosa puntual cuya intensidad sea de 100 cd la iluminación será mucho menor que la necesaria para poder leer (30 lx). Sin embargo todos sabemos que en una habitación alumbrada por una lámpara de 100 bujías se puede leer perfectamente a distancias de varios metros de olla. Esto se explica por el hecho de que dentro de los locales la luz sufre múltiples reflexiones en el techo, en las paredes y en el suelo, lo que da lugar a un aumento de la iluminación total (véase el § 306).

§ 305. Percepción de la luz. La medición de las magnitudes fotométricas se realiza por medio de observaciones visuales (fotometría visual) o por medio de aparatos perceptores (*fotometría objetiva*). Por esto empezaremos por estudiar el ojo como aparato perceptor de la luz y luego nos ocuparemos de los aparatos objetivos que también sirven para este fin.

La sensación visual subjetiva se produce como resultado de la excitación del nervio óptico provocada por la iluminación de la retina. En la fig. 210 puede verse el corte longitudinal del ojo humano, donde *A es la córnea*, transparente, *L es el cristalino*, *i es el iris R, la retina*, *y O, el nervio óptico*. El espacio comprendido entre la córnea y el cristalino está lleno de un *líquido llamado humor acuoso*, y entre el cristalino y la retina se encuentra el *humor vítreo*. El iris tiene un orificio

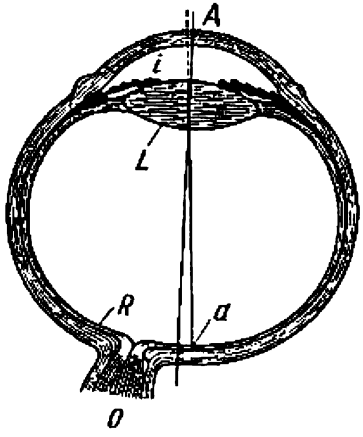

Fig. 210. Corte longitudinal del ojo humano.

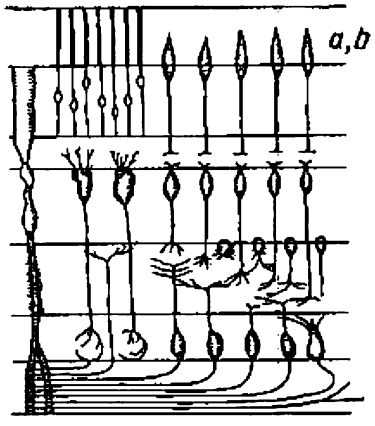

Fig. 211. Corte de la retina del ojo.

llamado pupila. Las dimensiones de la pupila pueden variar y regular de esta forma la magnitud del flujo luminoso que llega al interior del ojo.

La retina, cuya estructura es muy complicada, es una especie de ramificación de las fibras del nervio óptico. El sistema óptico del ojo, que estudiaremos más adelante (§ 325), produce sobre la retina una imagen real de los objetos que se encuentran fuera del ojo. La intensidad de la sensación viene determinada por la *iluminación* que produce sobre la retina el flujo luminoso que llega al ojo. En la fig. 211 se reproduce un corte esquemático de la retina. Los elementos sensibles a la luz son los llamados *conos y bastoncillos* (*a*, *b*). El número de conos que tiene el ojo humano alcanza 7 millones y el de bastoncillos más de 100 millones. La parte periférica de la retina sólo tiene bastoncillos. Los conos se encuentran principalmente en la parte central de la retina. Casi al lado del nervio óptico se encuentra la *mancha amarilla con la fóvea central* (*a* en la fig. 210). En la zona de la fóvea central no hay más que conos. El punto por el cual el nervio óptico entra en el ojo no percibe la luz (*punto ciego*).

El papel de los bastones en la sensación visual es distinto del que desempeñan los conos. Los bastoncillos son mucho más sensibles que

los conos pero no permiten distinguir los colores. La sensación de los colores se debe exclusivamente a la excitación de los conos. Además, las partes de la retina que contienen conos pueden distinguir mucho más detalles que las zonas que solamente tienen bastoncillos. A esto se debe que el hombre tenga dos tipos de visión: uno, determinado por la excitación de los conos, que actúa cuando la iluminación es bastante intensa y que permite distinguir los colores y percibir gran número de detalles. Este tipo de visión se llama *foveal* o *diurna*. El otro tipo está relacionado con la exitación de los bastoncillos y se llama *visión nocturna*. Como quiera que los bastoncillos están situados principalmente en la periferia de la retina, este tipo de visión se llama también *periférica*. Por lo general actúan simultáneamente, en mayor o menor grado, ambas visiones, pero cuando la iluminación es muy pequeña trabaja exclusivamente la visión nocturna.

Al pasar de un sitio intensamente iluminado a otro que lo esté débilmente los bastones no alcanzan al instante su máxima sensibilidad, por lo que la transición de una a otra visión se realiza relativamente despacio. Es bien conocido el hecho de que cuando de día se entra de la calle a un local mal alumbrado no se ve nada al principio. Después, a medida que el ojo «se acostumbra» se van distinguiendo los objetos. El proceso que hace que empiece a actuar la visión nocturna se llama *adaptación*. Para que el ojo se adapte por completo tiene que permanecer en la oscuridad 30-40 min. La sensibilidad del ojo totalmente adaptado es muy grande: el ojo es capaz de reaccionar en presencia de flujos de energía luminosa del orden de $4 \cdot 10^{-10}$ erg/s. Para los rayos verdes esto corresponde a una iluminación de la pupila del orden de $5 \cdot 10^{-10}$ lx. El flujo luminoso mínimo capaz de producir sensación visual se llama *umbral de visibilidad*. Evidentemente sólo tiene sentido hablar del umbral de visibilidad del ojo adaptado. Con la visión diurna el ojo puede percibir flujos de hasta 200 erg/s. Cuando la potencia luminosa es muy grande se produce una sensación dolorosa y hasta pueden ocurrir aficciones en la retina. Estas últimas pueden originarse también cuando se pasa demasiado rápidamente de la percepción de un flujo débil a la de otro muy intenso, aunque este último no supere el límite que, en general, el ojo puede soportar sin sentir dolor.

La luminancia (brillo) subjetiva de objetos visibles bajo un ángulo de vista finito, como veremos más adelante (§ 326), depende de su luminancia fotométrica.

Con la visión nocturna las luces de diferentes longitudes de onda producen una misma sensación de color gris azulado. Pero la sensibilidad de la visión nocturna no es la misma para las diferentes longitudes de onda. La visión nocturna se puede caracterizar por una sensibilidad relativa diferente de la sensibilidad relativa de la visión diurna. La sensibilidad relativa de la visión nocturna es la representada por la curva *2* de la fig. 200. En comparación con el

máximo de la curva *1*, que representa la sensibilidad relativa de la visión diurna, el de la curva *2* está desplazado hacia la zona de las ondas más cortas; este máximo se encuentra cerca de los 0,510 μ.

El conocimiento de estas peculiaridades del ojo humano tiene gran importancia cuando éste se emplea en calidad de aparato perceptor en las mediciones fotométricas.

El paso de la visión diurna a la nocturna y las particularidades características de esta última se pueden demostrar con relativa facilidad. Para esto, en un local oscuro y con un mismo aparato se proyectan sobre una pantalla dos semicírculos contiguos de diferentes colores, por ejemplo, uno rojo y otro azul. Los colores de estos semicírculos deben elegirse de forma que parezca que tienen el mismo brillo. Después hay que ir disminuyendo paulatinamente el flujo luminoso que sirve para proyectar ambas imágenes. Esto se puede conseguir colocando delante del objetivo del proyector, pero antes de que los haces se dividan, dos nicoles. Haciendo girar poco a poco estos nicoles desde la posición en que son «paralelos» a la que son «cruzados» las potencias de los flujos que producen las imágenes roja y azul se van debilitando igual número de veces. Sin embargo, cuando la iluminación es muy débil, el semicírculo azul parecerá más brillante que el rojo. Y si se siguen debilitando los flujos, el semicírculo rojo desaparecerá antes que el azul, con la particularidad de que este último perderá su color y parecerá grisáceo. Esto experimento demuestra claramente cómo desaparece la sensación del color cuando trabaja exclusivamente la visión nocturna y cómo ésta es más sensible a los rayos azules que a los rojos.

Entre los aparatos perceptores objetivos señalaremos los basados en los siguientes efectos: fotoeléctrico, termoeléctrico, fotográfico y térmico.

Los aparatos basados en el efecto fotoeléctrico (§ 332) se llaman *células fotoeléctricas*. Hay células fotoeléctricas de vacío (tubos fotoeléctricos) y sólidas. Bajo la acción de la luz incidente, en el circuito en que está incluida la célula se produce corriente eléctrica. La intensidad de la corriente producida viene determinada por el *flujo luminoso* que cae sobre la célula fotoeléctrica. En las células fotoeléctricas de vacío existe una proporción directa entre la intensidad de la corriente de saturación y la potencia de la luz (de longitud de onda dada).

Las células fotoeléctricas sólidas suelen ser de dos tipos. Al primero pertenecen las *células fotoconductoras*, llamadas también *fotorresistivas* (selenio, sulfuros de talio, etc.). Cuando estas células son iluminadas disminuye su resistencia óhmica. La lámina de la sustancia fotoconductora se conecta en serie con un generador de fuerza electromotriz $\mathscr{E}$. En la oscuridad por el circuito circula la llamada corriente oscura i_0; cuando hay luz a la corriente anterior se suma la corriente fotoeléctrica i_f, que es proporcional a la raíz cuadrada del flujo luminoso $\mathscr{F}$. Por lo tanto, la corriente total

$$i = i_0 + i_f = (\sigma_0 + \beta \sqrt{\mathscr{F}})\, \mathscr{E},$$

donde σ_0 es la conductividad oscura de la célula fotoeléctrica sólida. El segundo tipo de célula fotoeléctrica sólida es la *fotovoltaica* o *de barrera*. Al iluminarse la célula fotovoltaica se produce corriente en el circuito, de que ésta forma parte, sin necesidad de ninguna fuerza electromotriz complementaria $\mathcal{E}$. De ejemplo de célula fotovoltaica puede servir la de cobre-óxido cuproso, formada por una capa delgada de óxido cuproso Cu_2O que recubre a una placa de cobre (véase el § 335). Las células fotoeléctricas tienen una marcada selectividad, es decir, no tienen la misma sensibilidad para luces de diferentes longitudes de onda. La curva de sensibilidad depende de la naturaleza de la capa sensible y varía mucho para diferentes capas. La sensibilidad de todas las células fotoeléctricas es limitada por la parte de las grandes longitudes de onda. Las células fotoeléctricas de vacío con superficies de cesio puro son sensibles hasta $\lambda = 0{,}63\ \mu$; las que tienen cátodo de plata y óxido de cesio lo son hasta $\lambda = 1{,}2\ \mu$; las sólidas de sulfuro de talio (talofidos), hasta $\lambda = 1{,}4\ \mu$ y las de seleniuro y telururo de plomo, hasta $\lambda = 5{,}5\ \mu$.

Las células fotoeléctricas de vacío carecen prácticamente de inercia y por esto pueden utilizarse para registrar impulsos sumamonto cortos o para estudiar las variaciones que experimentan los flujos luminosos con el tiempo.

La sensibilidad de estas células fotoeléctricas es bastante grande y alcanza 100 μ A por lm. Pero la sensibilidad de las células fotoeléctricas sólidas es aún mayor y alcanza 500 μ A/lm. El umbral de sensibilidad de los talofidos llega a $3 \cdot 10^{-8}$—$6 \cdot 10^{-9}$ W.

La sensibilidad de los aparatos fotoeléctricos se aumenta en la actualidad utilizando esquemas de amplificación por medio de lámparas electrónicas. Para intensificar la corriente fotoeléctrica también se emplea el principio propuesto por G. A. Kubetski, basado en el fenómeno de la emisión electrónica secundaria

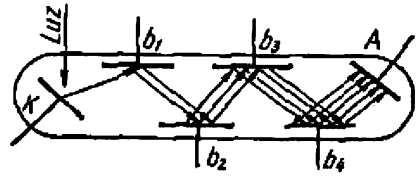

Fig 212. Multiplicador fotoeléctrico.

(t. II, § 173). En la fig. 212 se reproduce el esquema de un multiplicador fotoeléctrico (MFE), cuya construcción se basa en dicho principio, donde K es el cátodo fotosensible, del que bajo la acción de la luz incidente se desprenden fotoelectrones. Estos electrones, influidos por el campo eléctrico que se aplica, se aceleran hacia el electrodo b_1. Gracias a la emisión electrónica secundaria, del electrodo b_1 se desprenden más electrones que inciden sobre él. Estos últimos electrones vuelven a acelerarse en dirección al electrodo b_2, del cual se desprenden aún más electrones, y así sucesivamente. En resumidas cuentas, al ánodo A

llega un número de electrones mucho mayor que el que se desprendió del cátodo K por la acción de la luz incidente, y en el circuito en que está conectado el MFE surge una corriente cuya intensidad es suficiente para poder ser medida con facilidad. La sensibilidad de los MFE modernos alcanza varios amperios por lumen.

Los aparatos termoeléctricos fueron descritos en el t. II, § 170. En ellos la corriente eléctrica se produce como resultado del calentamiento de la soldadura y es proporcional a la potencia de la radiación dentro de unos límites amplios. Estos aparatos tienen la ventaja de que si las soldaduras están bien ennegrecidas no presentan selectividad y, *en principio, pueden servir para medir flujos* de cualquiera longitud de onda. Pero se diferencian de las células fotoeléctricas por tener bastante inercia.

Las placas fotográficas también se utilizan mucho para registrar y medir flujos luminosos. El ennegrecimiento de las placas fotográficas *depende de la iluminación*. Un mismo flujo puede producir ennegrecimientos bastante distintos según sea la superficie en que se distribuye. Las placas fotográficas son *de acción integrante*, puesto que al aumentar el tiempo de iluminación aumenta el ennegrecimiento. Esta propiedad hace posible descubrir con placas fotográficas flujos de potencia extraordinariamente pequeña, siempre que puedan actuar sobre ellas durante bastante tiempo. Los métodos fotográficos modernos se utilizan para registrar flujos luminosos cuyas longitudes de onda pueden oscilar desde las más cortas hasta aproximadamente 1,2 μ.

Los métodos térmicos se basan en los fenómenos secundarios que tienen lugar como resultado del calentamiento producido por la absorción del flujo luminoso. Recientemente estos métodos han sido perfeccionados eficazmente por los físicos soviéticos.

V. I. Veinguérov ha elaborado un procedimiento para registrar la radiación por medio de la dilatación térmica de los cuerpos. Para ello, sobre una película muy fina de cuarzo fundido se extiende una capa de bismuto metálico ennegrecido. Esta doble película se suspende en el vacío. Cuando sobre ella incide una radiación se calienta un poco y, debido a la gran diferencia que existe entre los coeficientes de dilatación del cuarzo fundido y del bismuto, se dobla. Esta dobladura puede observarse directamente al microscopio o por la desviación que produce en un rayo que se refleja en el extremo de la película.

Otro procedimiento térmico se funda en la variación de la resistencia óhmica de una laminilla metálica cuando se calienta por absorción de la luz. Este procedimiento, con el nombre de bolométrico, se utilizó en el siglo pasado para registrar los rayos infrarrojos, pero después cayó en olvido por poco sensible. Pero últimamente B. P. Kóziriev lo ha perfeccionado hasta tal punto que sus cualidades no desmerecen ahora de las de los otros procedimientos. El apa-

rato que se emplea consiste en una cinta finísima de papel de oro ennegrecido que se suspende en el vacío. La variación de la resistencia óhmica de esta cinta se mide por el procedimiento del puente de Wheatstone (t. II, § 167), amplificando posteriormente la corriente. Como la masa de la cinta es muy pequeña, la inercia del aparato es insignificante.

Las radiaciones infrarrojas se pueden registrar también por medio de aparatos basados en el *efecto óptico-acústico*. Este efecto consiste en lo siguiente: sobre un recipiente cerrado que contiene gas incide una radiación que es interrumpida (por un disco giratorio, por ejemplo) con frecuencia acústica. Si el gas absorbe la radiación, su presión aumentará periódicamente (debido al calentamiento) con la misma frecuencia con que se interrumpe la luz y en él se producirán vibraciones acústicas. M. L. Veinguérov construyó un aparato óptico-acústico en el que las vibraciones del gas se comunican con una membrana microfónica y después se perciben por medio de un teléfono. S. M. Luchin propuso, para evitar la selectividad, que la radiación fuera absorbida por una lámina recubierta de negro de humo. El calentamiento de esta lámina se transmite al gas y produce en él las vibraciones acústicas. En este principio se basa el *indicador neumático de Goley* que consiste en una cámara pequeña provista de un canal minúsculo que contiene gas. Este canal está cerrado por un lado con una película ennegrecida y por el otro con la membrana del indicador. Las vibraciones de la membrana se registran por procedimiento interferencial. El umbral de sensibilidad del indicador neumático alcanza a 10^{-10} W.

En la actualidad también se emplean para registrar las radiaciones infrarrojas los llamados *termistores*. Estos son cuerpos cuya resistencia óhmica varía mucho cuando se calientan aunque sea muy débilmente. En calidad de termistores se utilizan el Ag_2S, el PbSe, el UO_2 y algunos otros compuestos. El umbral de sensibilidad de los termistores llega a 10^{-9} W.

§ 306. Medición de las magnitudes fotométricas. El ojo humano, lo mismo que los demás órganos sensoriales es incapaz de apreciar cuantitativamente una excitación, es decir, basándose en la intensidad de la sensación subjetiva no puede determinar cuántas veces es mayor un flujo luminoso que otro. Pero el ojo puede en cambio establecer con un alto grado de exactitud cuando dos campos contiguos *están igualmente iluminados*, siempre que lo estén por luz de un mismo color. Por esto todos los métodos de fotometría visual se reducen a conseguir el equilibrio de las iluminaciones que ve el ojo. En su forma más elemental este principio es el que se utiliza en el fotómetro de prisma triangular (fig. 213). Un prisma triangular blanco ABC se encuentra dentro de un tubo ennegrecido. Sus dos caras simétricas AB y AC se iluminan simultáneamente con dos

fuentes luminosas S_1 y S_2. Observando con el ojo O estas dos caras es fácil determinar las condiciones que hacen que sus iluminaciones sean iguales.

Este fotómetro permite comparar la intensidad de la luz de fuentes distintas. Si las fuentes tienen dimensiones pequeñas y se encuentran situadas a bastante distancia del prisma se pueden considerar puntuales.

En este caso, según la fórmula (7) del § 302, la iluminación de las caras AB y AC será:

$$E_1 = \frac{I_1}{r_1^2} \cos i, \qquad E_2 = \frac{I_2}{r_2^2} \cos i, \tag{1}$$

donde I_1 e I_2 son las intensidades de la luz correspondientes respectivamente a las fuentes S_1 y S_2; r_1 y r_2 son las distancias a que estas fuentes se encuentran del prisma, e i es el ángulo de incidencia de

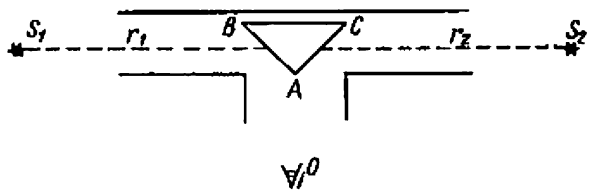

Fig. 213. Fotómetro de prisma triangular.

los rayos sobre las caras del prisma (cuando las fuentes luminosas están situadas simétricamente sus rayos inciden sobre las caras AB y AC formando ángulos iguales). Variando una de las distancias, por ejemplo, la r_2, se pueden equilibrar las iluminaciones: $E_1 = E_2$ y entonces, de la correlación (1), obtenemos:

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2.$$

De esta forma la relación que existe entre las intensidades de la luz de dos fuentes se puede medir por la relación que hay entre las distancias r_1 y r_2. Si se conoce la intensidad de la luz de una de las fuentes, la intensidad de la otra puede considerarse medida.

La correlación (1) se cumple a condición de que la luz que incide sobre las caras AB y AC del prisma llegue directamente de las fuentes S_1 y S_2 y de que no exista luz reflejada o difundida por objetos circundantes. Por esta razón, al realizar la medición fotométrica deben colocarse superficies ennegrecidas tanto detrás como a los lados de los focos luminosos.

En los fotómetros visuales más exactos el prisma ABC se sustituye por el llamado *cubo de Lummer y Brodhum* (fig. 214). Este cubo está formado por dos prismas rectangulares de vidrio A y B,

uno de los cuales (el A) sólo tiene plana la parte central de la cara correspondiente a la hipotenusa; los bordes de esta cara se rebajan. Los prismas están unidos entre sí de tal forma que en el sitio de contacto se comportan como un cuerpo transparente homogéneo (es decir, se encuentran en «contacto óptico»). Supongamos que sobre el cubo inciden los flujos luminosos 1 y 2. El flujo 1 llega a través del cubo hasta el sitio de contacto y sale por la derecha. En aquellos sitios en que el prisma A está rebajado los rayos del flujo 1 se desvían hacia los lados. El flujo 2 atraviesa el cubo pasando por el sitio de contacto y sale hacia arriba. En los demás sitios sufre la reflexión total y sale hacia la derecha. De esta forma por la derecha salen rayos de los dos flujos, lo que permite observar simultáneamente dos campos iluminados. El esquema general de un fotómetro con cubo de Lummer-Brodhum está representado en la fig. 215, donde S_1 y S_2 son las fuentes luminosas que se miden; E es una pantalla blanca, exactamente igual por ambos lados; E' y E'' son

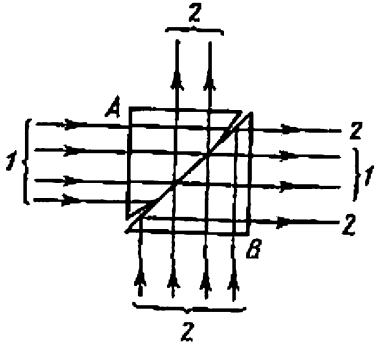

Fig. 214. Cubo de Lummer — Brodhum.

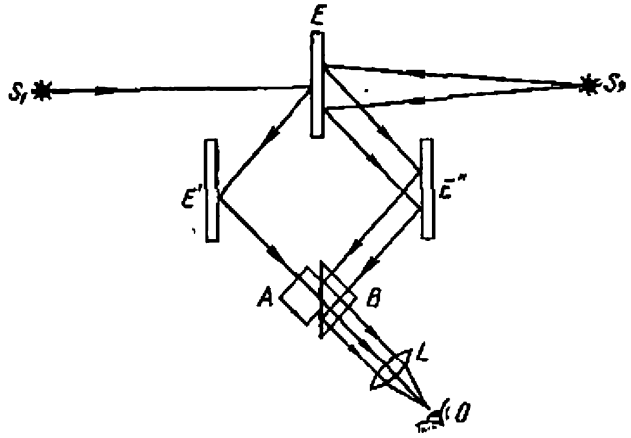

Fig. 215. Esquema de un fotómetro con cubo de Lummer — Brodhum.

otras dos pantallas blancas; AB es el cubo de Lummer-Brodhum; L una lupa, y O el ojo del observador. Cuando se realiza la observación el centro del cubo está iluminado por los rayos que llegan de la fuente S_1, mientras que su parte externa lo está por los de la fuente S_2. De esta forma el campo iluminado por una de las fuentes

rodea al iluminado por la otra. Cuando las iluminaciones no son iguales el límite entre los dos campos se destaca mucho, pero cuando son iguales este límite desaparece.

El equilibrio entre las iluminaciones no sólo puede conseguirse variando la distancia hasta las fuentes, sino también por medio de una serie de dispositivos. De estos los que más se emplean son las cuñas absorbentes y los sistemas polarizadores.

Para debilitar los haces luminosos también se utilizan rejillas (en las cuales la relación entre la superficie que ocupan los claros y la que ocupan los alambritos puede ser mayor o menor) y discos giratorios con ranuras de dimensiones determinadas. Estos últimos,

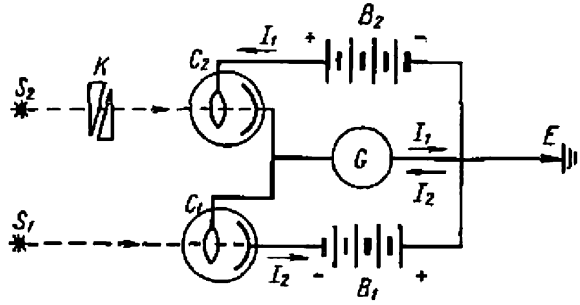

Fig. 216. Esquema de un fotómetro fotoeléctrico diferencial.

en vez de debilitar el flujo, lo que hacen en realidad es disminuir el tiempo en que éste actúa, cosa que no es totalmente equivalente.

Los métodos de fotometría visual que hemos estudiado hasta ahora no sirven para comparar flujos de colores diferentes (*fotometría heterocromática*), ya que visualmente es imposible equilibrar dos campos cuando están iluminados por flujos cuyos colores se diferencian mucho entre sí.

En la fotometría objetiva se siguen métodos en los cuales se utilizan algunos de los aparatos perceptores de luz que mencionamos en el párrafo anterior. Hay aparatos que únicamente se pueden emplear para establecer la igualdad de dos flujos. Este método se llama *diferencial* y con él no es necesario que exista proporcionalidad entre el flujo de energía luminosa que llega al aparato y las indicaciones de éste. Un esquema simple de fotómetro diferencial con dos células fotoeléctricas es el que se muestra en la fig. 216, donde S_1 y S_2 son las fuentes luminosas que se comparan; C_1 y C_2 son dos células fotoeléctricas iguales; B_1 y B_2 unas baterías, y G, un galvanómetro. El punto E del circuito se pone en comunicación con tierra. Cuando se iluminan las células fotoeléctricas pasan por ellas las corrientes I_1 e I_2 en las direcciones que señalan las flechas. Como puede verse, a través del galvanómetro pasa una corriente igual a la diferencia

$I_1 - I_2$. Supongamos que la fuente S_2 produce más intensidad que la S_1, en este caso los flujos que inciden sobre ambas células se pueden igualar intercalando una cuña óptica K en el camino que sigue el haz luminoso de la fuente S_2, con lo cual la diferencia de corrientes $I_1 - I_2$ se anulará y la aguja del galvanómetro dejará de inclinarse. Si para conseguir esto hay que debilitar k veces el flujo F_2 procedente de S_2, tendremos que

$$\frac{1}{k} F_2 = F_1,$$

donde F_1 es el flujo procedente de la fuente S_1. De aquí podemos obtener la relación que existe entre los flujos de ambas fuentes:

$$\frac{F_2}{F_1} = k.$$

En este esquema el galvanómetro se utiliza únicamente para fijar cuando es igual a cero la diferencia entre las corientes $I_1 - I_2$. El órgano medidor en este caso es la cuña. Pero la radiotecnia moderna permite crear instrumentos en los cuales por medio de un aparato indicador o registrador se puede medir directamente la relación I_1/I_2. Generalmente lo que se mide es el $\lg I_1/I_2$ («esquemas logarítmicos»).

En las células fotoeléctricas de vacío y en los pares termoeléctricos la intensidad del campo eléctrico es proporcional al flujo luminoso que incide sobre ellos, por consiguiente, pueden utilizarse para medir directamente dicho flujo. El par termoeléctrico y los aparatos térmicos de M. L. Veinguérov y B. P. Kóziriev, si están bien ennegrecidos, pueden servir también para comparar las potencias de flujos de diferentes longitudes de onda, es decir, para resolver problemas de fotometría heterocromática.

Para aumentar las corrientes que se producen en las células fotoeléctricas y en los pares termoeléctricos bajo la influencia de la iluminación se utilizan esquemas amplificadores de radiotécnica. El empleo de estos esquemas permite elevar mucho la sensibilidad de los métodos objetivos de registro y medición de los flujos luminosos.

Las células fotoeléctricas, debido a su selectividad, no pueden utilizarse directamente para resolver problemas de fotometría heterocromática. No obstante, empleando una fuente cuya distribución espectral de energía sea conocida, se puede determinar con ellas la relación entre las potencias de dos flujos luminosos de distinta longitud de onda. Para esto cada flujo se compara separadamente con la zona correspondiente del espectro de la fuente cuya distribución de energía se conoce y, después, se halla la relación que existe entre los flujos que se estudian. Como fuente con distribución espectral de energía conocida se toma una cuyas propiedades se aproximen lo más posible a las del cuerpo negro (véase el § 308).

En la práctica se presenta frecuentemente el problema de medir la iluminación de un sitio determinado, por ejemplo, de un lugar de trabajo. Los aparatos que sirven para medir la iluminación y van graduados en lux se llaman *luxímetros*. En los luxímetros más simples la iluminación que se mide se compara con la producida por una lámpara normalizada. Ultimamente se ha extendido mucho el empleo de luxímetros formados por una célula fotoeléctrica sólida unida a un galvanómetro. La escala del galvanómetro se gradúa en lux. Estos luxímetros no son ni muy exactos ni muy constantes, pero sirven perfectamente para resolver la mayoría de los problemas prácticos, y además son muy cómodos.

En luminotecnia uno de los problemas de gran importancia es la determinación de la intensidad esférica media de las fuentes luminosas.

Pero cuando la fuente luminosa no es uniforme, que es lo más ordinario en la práctica (por ejemplo, las lámparas eléctricas), la determinación de la intensidad esférica media de la luz presenta bastantes dificultades. Para esto habría que realizar numerosas mediciones de la intensidad luminosa en distintas direcciones y después hallar la media de los datos obtenidos. Estas dificultades se evitan por medio de la llamada *esfera integradora* (*«fotómetro de esfera»*), que no es más que una esfera hueca recubierta interiormente de un material blanco perfectamente difusor. La fuente que se mide se coloca dentro de esta esfera (fig. 217). Como resultado de las múltiples reflexiones que experimenta la luz, dentro de la esfera se crea una iluminación que viene determinada por la intensidad esférica media de la luz que emite dicha fuente. Para medir esta iluminación se practica un orificio en la pared de la esfera, que se cierra con un vidrio esmerilado *a*. Una lámina opaca *A* protege el vidrio esmerilado de la acción directa de los rayos de la fuente *S*.

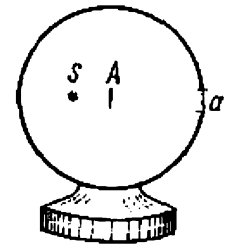

Fig. 217. Esfera integradora.

Los cálculos demuestran que la iluminación en la superficie interior de la esfera es igual a

$$E = E_0 + \frac{kI_0}{(1-k)\,r^2}, \qquad (4)$$

donde I_0 es la intensidad esférica media de la fuente luminosa, k es el coeficiente de difusión de la luz por las paredes, r es el radio de la esfera y E_0 la iluminación directa que produce la fuente.

En la esfera integradora (fig. 217) el vidrio esmerilado a está protegido por la lámina A de la iluminación directa, por esto, para él $E_0 = 0$ y

$$E = \frac{kI_0}{(1-k)\,r^2},$$

es decir, la iluminación viene determinada por la intensidad esférica media I_0. Como puede verse, en este caso E no depende del sitio en que esté colocada la fuente dentro de la esfera. Conociendo k y r basta medir la iluminación E para poder hallar la intensidad esférica media de la luz I_0.

La expresión (4) puede interesarnos en otro sentido: esta expresión demuestra que la iluminación que se obtiene como resultado de la difusión múltiple de la luz en las paredes internas de la esfera, cuando k tiene un valor próximo

a la unidad, puede superar considerablemente a la iluminación que producen los rayos directos (compárese con lo dicho en el § 304). Como ejemplo, examinemos el caso en que en el centro de una esfera se encuentra una fuente puntual de intensidad I.

En este caso tendremos que $E_0 = \frac{I}{r^2}$, y la iluminación total E será igual a:

$$E = \frac{I}{r^2} + \frac{kI}{(1-k)\,r^2} = \frac{1}{1-k}\,\frac{I}{r^2},$$

es decir, será $\frac{1}{1-k}$ veces mayor que la iluminación directa E_0. Si $k = 0{,}9$ tendremos que $\frac{1}{1-k} = 10$, es decir, la iluminación total será 10 veces mayor que la que obtendríamos de esta misma fuente si la superficie interior de la esfera estuviera ennegrecida.

§ 307. Radiación de temperatura. Como indicamos en el § 275, la emisión y la absorción se producen como resultado de las vibraciones de las partículas cargadas que hay dentro de los átomos y de las moléculas. Por esta razón solamente puede darse una explicación completa de los fenómenos de la emisión y absorción de la luz basándose en las leyes de la interacción que existe entre las partículas cargadas y la radiación. Más adelante (en el § 331) veremos que estas leyes rebasan los límites de la electrodinámica clásica y tienen carácter cuántico. No obstante, toda una serie de fenómenos relativos a la emisión y absorción de la luz pueden estudiarse sin tocar sus mecanismos, es decir, examinándolos únicamente desde el punto de vista energético (termodinámico). La parte de la Física que se ocupa de este género de estudios se llama *termodinámica de las radiaciones*.

Toda radiación va acompañada de una pérdida de energía del cuerpo que la produce. Por lo tanto, la radiación puede producirse a costa de una disminución de la energía del propio cuerpo o a costa de la energía que este último recibe del exterior.

Pongamos algunos *ejemplos*:

1. Se produce un proceso de *fotoluminiscencia* (§ 331): el cuerpo absorbe previamente luz y luego él mismo se ilumina. Durante la absorción de la luz ocurren variaciones en el cuerpo que dan lugar a que éste adquiera cierta energía, llamada energía excitatriz (activización). La radiación posterior se realiza a costa de esta energía excitatriz.

2. Un cuerpo emite luz como resultado de reacciones químicas (*quimioluminiscencia*), por ejemplo, la porcelana brilla al oxidarse lentamente con el oxígeno del aire. En este caso la energía radiante se produce a costa de la que se libera durante el proceso químico.

3. Un gas enrarecido emite luz cuando a través de él pasa una corriente eléctrica. La energía que el gas cede para la radiación se compensa con la que sus átomos o moléculas reciben al chocar con los electrones.

4. Un cuerpo calentado hasta cierta temperatura emite luz.

Si un cuerpo recibe de otros circundantes una cantidad de energía, sea por absorción de radiaciones o por absorción de calor, capaz de compensar exactamente la pérdida de energía que él experimenta por su propia radiación, se dice que este proceso de radiación se realiza *equilibradamente*. En estas condiciones el estado del cuerpo radiante puede caracterizarse por tener una temperatura constante T determinada. Recordemos (t. I, § 66) que el concepto de temperatura sólo es aplicable en el caso en que existe equilibrio estadístico. Por esta razón la radiación equilibrada que hemos indicado se llama de temperatura.

En el caso en que la cantidad de calor o de energía que el cuerpo recibe del exterior es insuficiente para compensar por completo la energía radiante, parte de esta última se produce a costa de la reserva de energía interna del cuerpo. Claro está que en este caso se altera la distribución equilibrada de las partículas y, por consiguiente, la radiación deja de ser equilibrada. Pero si esta radiación se realiza tan despacio que la distribución de la energía interna del cuerpo tiene tiempo de igualarse y de continuar estando equilibrada, la radiación también tendrá carácter equilibrado. En este caso la temperatura del cuerpo disminuirá, pero en cada momento dado el estado del cuerpo podrá considerarse como equilibrado y se le podrá atribuir una temperatura determinada.

Dicho esto, pasemos a estudiar la *emitancia de radiación* o *energética* R_e de un cuerpo definiéndola, de acuerdo con lo dicho en el § 302, como una magnitud numéricamente igual al flujo radiante dE emitido por la unidad de superficie del cuerpo luminoso*):

$$R_e = \frac{dE}{dS}. \tag{1}$$

Aquí se entiende por dE el *flujo radiante integral*, es decir, el flujo referido a todas las longitudes de onda que emite el cuerpo. Por la fórmula (1) tenemos que:

$$dE = R_e \cdot dS. \tag{2}$$

Lo mismo que en el párrafo § 301 introdujimos la función e_λ, que caracteriza la distribución de la energía del flujo por longitudes de onda, ahora podemos introducir para la emitancia de radiación R_e la función de distribución entre las longitudes de onda r_λ. Entonces para el flujo radiante dE_λ, referido al intervalo de longitudes de onda λ, $\lambda + d\lambda$, emitido por el área dS de la superficie del cuerpo, obte-

*) La diferencia entre la luminosidad o emitancia luminosa R y la emitancia de radiación o energética R_e se debe a que el flujo luminoso y el flujo radiante correspondientes a un intervalo de longitudes de onda $d\lambda$ se diferencian entre sí en el factor V (sensibilidad relativa o eficacia luminosa monocromática, véase el § 301).

nemos

$$dE_\lambda = r_\lambda \, d\lambda \, dS. \tag{3}$$

La magnitud r_λ representa la emitancia de radiación o energética referida a un intervalo unidad de longitudes de onda, próximo a la longitud de onda λ dada, y se llama *emisividad* o *poder emisivo espectral del cuerpo*.

Es evidente que la *emitancia de radiación integral* R_e *referida* a todas las longitudes de onda vendrá expresada por la integral:

$$R_e = \int_0^\infty r_\lambda \, d\lambda. \tag{4}$$

Examinemos ahora la absorción de la luz. Supongamos que sobre un cuerpo cae un flujo radiante dE_λ correspondiente a un pequeño intervalo de longitudes de onda $d\lambda$, próximo a la longitud λ. Parte de este flujo se difunde y se refleja en el cuerpo (y si el cuerpo es transparente pasa a través de él) y otra parte es absorbida. Llamemos dE'_λ al flujo absorbido, correspondiente al intervalo de longitudes de onda $d\lambda$. La magnitud

$$a_\lambda = \frac{dE'_\lambda}{dE_\lambda} \tag{5}$$

indica la fracción de flujo incidente absorbida en las proximidades de la longitud de onda λ dada y se llama *absortividad* o *poder absorbente* o *factor de absorción* del cuerpo. Prácticamente todos los cuerpos presentan selectividad, es decir, no absorben por igual los flujos de distintas longitudes de onda. Para ellos a_λ es función de la longitud de onda λ. Si un cuerpo cualquiera absorbe totalmente el flujo luminoso en un intervalo doterminado de longitudes de onda, para este intervalo $a_\lambda = 1$. Para todos demás casos, en que el flujo no es absorbido totalmente, $dE'_\lambda < dE_\lambda$ y, de acuerdo con (5), $a_\lambda < 1$.

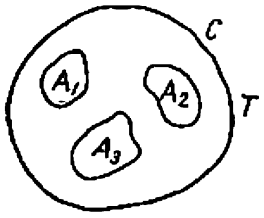

Fig. 218. Cuerpos dentro de una envoltura a temperatura constante T.

La experiencia demuestra que entre el poder emisivo espectral r_λ y el poder absorbente a_λ del cuerpo existe cierta relación. Supongamos que varios cuerpos A_1, A_2, A_3 (fig. 218) se encuentran dentro de una envoltura C, que se mantiene a una temperatura determinada T, y que en esta envoltura se ha hecho el vacío, es decir, que los cuerpos antedichos solamente pueden intercambiar energía entre sí o con la envoltura mediante emisión y absorción de la luz. La experiencia demuestra que en semejante sistema de cuerpos al cabo de algún tiempo se establece el equilibrio térmico, es decir, que todos los cuer-

pos acaban teniendo una misma temperatura T, igual a la de la envoltura. No obstante, el cuerpo cuya emitancia de radiación R_e es mayor cede más energía por unidad de tiempo y de superficie que el cuerpo cuya emitancia es menor. De aquí se deduce que este cuerpo únicamente podrá encontrarse a una temperatura constante T, igual a la de los demás cuerpos, en el caso en que también sea más absorbente. De esta forma, de la posibilidad del establecimiento del equilibrio termodinámico entre cuerpos que sólo pueden intercambiar energía por medio de la emisión y de la absorción de la luz se deduce la necesidad de que exista proporcionalidad entre los poderes emisivo y absorbente de los cuerpos. Kirchhoff demostró que esta proporcionalidad debe cumplirse separadamente para cada intervalo de longitudes de onda. Si los cuerpos A_1, A_2, A_3, . . . se caracterizan respectivamente por los poderes emisivos y absorbentes $r_{\lambda 1}$, $r_{\lambda 2}$, $r_{\lambda 3}$, . . .; $a_{\lambda 1}$, $a_{\lambda 2}$, $a_{\lambda 3}$, . . ., tendremos:

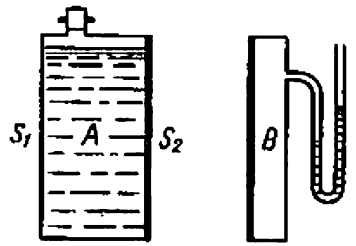

Fig. 219. Demostración de que el poder emisivo de una superficie pulimentada es diferente del de otra ennegrecida del mismo cuerpo.

$$\frac{r_{\lambda_1}}{a_{\lambda_1}} = \frac{r_{\lambda_2}}{a_{\lambda_2}} = \frac{r_{\lambda_3}}{a_{\lambda_3}} = \ldots = f(\lambda, T). \qquad (6)$$

La correlación (6) expresa la ley de Kirchhoff que dice: *la relación entre el poder emisivo (emisividad) y el poder de absorción (absortividad)* $\frac{r_\lambda}{a_\lambda}$ *de un cuerpo no depende de su naturaleza, sino que es igual para todos los cuerpos y función exclusiva* $f(\lambda, T)$ *de las longitudes de onda* λ *y de las temperaturas* T.

La relación que existe entre el poder emisivo y el de absorción puede demostrarse fácilmente. En calidad de radiador se toma un recipiente A en forma de paralelepípedo, una de cuyas caras S_1 (fig. 219) está hecha de metal bien pulimentado, mientras que otra S_2 está ennegrecida. Esta vasija se llena de agua caliente y como resultado de esto se convierte en un radiador de rayos infrarrojos suficientemente potente. La superficie S_1 refleja una gran parte de los rayos que sobre ella inciden y, por consiguiente, es poco absorbente. La superficie S_2, por el contrario, absorbe mucho. Por la ley de Kirchhoff, la superficie S_1 deberá emitir menos que la S_2. Tomemos como receptor de la radiación un recipiente cerrado B, unido a un manómetro. Una de las paredes de este recipiente está ennegrecida. Si esta superficie ennegrecida se coloca enfrente de la superficie ennegrecida S_2 del recipiente A (este caso es el que representa la fig. 219), el recipiente B empieza a calentarse sensiblemente, a costa de la radiación absorbida, y el aire que hay dentro de él se dilata, cosa que puede

observarse por las indicaciones del manómetro. Si el recipiente A se vuelve, de forma que enfrente de la superficie ennegrecida del receptor se encuentre la superficie pulimentada S_1, la dilatación del aire será mucho menor. Esto demuestra que la superficie pulimentada S_1, a una misma temperatura, emite menos radiación que la superficie ennegrecida S_2.

§ 308. **Cuerpo negro (radiador ideal).** Supongamos que se puede hacer un cuerpo que a cualquier temperatura absorba totalmente la luz cualquiera que sea su composición. El poder absorbente de este cuerpo a_λ, independiente de la temperatura, será igual a la unidad para todas las longitudes de onda: $a_\lambda = 1$. Este cuerpo se llama *cuerpo negro* o *radiador ideal*. Según la ley de Kirchhoff expresada por la fórmula (6) del § 307, la razón del poder emisivo r_λ al poder absorbente a_λ es igual para todos los cuerpos y función exclusiva de las longitudes de onda y de las temperaturas:

$$\frac{r_\lambda}{a_\lambda} = f(\lambda, T).$$

Para el cuerpo negro $a_\lambda = 1$, por consiguiente, su poder emisivo r_λ vendrá expresado directamente por medio de $f(\lambda, T)$:

$$r_\lambda = f(\lambda, T). \qquad (1)$$

Como por definición el poder emisivo r_λ es la función de distribución de la emitancia de radiación entre las longitudes de onda, de la correlación (1) obtenemos: *todos los cuerpos negros, a la misma temperatura, tienen la misma distribución de energía radiante entre las longitudes de onda; la emitancia de radiación de todos los cuerpos negros experimenta la misma variación al variar la temperatura.*

En la naturaleza no existen cuerpos cuyas cualidades coincidan con las del cuerpo negro. Los cuerpos cubiertos de una capa de negro de humo o de negro de platino tienen un poder de absorción a_λ próximo a la unidad únicamente en un intervalo limitado de longitudes de onda; en la zona infrarroja lejana sus poderes de absorción son considerablemente menores que la unidad. Pero artificialmente podemos aproximarnos cuanto sea necesario al cuerpo negro. Tomemos, por ejemplo, un recipiente casi cerrado A que únicamente tenga un pequeño orificio C (fig. 220). Cualquier rayo de luz que entre en el recipiente por el orificio C solamente podrá salir de él después de experimentar multitud de reflexiones. Supongamos que cada vez que el rayo incide sobre la superficie interna del recipiente A se refleja una fracción k del flujo radiante. Al cabo de n incidencias se reflejará una fracción que puede representarse por la magnitud k^n. Como k siempre es menor que la unidad, siempre que n sea suficientemente grande la magnitud k^n será muy pequeña. De esta forma, solamente una parte insignificante de los rayos que incidan en el orificio C

volverá a salir, y el factor de absorción del orificio C resultará próximo a la unidad para todas las longitudes de onda.

Un ejemplo sencillo de esta deducción nos lo ofrecen las ventanas abiertas de las casas vistas desde la calle. Como las dimensiones de éstas son generalmente pequeñas en comparación con las de las habitaciones, incluso cuando las paredes reflejan bien, la luz que vuelve a salir por las ventanas a la calle sólo representa una parte pequeña del flujo luminoso que entra por ellas. Por esto las ventanas parecen negras, independientemente del color que tengan las paredes interiores. De la misma forma la debilitación de los rayos por reflexiones múltiples hace que una superficie rugosa de un cuerpo cualquiera

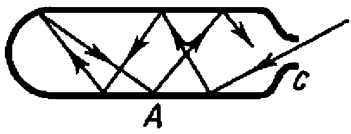

Fig. 220. Modelo de cuerpo negro.

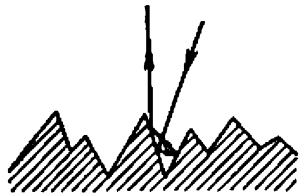

Fig. 221. Reflexión de la luz en una superficie rugosa.

parezca más oscura que otra superficie pulimentada de este mismo cuerpo. Un rayo al incidir sobre una superficie rugosa, en la mayoría de los casos, tiene que reflejarse varias veces antes de salir en sentido contrario (fig. 221).

Por la ley de Kirchhoff la omitancia de radiación de una superficie para la que a_λ se aproxima a la unidad, es aproximadamente igual a la emitancia de radiación del cuerpo negro. Por lo tanto, si las paredes del recipiente A (fig. 220) se hallan a una temperatura determinada T, la radiación que sale por el orificio C será con bastante aproximación igual a la radiación de un cuerpo negro que se encuentre a la misma temperatura.

En la práctica el modelo del cuerpo negro se hace generalmente en forma de tubo largo y estrecho de material termorresistente. Dentro del tubo, para evitar las reflexiones simples cuando la luz incide oblicuamente, se ponen tabiques con orificios. El tubo se coloca dentro de un horno eléctrico que sirve para calentar sus paredes hasta la temperatura T que se desee. La radiación que sale por el extremo del tubo tiene unas cualidades muy parecidas a la que emite el cuerpo negro. Con un modelo de cuerpo negro de este tipo se puede estudiar la emitancia de radiación hasta temperaturas del orden de 3 000° K.

En la fig. 222 se reproduce el esquema de un experimento para estudiar la distribución de la emitancia de radiación del cuerpo negro entre las longitudes de onda: A es el tubo que se calienta que sirve de cuerpo negro; L_1 es una lente que concentra el haz luminoso pro-

cedente de A sobre la rendija S_1 del tubo B_1. Este tubo B_1 proporciona un flujo de rayos paralelos que van a incidir sobre el prisma P. El prisma P*) desvía los haces de distintas longitudes de onda formando ángulos diferentes (véase el § 281). Cuando el tubo B_2 toma un ángulo de giro determinado, por la rendija S_2 sale el flujo correspondiente al intervalo de longitudes de onda que abarca desde una determinada

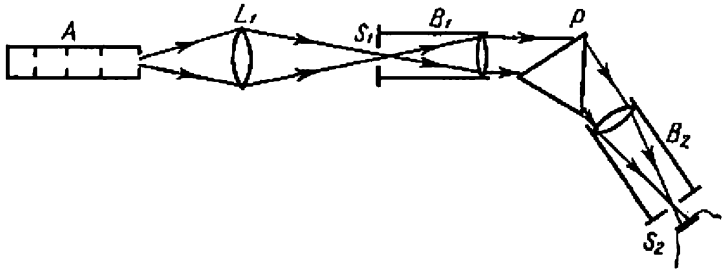

Fig. 222. Esquema del experimento para determinar la emitancia de radiación del cuerpo negro.

λ_1 hasta $\lambda_1 + \Delta\lambda_1$. Este flujo incide a su vez sobre el par termoeléctrico ennegrecido que mide la potencia del flujo radiante $\Delta E_{\lambda 1}$. Si el tubo B_2 toma otro ángulo de giro, el par termoeléctrico medirá la potencia del flujo $\Delta E_{\lambda 2}$, correspondiente a otro intervalo de longitudes de onda λ_2, $\lambda_2 + \Delta\lambda_2$. Según la fórmula (3) del § 307 la razón $\Delta E_{\lambda 1}/\Delta E_{\lambda 2}$ entre estos flujos depende del poder emisivo r_λ:

$$\frac{\Delta E_{\lambda_1}}{\Delta E_{\lambda_2}} = \frac{r_{\lambda_1}}{r_{\lambda_2}} \frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2},$$

de donde

$$\frac{r_{\lambda_1}}{r_{\lambda_2}} = \frac{\Delta E_{\lambda_1}}{\Delta E_{\lambda_2}} \frac{\Delta\lambda_2}{\Delta\lambda_1}. \qquad (2)$$

De esta forma pueden obtenerse los valores relativos de los poderes emisivos r_λ del cuerpo negro a la temperatura dada T para diferentes longitudes de onda λ. La dificultad de la medición está en que es imposible evitar la selectividad del aparato receptor (par termoeléctrico) y las alteraciones que produce la parte óptica del aparato. A pesar de todo en la actualidad está bien estudiada la distribución de la emitancia de radiación del cuerpo negro entre las longitudes de onda. A una temperatura dada T la variación del poder emisivo r_λ en función de la longitud de onda λ tiene el aspecto que se representa

*) En lugar de un prisma es preferible utilizar una red de difracción que permita medir la longitud de onda por el ángulo de giro (§ 270), pero esto no altera en absoluto el esquema teórico del artificio.

en la fig. 223. Las diferentes curvas de la fig. 223 corresponden a distintas temperaturas. Como puede verse, el poder emisivo del cuerpo negro r_λ aumenta rápidamente con la temperatura. Cada una de estas curvas tiene un máximo, el cual se desplaza hacia el lado de las longitudes de onda más cortas y se hace más agudo a medida que aumenta la temperatura. El aspecto de estas curvas se explica por el hecho generalmente conocido de que la emitancia de radiación de los cuerpos y, por consiguiente, su luminancia, aumenta rápidamente con la temperatura, al mismo tiempo que varía el color de la luz que emiten.

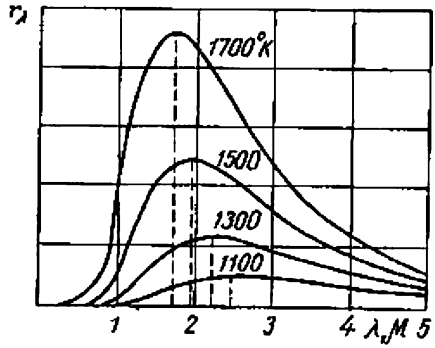

Fig. 223. Curvas de distribución de la emitancia de radiación del cuerpo negro entre las longitudes de onda.

A baja temperatura el máximo del poder emisivo se encuentra en la zona de las longitudes de onda grandes y el cuerpo emite principalmente rayos infrarrojos. En este caso la parte de la potencia que corresponde a los rayos visibles es tan pequeña que el ojo no percibe la luz. Esta es la composición de la radiación que tiene la luz cuando las temperaturas de los cuerpos son del orden de varias centenas de grados. Cerca de los 600° C la potencia correspondiente a la parte de las ondas más largas del espectro visible se hace suficiente para poder producir la sensación visual, y el cuerpo empieza a emitir luz de color rojo oscuro. Si la temperatura sigue aumentando el máximo se desplaza cada vez más hacia el lado de las longitudes de onda más cortas, la parte de la potencia que corresponde a los rayos visibles aumenta y la luz que emite el cuerpo va siendo cada vez más blanca.

El cuerpo negro es un radiador que cumple la ley de Lambert (radiador de coseno) (§ 303). Por esto entre la emitancia de radiación R_e y la radiancia o «luminancia energética» B_e del cuerpo negro existe una correlación simple:

$$B_e = \frac{1}{\pi} R_e.$$

Junto con la emitancia de radiación referida al intervalo unidad de longitudes de onda r_λ (poder emisivo espectral) se puede someter a consideración la

radiancia referida a un intervalo unidad de longitudes de onda b_λ. La magnitud b_λ estará relacionada con el poder emisivo del cuerpo negro r_λ por la relación

$$b_\lambda = \frac{1}{\pi} r_\lambda$$

De aquí se deduce que la distribución de la radiancia del cuerpo negro, entre las longitudes de onda coincide con la distribución de su emitancia de radiación.

§ 309. Leyes de la radiación del cuerpo negro. De lo expuesto en los párrafos anteriores se deduce que el carácter de la radiación del cuerpo negro viene determinado unívocamente por su temperatura T. El poder emisivo del cuerpo negro r_λ es una función definida de la longitud de onda y de la temperatura: $r_\lambda = f(\lambda, T)$. Los razonamientos puramente termodinámicos no permiten hallar la forma de esta función. Pero como resultado de los estudios termodinámicos se puede llegar a establecer una serie de leyes generales que debe cumplir la radiación del cuerpo negro. La primera de estas leyes se refiere a la emitancia de radiación integral: *la emitancia integral (es decir, la cantidad total de energía radiante emitida por el cuerpo) del cuerpo negro R_e aumenta proporcionalmente a la cuarta potencia de su temperatura absoluta*:

$$R_e = \sigma T^4 \tag{1}$$

Esta ley se conoce con el nombre de *ley de Stefan-Boltzmann*. Como la emitancia integral está relacionada con el poder emisivo r_λ por la correlación (4) del § 307, la ley de Stefan-Boltzmann puede escribirse también de la forma:

$$\int_0^\infty r_\lambda \, d\lambda = \sigma T^4 \tag{1a}$$

Las mediciones dan para la constante σ los valores siguientes:

$$\sigma = 5{,}71 \cdot 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{s} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{grad}^4} = 5{,}71 \cdot 10^{-12} \frac{W}{\text{cm}^2 \cdot \text{grad}^4}$$

En los diagramas de la fig. 223 la emitancia integral R_e viene representada por el área de la superficie comprendida entre la correspondiente curva de distribución del poder emisivo y el eje de abscisas.

La segunda ley establece la situación de los máximos de las curvas de distribución de la fig. 223. Según esta ley, llamada *ley de desplazamiento de Wien*, *la longitud de onda máxima $\lambda_{máx}$ correspondiente al máximo del poder emisivo r_λ es inversamente proporcional a la temperatura absoluta*:

$$\lambda_{máx} = \frac{C'}{T}. \tag{2}$$

donde C' es una constante determinada.

Cuanto más elevada es la temperatura del cuerpo negro tanto más corta es la longitud de onda que corresponde al máximo del poder emisivo r_λ. Las mediciones dan para la constante C' el valor numérico siguiente:

$$C' = 2\,886\ \mu\cdot\text{grad}.$$

De la ley de Wien se deduce que la longitud de onda $\lambda_{máx}$ correspondiente al máximo de radiación expresada en micras, es igual a

$$\lambda_{máx\ (\mu)} = \frac{2\,886}{T}, \qquad (2a)$$

donde T se toma por la escala de temperaturas absolutas. De la correlación (2a) se infiere que a las temperaturas que prácticamente se pueden conseguir la longitud de onda en que se produce el poder emisivo máximo del cuerpo negro se encuentra en la zona infrarroja. A 3 000° K el poder emisivo máximo está aún fuera de los límites del espectro visible, cerca de $\lambda = 0{,}96\ \mu$. Solamente a la temperatura de 5 000° K el máximo entra en la zona amarillo-verde del espectro ($\lambda_{máx} = 0{,}577\ \mu$). A temperaturas mayores de 7 200° K el máximo alcanza la zona ultravioleta.

La tercera ley dice que *el poder emisivo máximo del cuerpo negro* $r_{\lambda_{máx}}$ *aumenta proporcionalmente a la quinta potencia de la temperatura absoluta*:

$$r_{\lambda_{máx}} = C''T^5. \qquad (3)$$

Las mediciones dan para la constante C'' el valor numérico siguiente:

$$C'' = 1{,}301\cdot 10^{-15}\,\frac{W}{\text{cm}^2\cdot\mu\cdot\text{grad}^5}.$$

En la tabla X se dan los valores de $\lambda_{máx}$, de las emitancias integrales de radiación y luminosa y de la luminancia del cuerpo negro a diferentes temperaturas.

Tabla X

$T°$, K	$\lambda_{máx}\mu$	R_e, W/cm²	R, lm/cm²	B, sb
1 200	2,405	11,84	0,0452	0,0144
1 600	1,804	37,41	6,55	2,08
2 000	1,443	91,34	139,1	44,2
3 000	0,962	462,4	888,1	2824
4 000	0,721	1 461	$7{,}351\cdot 10^4$	$2{,}338\cdot 10^4$
5 000	0,577	3 568	$2{,}642\cdot 10^5$	$8{,}402\cdot 10^4$
6 000	0,481	7 399	$6{,}230\cdot 10^5$	$1{,}981\cdot 10^5$
8 000	0,361	23 384	$1{,}830\cdot 10^6$	$5{,}819\cdot 10^5$
10 000	0,289	57 090	$3{,}503\cdot 10^6$	$1{,}114\cdot 10^6$

Como puede verse en la tabla X, la emitancia de radiación del cuerpo negro aumenta extraordinariamente de prisa con la temperatura y cuando ésta es muy alta alcanza valores muy grandes. A 6 000° K cada centímetro cuadrado de cuerpo negro emite un flujo cuya potencia es de 7 399 W, es decir, de más de 10 «caballos de fuerza».

§ 310. Distribución de la emitancia del cuerpo negro entre las longitudes de onda. El primer intento de hallar analíticamente la forma de la función $r_\lambda = f(\lambda, T)$ que responda a las curvas experimentales se debe al físico moscovita V. A. Mijelsón. Pero la forma de la función encontrada no cumplía las leyes termodinámicas (1), (2) y (3) del § 309.

Rayleigh y Jeans hicieron a finales del siglo pasado otro intento para determinar la forma de la función $f(\lambda, T)$ basándose en las exigencias de la Física estadística sobre la distribución de la energía por grados de libertad. Supongamos un recipiente cerrado cuyas paredes son idealmente reflectoras y que dentro de él existe una radiación electromagnética. Como resultado de las reflexiones en las paredes dentro del cuerpo se forma un sistema infinitamente numeroso de ondas estacionarias. Si la radiación es la de equilibrio correspondiente a la temperatura T, por la ley de la equipartición de la energía entre los grados de libertad, a cada una de las vibraciones deberá corresponderle una misma energía, proporcional a T. Como las vibraciones electromagnéticas tienen dos tipos de energía, eléctrica y magnética, a cada una de las vibraciones propias le corresponderá una energía $2\frac{1}{2}kT = kT$, donde k es la constante de Boltzmann (lo mismo que a cada grado de libertad vibratoria de las partículas de un sólido le toca la energía kT, correspondiente a la existencia de las energías cinética y potencial de las vibraciones). El número de vibraciones propias que se establece dentro del recipiente que estudiamos, cuyo volumen es V, será igual al número de vibraciones propias que es capaz de realizar un medio continuo que tenga el mismo volumen V. Este número de vibraciones propias fue calculado por Rayleigh y Jeans y como resultado fue obtenida la expresión de la densidad de la energía radiante, dentro del recipiente, correspondiente a un intervalo de longitudes de onda $d\lambda$:

$$u_\lambda d\lambda = 8\pi kT\lambda^{-4} d\lambda. \qquad (1)$$

La fórmula (1) se llama fórmula de Rayleigh—Jeans. En la escala de frecuencias ν esta fórmula toma el aspecto:

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT\, d\nu. \qquad (1a)$$

Puede verse fácilmente que la fórmula de Rayleigh-Jeans conduce a un resultado absurdo: la densidad integral de la energía resulta

igual a infinito. Efectivamente, para la densidad integral de la energía radiante U obtenemos:

$$U = \int_0^\infty u_\nu \, d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 \, d\nu = \infty.$$

Esto quiere decir que el equilibrio entre los cuerpos y la radiación solamente podría producirse cuando la densidad de la radiación fuera infinitamente grande, cosa que se contradice bruscamente con todas las observaciones. La curva de la distribución de la emitancia de radiación del cuerpo negro entre las longitudes de onda, según la fórmula de Rayleigh-Jeans, da un aumento rápido y monótono a medida que disminuyen las longitudes de onda. Pero en realidad la distribución de dicha emitancia en el espectro tiene forma de campana (fig. 223). Por fin, en el año 1900, Planck consiguió hallar la forma de la función $f(\lambda, T)$ que responde a los datos experimentales y de la que pueden deducirse directamente, como casos particulares, las leyes termodinámicas (1), (2) y (3) del § 309.

Según Planck:

$$r_{\lambda, T} = f(\lambda, T) = 2\pi hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{e^{hc/kT\lambda} - 1}, \qquad (2)$$

donde c es la velocidad de la luz, k es la constante de Boltzmann y h una nueva constante igual a

$$h = 6{,}624 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}.$$

Esta nueva constante se conoce con el nombre de *constante de Planck*. En la fig. 224 la curva *1* corresponde a la fórmula de Planck para la temperatura $T = 1\,600°$ K; los puntos representan los datos experimentales obtenidos a esa misma temperatura; la curva *2* representa la variación de la función de distribución que proporciona la fórmula de Rayleigh-Jeans. De esta forma, el experimento no deja lugar a dudas sobre el hecho de que la realidad está de acuerdo con la fórmula (2) y no con la de Rayleigh-Jeans. Pero para deducir la fórmula (2) Planck tuvo que partir de una suposición completamente extraña a las ideas clásicas, es decir, sentó la hipótesis de que *la luz es emitida en forma de «paquetes» de energía (cuantos)* $\varepsilon = h\nu$, donde ν es la frecuencia de la radiación y h es la constante de Planck.

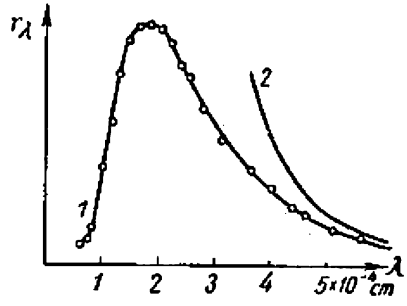

Fig. 224. Comparación de dos datos experimentales con los obtenidos por las fórmulas de Planck (*1*) y de Rayleigh — Jeans (*2*).

Más adelante (cap. XXIX y XXX) volveremos a ocuparnos de esta hipótesis que ha sido confirmada por multitud de experimentos y que tiene una importancia extraordinaria para desarrollar nuestros conocimientos sobre la naturaleza de la luz y de los procesos endoatómicos.

Si la distribución de la energía entre las zonas del espectro del cuerpo negro se representa en la escala de frecuencias, en lugar de $r_{\lambda, T}$ hay que tomar la emitancia luminosa $r_{\nu, T}$ referida a un intervalo unidad de frecuencias. Entonces

$$dR = r_{\lambda, T}\, d\lambda = r_{\nu, T}\, d\nu. \tag{3}$$

Y como quiera que $\lambda = \frac{c}{\nu}$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío, $|d\lambda| = \frac{c}{\nu^2}\, d\nu$, y poniendo este valor en (3) obtenemos:

$$r_{\nu, T} = r_{\lambda, T} \frac{|d\lambda|}{d\nu} = r_{\lambda, T} \frac{c}{\nu^2}.$$

Aplicando estas correlaciones entre $r_{\nu, T}$ y $r_{\lambda, T}$ hallamos la siguiente expresión de la fórmula de Planck (2) en la escala de frecuencias:

$$r_{\nu, T} = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}. \tag{4}$$

Cuando esta fórmula se aplica a la zona de grandes frecuencias, donde $h\nu \gg kT$, se puede despreciar la unidad del denominador de la fórmula (4) y entonces, aproximadamente, se obtiene:

$$r_{\nu, T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \tag{5}$$

De la misma forma, cuando $\lambda T \ll hc/k$, de la fórmula (2) podemos obtener aproximadamente:

$$r_{\lambda, T} = C_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}, \tag{5a}$$

donde, para simplificar, los factores constantes $2\pi hc^2$ y hc/k se representan respectivamente por C_1 y C_2; estos factores tienen los siguientes valores numéricos: $C_1 = 3{,}70 \cdot 10^{-5}$ erg·cm²/s y $C_2 = 1{,}433$ cm·grad.

Las fórmulas (5) y (5a) sirven para representar de manera aproximada la parte de la curva del poder emisivo del cuerpo negro que se encuentra, después del máximo, por la parte de las longitudes de onda más pequeñas.

La fórmula de Planck no sólo puede aplicarse a la emitancia de radiación del cuerpo negro, sino también a la densidad de la radiación equilibrada. Veamos, por ejemplo, el caso de un recipiente cerrado, cuyas paredes sean negras, que se encuentre a una temperatura T. Cuando se establece el equilibrio térmico

el espacio interior de la vasija estará lleno de una radiación de densidad determinada cuya energía estará distribuida entre las frecuencias de forma también determinada. Los cálculos dan, que para una radiación equilibrada de este tipo la densidad de la energía luminosa $u_\nu\, d\nu$, correspondiente, a un intervalo de frecuencias comprendido entre ν y $\nu + d\nu$, es igual a

$$u_\nu\, d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu; \qquad (6)$$

siendo T la temperatura de las paredes del recipiente que se encuentra en equilibrio térmico con la radiación que lo llena. Como puede verse, la densidad de la energía $u_\nu\, d\nu$ de la radiación equilibrada se encuentra distribuida entre las frecuencias según una curva igual a la de la emitancia de radiación del cuerpo negro. Por esta razón este tipo de radiación se llama «radiación negra». Como quiera que para la radiación negra el valor de la densidad de la energía y su distribución entre las frecuencias se determina unívocamente por la temperatura T, esta temperatura T puede llamarse convencionalmente *temperatura de radiación*. El concepto de temperatura de radiación fue propuesto en el año 1893 por B. B. Golitsin.

Para que dentro de una cavidad cerrada se produzca radiación negra no hace falta que las paredes sean también negras. Como, de acuerdo con la ley de Kirchhoff, la relación entre el poder emisivo y el poder absorbente es igual para cualquier cuerpo que para el cuerpo negro, la composición de la *radiación equilibrada* dentro de una cavidad cerrada será la misma cualquiera que sea la naturaleza de las paredes. Lo único que importa es que el poder absorbente sea diferente de cero para todas las frecuencias. Si en un recipiente cerrado, en cuyo interior existe radiación negra equilibrada, se hace un orificio, de él saldrá un haz con la misma distribución de energía que la que había dentro del recipiente. Un recipiente casi cerrado de este tipo es precisamente el que se toma como modelo de cuerpo negro. En relación con el haz luminoso que emiten estas fuentes se puede conservar el criterio antedicho de temperatura de radiación.

Es evidente que el concepto de temperatura de radiación puede aplicarse exclusivamente a los haces cuya distribución de energía cumple la fórmula (6) (es decir, la «*distribución de Planck*»). Si el haz luminoso que emite un cuerpo negro pasa a través de cualquier sustancia absorbente que varíe su distribución de energía, el concepto de temperatura de radiación ya no puede aplicarse. De la misma manera, si el haz luminoso es emitido por cualquier cuerpo que no sea negro, en condiciones en que *no existe equilibrio*, la distribución de la energía será diferente de la que se obtiene por la fórmula (6), y, por lo tanto, a este haz no se le podrá aplicar el concepto de temperatura de radiación.

§ 311. Fuentes de luz. Las principales fuentes luminosas modernas son cuerpos sólidos incandescentes. Como estas fuentes no son cuerpos negros y su radiación tiene lugar sin que exista equilibrio térmico, hay que determinar qué composición tiene su luz.

Por la ley de Kirchhoff, para los radiadores reales (cuerpos no negros) el poder emisivo r'_λ, referido al intervalo unidad de longitudes de onda, es igual:

$$r'_\lambda = a_\lambda r_\lambda, \qquad (1)$$

donde a_λ es el poder absorbente del cuerpo que se estudia y r_λ es el poder emisivo del cuerpo negro a la misma temperatura y referido al mismo intervalo de longitudes de onda.

Para todos los radiadores reales $a_\lambda < 1$ y, por consiguiente, *a una misma temperatura el poder emisivo de los radiadores reales es menor que el del cuerpo negro.* El cuerpo negro es aquel que, a la temperatura dada, posee el poder emisivo máximo posible.

Si para un cuerpo cualquiera a_λ es menor que la unidad pero constante para todas las longitudes de onda λ, este cuerpo se llama *gris.* En la naturaleza no existen cuerpos cuyas propiedades coincidan con las de los cuerpos grises, pero dentro de una zona limitada de longitudes de onda pueden tener cualidades aproximadas a las de estos últimos. Prácticamente puede considerarse «gris» la llama de los hidrocarburos, por ejemplo, la del acetileno. La distribución de la energía radiante de los cuerpos grises coincide con la distribución espectral de la del cuerpo negro tomada a la misma temperatura, con la única diferencia de que la potencia de la radiación por unidad de superficie es menor. Pero para todos los cuerpos reales, es decir, que ni son negros ni grises, el poder absorbente a_λ depende de la longitud de onda y de la temperatura y también del estado de polarización de los rayos y de sus ángulos de incidencia. La curva de la distribución espectral de la energía de estos cuerpos se diferencia de la de Planck. En la fig. 225 la curva *1* representa la distribución entre las longitudes de onda de la emitancia de radiación del cuerpo negro a la temperatura $T = 2\,100°$ K, la curva *2*, la distribución de la emitancia de radiación del wolframio, y la curva de trazo punteado, el poder absorbente del wolframio a la misma temperatura. Como puede verse, el poder absorbente del wolframio es mayor para las longitudes de onda cortas y menor para las largas. Por lo tanto, la emitancia de radiación del wolframio para las ondas cortas se diferencia menos de la del cuerpo negro que su emitancia para las ondas largas. Esta es la causa de que la luz que emite el wolframio sea diferente de la que emite el cuerpo negro: a una misma temperatura la radiación del wolframio es relativamente menos roja que la del cuerpo negro. En cuanto a su luminancia se refiere, ésta es menor que la del cuerpo negro en todas las longitudes de onda. Los cuerpos reales tienen $a_\lambda < 1$ para todas las longitudes de onda, por esto, su emitancia integral también es menor que la del cuerpo negro. Si la cantidad total de energía radiante emitida por el cuerpo negro viene dada por la ley de Ste-

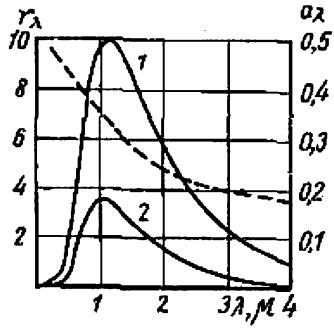

Fig. 225. Comparación de la distribución de la emitancia de radiación del cuerpo negro (*1*) con la del wolframio (*2*); la curva de trazo punteado representa el poder absorbente del wolframio.

fan-Boltzmann:

$$R_e = \sigma T^4,$$

donde

$$\sigma = 5{,}71 \cdot 10^{-5} \text{ erg/s} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{grad}^4,$$

la de los cuerpos no negros es:

$$R'_e = k\sigma T^4,$$

donde el valor del coeficiente k depende de la naturaleza del cuerpo, del estado en que se encuentra su superficie, de su temperatura, etc. En la tabla XI se dan los valores numéricos del coeficiente k para una serie de cuerpos a la temperatura de 1 500° K.

Como puede verse en la tabla XI, el valor de k para todos los metales es mucho menor que la unidad. En particular es pequeño para la plata, que como se sabe tiene un gran poder de reflexión (reflectividad) y, por consiguiente, absorbe solamente una pequeña fracción de la luz que sobre ella incide. A la temperatura de 1 500° K la plata emite por unidad de superficie 25 veces menos luz que el cuerpo negro.

Tabla XI

Sustancia	k a $T = 1\,500$ °K
Wolframio	0,15
Platino	0,15
Molibdeno	0,12
Hierro	0,11
Plata	0,04
Carbón	0,52
Oxido de níquel	0,84
Oxido de hierro	0,89

El valor de los coeficientes k depende en alto grado del estado en que se encuentran las superficies de los cuerpos. Como ya indicamos, las superficies rugosas y deslustradas absorben más intensamente que las pulimentadas y lisas de los mismos cuerpos. El valor de k depende también mucho de la temperatura de los cuerpos. Según los datos de la tabla XI, a $T = 1\,500°$ K para el wolframio $k = 0{,}15$; para este mismo cuerpo $k = 0{,}34$ cuando $T = 3\,500°$ K.

El hecho de que la luminosidad depende del poder absorbente es fácil de demostrar. Si la superficie blanca y esmaltada de un objeto de porcelana se recubre parcialmente de hollín y después se calienta, el sitio cubierto de hollín brillará más que las partes contiguas blancas.

De lo expuesto se deduce que la fuente térmica de luz más ventajosa es un cuerpo cuyas propiedades se aproximen lo más posible a las del cuerpo negro calentado hasta una temperatura de cerca de 6 000° K. A esta temperatura el máximo de luminosidad se encuentra dentro de la zona visible del espectro y el cuerpo negro tiene una eficacia luminosa de 84 lm/W.

En el § 304 vimos que cuando se trata de luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 0{,}555\ \mu$ (zona de sensibilidad máxima del ojo humano) a 1 W le corresponden 650 lm. Si llamamos rendimiento de la fuente a la relación entre su eficacia luminosa y la máxima eficacia luminosa posible, tendremos que el cuerpo negro a $T = 6\,000°$ K tiene un rendimiento

$$\varkappa = \frac{84}{650} = 0{,}129 \cong 13\%.$$

A temperaturas más bajas o más altas el rendimiento del radiador de cuerpo negro será menor. Como la temperatura de fusión de la mayoría de los cuerpos sólidos no sobrepasa de 3 000° K, el rendimiento que se puede conseguir en realidad de las fuentes luminosas es mucho menor que el 13%.

La fuente luminosa técnica que más se emplea es la lámpara eléctrica de incandescencia. Esta lámpara está formada por un filamento de carbón o metálico que se encuentra dentro de un globo de vidrio en el cual se ha hecho el vacío. Este filamento se pone incandescente cuando por él pasa la corriente eléctrica. Las primeras lámparas eléctricas aptas para fines prácticos fueron hechas por el inventor ruso A. N. Lodiguin en el año 1873. Este mismo año A. N. Lodiguin hizo el experimento de alumbrar las calles de Petersburgo con lámparas eléctricas de incandescencia.

En las primeras lámparas de Lodiguin la corriente ponía incandescente una barrita de carbón. Posteriormente, en el año 1890, Lodiguin consiguió la patente para las lámparas eléctricas con filamento de wolframio, molibdeno y otros materiales de punto de fusión elevado. Estas lámparas se extendieron mucho. En las lámparas de incandescencia modernas se utiliza un filamento de wolframio arrollado en hélice muy fina, para aumentar así su calentamiento. Estas lámparas se suelen llenar de un gas inerte (argón o criptón) a una presión de cerca de 1/2 atm, con lo cual se disminuye la evaporación (sublimación) del filamento y se aumenta la duración de la lámpara en servicio. Las características numéricas de las lámparas de incandescencia se dan en la tabla XII.

Otra fuente de luz de uso corriente es el arco eléctrico producido entre dos electrodos de carbón, que también fue descubierto por un inventor ruso, V. V. Petrov (t. II, § 190), y empleado para el alumbrado público por P. N. Yablochkov. En el arco eléctrico la luz es emitida principalmente por el cráter que se forma en el electrodo

de carbón positivo. La temperatura de este electrodo alcanza 4 000° K. Además del cráter emiten luz el otro electrodo y los vapores incandescentes que se forman entre los dos electrodos. Para aumentar la eficacia luminosa se incluyen sales de diferentes metales en los carbones, con lo cual aumenta considerablemente el brillo de los vapores entre los electrodos. A pesar de esto la eficacia luminosa no supera 25 lm/W.

Tabla XII

Fuente de luz	$T°$ K	Eficacia luminosa lm/W	B, sb	$\varkappa$ %
Lámpara de incandescencia con filamento de carbón	2 095	2,5	50	0,4
Lámpara de 50 W con filamento de W, llena de gas	2 800	10,0	450	1,6
Lámpara de 1 000 W con filamento de W, llena de gas	3 000	20	1 000	3,0
Arco eléctrico	4 000	25	15 000 (cráter)	4,0
Lámpara de luminiscencia	—	40	1,5	6,0
Lámpara de vapor de mercurio de alta presión	—	60	15 000	9,0

Se pueden obtener altos rendimientos aprovechando la luz que producen las descargas eléctricas a través de vapores a bajas presiones. En este caso el proceso tiene carácter desequilibrado y no cumple las leyes termodinámicas que hemos estudiado antes. Aquí es posible transformar casi totalmente la energía eléctrica aplicada en energía de luz visible, es decir, se pueden obtener rendimientos próximos al 100%. En las lámparas que contienen vapor de sodio se consigue obtener en la práctica un rendimiento del 70%. Pero las lámparas de este tipo dan una luz fuertemente coloreada y muy desagradable a la vista. Como «blanca» se percibe la luz del Sol, cuya composición se aproxima a la emitida por el cuerpo negro a $T = 5\,600°$ K. Las lámparas eléctricas de incandescencia ($T \cong 3\,000°$ K) dan una luz mucho más amarilla, pero esta diferencia de color, en comparación con la «blanca», es relativamente poco sensible. En cambio las fuentes de luz más o menos monocromática, como son las lámparas de descarga que hemos indicado, son prácticamente inaceptables debido a su coloración. Para corregir la coloración de estas lámparas S. I. Vavílov propuso emplear sustancias luminiscentes (véase el § 360). Las lámparas fluorescentes modernas que funcionan por este principio están formadas por un tubo de descarga que contiene una mezcla de argón y vapor de mercurio a baja presión.

Al pasar la corriente eléctrica el vapor de mercurio emite rayas espectrales intensas que se encuentran en la zona ultravioleta del espectro. Sobre la superficie interna del tubo de descarga se extiende una capa delgada de polvo luminiscente bajo la influencia de la radiación ultravioleta. La composición de los polvos se elige de forma que la luz que producen tenga unas características parecidas a las de la luz blanca.

El rendimiento de las lámparas fluorescentes es aproximadamente tres veces mayor que el de las lámparas de incandescencia ordinarias. Su brillo es menor que el de los filamentos de las lámparas de incandescencia, cosa que es una ventaja de las lámparas fluorescentes, puesto que cuando se mira un objeto que brilla mucho el ojo sufre una sensación dolorosa (deslumbramiento). Por esta razón las lámparas de incandescencia cuyos filamentos son de gran luminosidad se suelen alojar en globos matcados; pero esto disminuye aún más su rendimiento. Las lámparas fluorescentes, por el contrario, gracias a su menor brillo pueden utilizarse sin difusores, aunque el flujo luminoso que de ellas se obtiene puede ser considerable debido a la gran superficie luminosa que presentan.

Otro tipo de lámparas de descarga es aquel en que esta última se produce a través de vapor de mercurio a alta presión.

En este caso los procesos se aproximan a los equilibrados correspondientes a temperaturas muy altas. El rendimiento de estas lámparas es alto, pero la luz que dan tiene color verdoso, lo que no impide que últimamente se empleen mucho para el alumbrado de calles y carreteras por la economía que representan. La coloración de la luz de estas lámparas se corrige hasta cierto punto empleando luminóforos.

§ 312. Pirometría óptica. La temperatura del cuerpo negro puede determinarse por el carácter de su radiación basándose en cualquiera de las leyes de la radiación que hemos estudiado anteriormente. Los procedimientos para determinar las temperaturas fundados en estas leyes se llaman métodos de *pirometría óptica*. Como quiera que en las expresiones de las leyes de la radiación del cuerpo negro entra la temperatura en la escala absoluta, la pirometría óptica nos proporciona un procedimiento para hallar las temperaturas absolutas. En el t. I, § 44 indicamos la dificultad de principio con que se tropieza al medir las temperaturas en la escala absoluta, por tener que utilizar un cuerpo termométrico cuyas cualidades térmicas no pueden conocerse previamente. El método termodinámico, basado en el segundo principio de la Termodinámica (t. I, § 73), desde el punto de vista de los principios, permite medir las temperaturas independientemente de la naturaleza del cuerpo termométrico, pero la realización práctica de este procedimiento presenta enormes dificultades. Por el contrario, el cuerpo negro, como dijimos en el § 308,

puede reproducirse con toda la aproximación que sea necesaria, lo que hace de la pirometría óptica un procedimiento práctico útil para medir las temperaturas en la escala absoluta. Además, este método óptico tiene la ventaja de que puede emplearse para medir temperaturas muy altas. Por esto los puntos fundamentales de la escala termométrica moderna para la zona de altas temperaturas han sido establecidos por procedimiento óptico.

Los métodos de la pirometría óptica sirven también para resolver muchos problemas prácticos. No son raros los casos prácticos en que el objeto que se observa tiene propiedades que lo asemejan al cuerpo negro. Objetos de este tipo son, por ejemplo, los hornos industriales. Si la medición se realiza abriendo una pequeña ventana en el horno, éste resulta ser una buena aproximación al cuerpo negro. Cuando por el método óptico se mide la temperatura de cuerpos no negros, que emiten en condiciones en que no existe equilibrio, hay que tener en cuenta sus propiedades. Si estas propiedades se conocen, la pirometría óptica resulta muy cómoda por su relativa sencillez y seguridad. Teniendo en cuenta en cual de las leyes de la radiación se funda la medición de la temperatura, los métodos de la pirometría óptica tienen algunas peculiaridades específicas. Por esto, estudiemos estos métodos por separado.

1. **Método basado en la ley de la distribución de la luminancia entre las longitudes de onda.** En el § 309 vimos que la curva de la distribución de la luminancia del cuerpo negro entre las longitudes de onda se determina exclusivamente por un parámetro: su temperatura. Por lo tanto, la forma de la curva puede servir para determinar directamente la temperatura T. Bastará, por ejemplo, hallar la longitud de onda $\lambda_{máx}$ a que corresponde el máximo de la distribución, ya que por la fórmula de Wien (2a) del § 309:

$$T = \frac{2\,886}{\lambda_{máx}}, \qquad (1)$$

donde la longitud de onda $\lambda_{máx}$ deberá expresarse en micras. Por este método se determina la temperatura del Sol. La radiación máxima del Sol, teniendo en cuenta la corrección de absorción en la atmósfera terrestre, se aproxima a la longitud de onda $\lambda_{máx} = 0{,}47\ \mu$. De aquí, considerando el Sol como cuerpo negro, obtenemos que sus capas externas tienen una temperatura $T = 6\,150°$ K.

Para los cuerpos no negros la fórmula (1) no da la temperatura real T. La temperatura de estos cuerpos obtenida por la fórmula (1) se llama *temperatura del color*.

Si la curva de distribución de la luminancia del cuerpo que se observa no se diferencia mucho de la curva de Planck, la temperatura del color T_c indica aquella temperatura del cuerpo negro cuya radiación se aproxima más, por el color, a la radiación del cuerpo que se observa. El concepto de temperatura del color pierde su sen-

tido cuando se trata de cuerpos que tienen gran selectividad de radiación.

2. Método del brillo. Por la fórmula de Planck la temperatura T puede hallarse también midiendo la luminancia (brillo) para una longitud de onda λ, siempre que b_λ se exprese en unidades absolutas.

Como quiera que la medición de la luminosidad en unidades absolutas presenta dificultades, el procedimiento se reduce a comparar el brillo del cuerpo que se observa con el de otro perfectamente determinado. Para esto se utiliza un aparato que se llama pirómetro

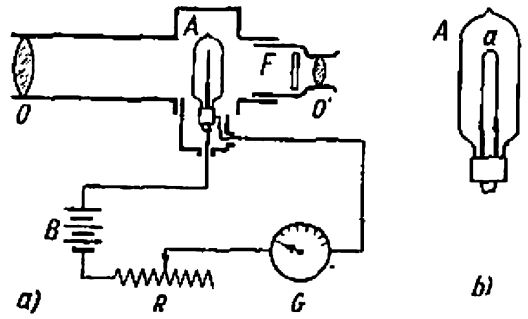

Fig. 226. Pirómetro de filamento que desaparece.

de filamento que desaparece. El esquema de este aparato se muestra en la fig. 226. Su elemento fundamental es un anteojo con un objetivo O y un ocular O'. En el plano focal del objetivo O se obtiene la imagen de la superficie del cuerpo que se observa. Como veremos más adelante (§ 323), el brillo de esta imagen es proporcional al del objeto. En el plano focal del objetivo O se coloca una lámpara eléctrica A cuyo globo es de vidrio homogéneo y transparente. El filamento incandescente de esta lámpara a (fig. 226, *b*) suele tener la forma de semicircunferencia. Por el ocular O' se ven al mismo tiempo la imagen de la superficie del cuerpo que se analiza y el filamento metálico de la lámpara. Unos filtros de color F, situados cerca del ocular O', permiten aislar una zona estrecha del espectro. Generalmente se prefiere la parte roja del espectro próxima a la longitud de onda $\lambda = 0{,}66\ \mu$. El filamento de la lámpara se alimenta con la corriente de una batería B. Variando la intensidad de la corriente con el reóstato R se puede conseguir que el filamento se caliente más o menos intensamente. Si el brillo del filamento es mayor que el de la imagen de la superficie del cuerpo, aquél se destaca sobre el fondo de ésta en forma de franja más clara; si, por el contrario, su brillo es menor, la franja resultará más oscura que el fondo. Cuando el filamento y la superficie brillan con la misma intensidad el filamento deja de verse sobre el fondo de la imagen de la superficie. De esta forma se puede establecer con un grado de exactitud consi-

derable el equilibrio entre el brillo del filamento y el de la imagen de la superficie del cuerpo que se observa. Este aparato puede graduarse por un cuerpo negro, estableciendo qué intensidades de la corriente de calentamiento I corresponden a la desaparición del filamento a diferentes temperaturas de dicho cuerpo negro. Una vez hecho esto, las indicaciones del instrumento de medición G, correspondientes a los momentos en que el filamento desaparece, pueden servir para determinar directamente cuál será la temperatura del cuerpo negro que en el intervalo de longitudes de onda dado produce un brillo b_λ igual que el b'_λ, del cuerpo que se observa. Si el cuerpo que se observa es negro, la temperatura medida de esta forma será la suya verdadera. Si los cuerpos no son negros, las temperaturas determinadas por este procedimiento se llaman *temperaturas de brillo* y se diferencian algo de las temperaturas reales del cuerpo.

3. Método de radiación. Este método se basa en la medición de la radiancia integral del cuerpo (es decir, la energía total por

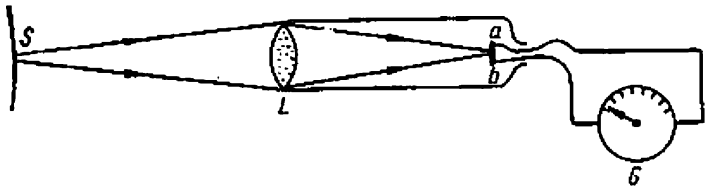

Fig. 227. Pirómetro de radiación.

unidad de superficie y de tiempo emitida por el cuerpo). La radiancia integral $B_e = \frac{1}{\pi} R_e$, donde R_e es la emitancia integral de radiación (cantidad total de energía radiante emitida por el cuerpo), que cumple la ley de Stefan-Boltzmann (1) del § 309:

$$B_e = \frac{\sigma}{\pi} T^4. \qquad (2)$$

De la fórmula (2) se deduce que la temperatura del cuerpo T puede hallarse midiendo su radiancia integral B_e.

Para determinar la radiancia B_e se utilizan unos aparatos llamados *pirómetros de radiación*.

En la fig. 227 se reproduce el esquema de un pirómetro de radiación: L es una lente; ab es un par termoeléctrico; y G, un galvanómetro, para medir la intensidad de la corriente que se produce en el par termoeléctrico. El pirómetro se enfoca a la superficie S del cuerpo incandescente, de forma que la imagen de ésta que produce la lente L coincida con el sitio en que se encuentra el par ab. Como ya dijimos, la radiancia B'_e de la imagen que produce la lente es proporcional a la de la fuente. El calentamiento del par termoeléctrico

es proporcional a su vez a la radiancia de la imagen B'_e (siempre que las dimensiones de la imagen sean mayores que las del par termoeléctrico). En fin de cuentas, las indicaciones del galvanómetro serán proporcionales a la radiancia B_e del cuerpo negro que se observa y, por consiguiente, según (2). serán proporcionales a su temperatura elevada a la cuarta potencia. Si el pirómetro se gradúa previamente, partiendo de temperaturas conocidas, después puede utilizarse para medir directamente cualquier temperatura.

Si el cuerpo cuya temperatura se mide no es negro el pirómetro de radiación no da su temperatura real T. La temperatura que se mide en este caso se conoce con el nombre de *temperatura de radiación* T_r, y es igual a la del cuerpo negro cuya radiancia integral coincide con la del cuerpo que se observa.

Para los cuerpos que no son negros, de acuerdo con lo dicho en el § 311:

$$B_e = \frac{k\sigma}{\pi} T^4, \tag{2a}$$

siendo k un coeficiente cuyo valor, para algunos cuerpos, se da en la tabla XI.

Como la temperatura de radiación del cuerpo se determina por la relación:

$$B_e = \frac{\sigma}{\pi} T_r^4, \tag{3}$$

comparando las fórmulas (2a) y (3) obtenemos la siguiente relación entre la temperatura real del cuerpo y su temperatura de radiación:

$$T = \frac{1}{\sqrt[4]{k}} T_r.$$

Y como, según los datos de la tabla XI, $k < 1$ para todos los cuerpos, la temperatura real de todos los cuerpos no negros será mayor que su temperatura de radiación. Por ejemplo, para el hierro $k = 0{,}11$, de donde $\frac{1}{\sqrt[4]{k}} k = 1{,}74$ y, por consiguiente, $T = 1{,}74 T_r$, es decir, la temperatura real es más de vez y media mayor que la de radiación. La dificultad que existe para determinar la temperatura real por medio de la de radiación estriba en que el valor de los coeficientes k no es constante, sino que depende también de la temperatura.

CAPITULO XXVIII

Optica geométrica aplicada

§ 313. **Introducción.** La estructura de un gran número de instrumentos ópticos se basa en la hipótesis de que los rayos luminosos se propagan en línea recta en los medios homogéneos y experimentan la reflexión y la refracción en las superficies que separan estos medios. La parte de la Física que estudia la teoría de estos instrumentos se llama *Optica geométrica*. La Optica geométrica se basa en dos leyes: la ley de la reflexión y la ley de la refracción de la luz (§ 251). Pero como veremos más adelante estas dos leyes son insuficientes para explicar la totalidad de las cualidades de los instrumentos ópticos. En primer lugar, porque hay que tener en cuenta las correlaciones fotométricas para poder explicar la luminancia y la iluminación de las imágenes. En segundo lugar, porque es necesario tomar en consideración los fenómenos de la interferencia y de la difracción de la luz que determinan los límites dentro de los cuales puede admitirse que la luz se propaga en línea recta. No obstante, a pesar de la gran importancia que tienen estos fenómenos, la teoría inicial de los instrumentos ópticos puede basarse exclusivamente en las leyes de la Optica geométrica.

Los instrumentos que se fundan en los principios de la Optica geométrica pueden servir para distintos fines: para complementar al ojo cuando se observan objetos, para dar una imagen real de los objetos, para variar la iluminación, etc. En todos estos casos el papel que desempeñan los instrumentos se reduce a variar los ángulos sólidos dentro de los cuales se propagan los rayos que salen del objeto. Por esto cobra importancia el estudio de las propiedades generales de los haces de rayos.

Supongámonos un haz de rayos formado por líneas rectas normales a una porción de superficie esférica. Este haz puede ser convergente (fig. 228, *a*), y entonces todos sus rayos se cortan *en un punto F*, o divergente (fig. 228, *b*), en cuyo caso las prolongaciones de sus rayos (representadas por líneas punteadas en la fig. 228, *b*) se encuentran en un punto F'. El punto F (o en el caso correspondiente el F') se llama foco del haz. *Todo haz cuyo foco sea un punto se llama homocéntrico*. Como la superficie de onda es ortogonal a los rayos, *a todo haz homocéntrico le corresponde un frente de onda esférico*. Un caso particular de haz homocéntrico es el haz de rayos paralelos, al cual le corresponden un foco situado en el infinito y una superficie de onda plana.

Examinemos ahora un área elemental de una superficie curva cualquiera *ABCD* (fig. 229).

Cada sección de este área elemental tendrá su propia curvatura. Como sabemos por la Geometría, en cualquier superficie curva las

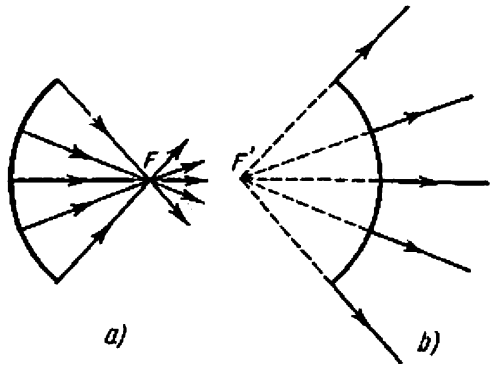

Fig. 228. Haces homocéntricos: *a*, convergente; *b*, divergente.

secciones que contienen los radios de curvatura máximo y mínimo son perpendiculares entre sí (véase el t. I, § 81). Tomemos un punto cualquiera *O* de nuestra superficie elemental y hagamos pasar por

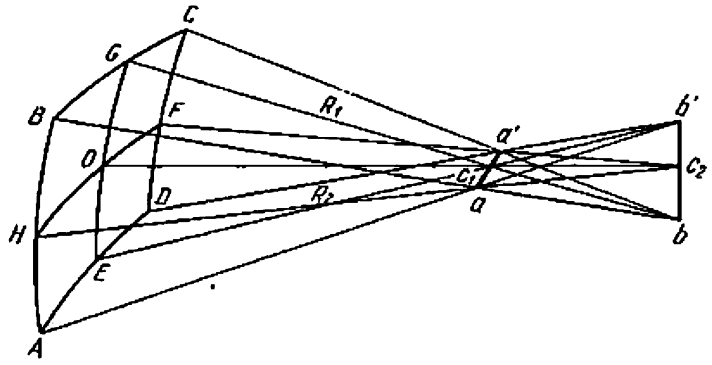

Fig. 229. Haz astigmático.

él dos cortes perpendiculares entre sí *EOG* y *HOF*, de los cuales supondremos que el primero corresponde al radio de curvatura mínimo R_1 y el segundo al radio de curvatura máximo R_2. Las perpendiculares a los puntos *E*, *O* y *G* se cortarán en el centro de curvatura C_1, que se encuentra a una distancia R_1 de la superficie; las perpendiculares a los puntos *H*, *O* y *F* se cortarán en el centro de curvatura C_2, que se encuentra a la distancia R_2 de la superficie. Tomemos ahora

los cortes *AHB* y *CFD*, próximos y paralelos al corte *EOG*. Estos cortes tendrán también el radio de curvatura R_1 y sus normales se cortarán respectivamente en los puntos *a* y *a'*, los cuales formarán una línea recta con el punto C_1. De la misma forma las normales a los cortes *AED* y *BGC*, paralelos al corte *HOF*, se cortarán en los puntos *b* y *b'* que formarán una línea recta con el punto C_2. Las rectas *aa'* y *bb'* serán perpendiculares entre sí. Todos los demás rayos perpendiculares a la superficie *ABCD* se cortarán en puntos situados en una de las dos rectas *aa'* y *bb'*. Como resultado tenemos: que *todos los rayos correspondientes a un área elemental de una superficie curva cualquiera se cortan en puntos que se encuentran en dos segmentos rectilíneos perpendiculares entre sí aa' y bb'*. Un haz de rayos de este tipo se llama *astigmático*. Los segmentos *aa'* y *bb'* se denominan *líneas focales* y la distancia entre ellos, *diferencia astigmática*. Los haces de rayos astigmáticos no dan focos puntuales en ninguna parte. Cuanto menor es la diferencia astigmática tanto más próximas entre sí se hallan las líneas focales y tanto más corta es cada una de ellas. En el límite estas líneas pueden confundirse en un punto, y entonces el haz astigmático se convierte en haz homocéntrico.

Es evidente que desde cada objeto puntual sale un haz homocéntrico (concéntrico). Para que un sistema óptico pueda dar una imagen puntual de un objeto de este tipo los rayos que salen de él deberán cortarse en un punto. Esto quiere decir que el sistema óptico debe variar exclusivamente los ángulos sólidos entre cuyos límites se encuentran comprendidos los haces homocéntricos, sin que éstos dejen de ser homocéntricos. Debido al fenómeno de la difracción no existen haces homocéntricos propiamente dichos, pero si nos limitamos a aplicar las leyes de la geometría óptica resulta que son posibles aquellos casos en que los haces homocéntricos después de reflejarse y de refractarse continúan siendo homocéntricos. Sin embargo, como veremos más adelante, estos casos no son frecuentes.

Por esto, cuando se construyen instrumentos ópticos generalmente no se consigue evitar por completo el astigmatismo, sino que únicamente se plantea el problema de reducirlo al mínimo.

La variación de los ángulos dentro de cuyos límites se propagan los haces se consigue en los instrumentos ópticos por medio de la reflexión y de la refracción en las superficies planas o curvas que separan cuerpos de propiedades ópticas distintas. Esta variación de los ángulos podría conseguirse en principio haciendo que los rayos se propagasen a través de sustancias ópticamente heterogéneas (§ 283), pero la fabricación de sustancias cuyas heterogeneidades estén repartidas de una forma dada es un problema difícil de resolver desde el punto de vista técnico y por eso este procedimiento no se utiliza hasta ahora. En calidad de superficies refractoras se emplean casi exclusivamente superficies planas o esféricas, y que la fabricación de superficies de otras formas también es bastante difícil. El material

transparente que sirve para hacer los instrumentos ópticos es por lo general el vidrio, que para este fin debe tener cualidades muy homogeneas. Finalmente, las superficies de los instrumentos ópticos no deben discrepar de las formas geométricas dadas en magnitudes mayores de una fracción de longitud de onda luminosa, es decir, en una magnitud del orden de 10^{-5} cm. Todas estas circunstancias hacen de la técnica óptica una de las más difíciles y delicadas. Pero al mismo tiempo la importancia práctica de los instrumentos ópticos es muy grande: la técnica de laboratorio, casi toda la técnica de mediciones de precisión, muchos métodos de comprobación de la calidad de los artículos industriales, la fotografía y toda una serie de aparatos que emplea la técnica de la defensa nacional se basan en la utilización de sistemas ópticos.

Las primeras etapas del desarrollo de la óptica aplicada datan en Rusia de mediados del siglo XVIII, época en que M. V. Lomonósov organizó un taller en el que se hacían diversos tipos de instrumentos ópticos diseñados por él: telescopios, microscopios y aparatos ópticos de navegación. En este taller se construyó un anteojo original de gran luminosidad apto para la observación con iluminación escasa. M. V. Lomonósov designó este instrumento con el nombre de anteojo «videonocturno». El célebre inventor ruso I. P. Kulibín fabricaba instrumentos ópticos de medición para las expediciones de la Academia de Ciencias, entre ellos figuraban teodolitos, astrolabios, etc. En el año 1779 Kulibín construyó el primer proyector de reflexión, para el que hizo un gran espejo cóncavo formado por multitud de espejos pequeños dispuestos sobre una superficie cóncava. Según testimonio de sus contemporáneos este espejo «cuando delante de él se colocaba una bujía producía un efecto sorprendente, multiplicando quinientas o más veces la luz en comparación con la que daba la vela...»

La óptica aplicada recibió en la URSS un impulso extraordinario después de la Gran Revolución de Octubre. Se organizó la producción en gran escala de vidrio óptico de multitud de clases y alta calidad. La técnica óptica soviética siguiendo un camino autónomo ha dado gran número de nuevas creaciones que satisfacen totalmente la demanda de aparatos ópticos del país.

§ 314. Reflexión y refracción en una superficie plana. En el § 251 estudiamos la reflexión en una superficie plana. Vimos entonces que un espejo plano da una imagen puntual virtual del punto objeto. Esto quiere decir que un haz homocéntrico después de reflejarse en un espejo plano sigue siendo homocéntrico, con la particularidad, fácil de comprobar, de que el ángulo sólido que forman los rayos del haz al divergir tampoco varía. Lo único que cambia es la dirección de dichos rayos. No ocurre lo mismo cuando la refracción tiene lugar en una superficie plana que separa dos sustancias cuyos índices de

refracción son distintos: en este caso el haz homocéntrico se convierte en astigmático.

Supongamos que la superficie plana que separa dos sustancias transparentes homogéneas coincide con el plano YOZ (fig. 230; el eje OY es perpendicular al plano del dibujo). Llamemos n_1 y n_2 a los respectivos índices de refracción de las sustancias, siendo $n_2 < n_1$, y supongamos que el foco puntual luminoso S se encuentra en el eje OX y que un rayo procedente de él incide sobre el punto M de la superficie de separación. Tracemos la normal MN en el punto de incidencia y llamemos i_1 e i_2 a los ángulos de incidencia y de refracción respectivamente. Por la ley de la refracción

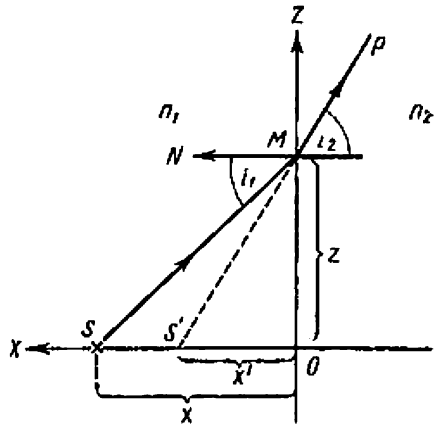

Fig. 230. Refracción de la luz en un plano de separación de dos medios.

$$n_1 \operatorname{sen} i_1 = n_2 \operatorname{sen} i_2. \qquad (1)$$

La prolongación del rayo refractado MP corta al eje OX en el punto S'. Llamemos x y x' a las coordenadas de los puntos S y S' respectivamente y z a la coordenada del punto M. De acuerdo con los triángulos SMO y $S'MO$ tenemos:

$$\operatorname{sen} i_1 = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} i_2 = \frac{z}{\sqrt{x'^2+z^2}}.$$

Poniendo estos valores de sen i_1 y sen i_2 en (1) y resolviendo la igualdad que se obtiene con respecto a x', hallamos:

$$x' = \frac{n_2}{n_1}\sqrt{x^2 + \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\right) z^2}. \qquad (2)$$

Por la fórmula (2) vemos que cuando se da la posición de la fuente luminosa S (es decir, se da x) la posición del punto S' depende del sitio en que se encuentra el punto M, es decir, de la dirección del rayo SM. Diferentes rayos se refractan de formas distintas al pasar de una sustancia a otra, y sus prolongaciones cortan al eje OX en distintos puntos. Veamos lo que ocurre con dos rayos SM_1 y SM_2 (fig. 231) cuyos ángulos de incidencia se diferencian entre sí en un ángulo infinitamente pequeño di_1. Estos rayos después de refractarse originarán los M_1P_1 y M_2P_2, cuyas prolongaciones cortarán al eje OX en los puntos S'' y S' respectivamente; estos rayos se cortarán entre sí en el punto S_1. Es evidente que todos los demás rayos que salen de la fuente puntual S y que se encuentran comprendidos entre los

rayos SM_1 y SM_2 después de refractarse darán rayos cuyas prolongaciones también se cortarán en el punto S_1 y cortarán al eje OX entre los puntos S' y S''. Si queremos tomar un haz de rayos espacial que parta del punto S estando comprendido dentro de los límites de un ángulo sólido infinitamente estrecho $d\omega_1$, no tenemos más que hacer girar la fig. 231 un ángulo $d\varphi$ alrededor del eje OX. Así obtendremos un haz de rayos homocéntrico infinitamente estrecho $d\omega_1$. Después de refractarse esto haz se convertirá en el haz $d\omega_2$ cuya sección por el plano XOZ viene determinada por las líneas M_1P_1 y M_2P_2. Las prolongaciones de todos los rayos del haz $d\omega_2$ cortarán al eje OX dentro de los límites del segmento $S'S''$, de donde se deduce que el haz refractado $d\omega_2$ será un haz astigmático y que la línea $S'S''$ será una de sus líneas focales. Para hallar la segunda línea focal tendremos en cuenta que las prolongaciones de los rayos del haz refractado que se encuentran en el plano XOZ se cortan en el punto S_1. Si hacemos que la figura gire un ángulo $d\varphi$ alrededor del eje OX, el punto S_1 describirá un arco pequeño, el cual, si el ángulo $d\varphi$ es infinitamente pequeño, podrá considerarse como un segmento rectilíneo perpendicular al plano de la figura. Las prolongaciones de todos los rayos del haz $d\omega_2$ cortarán este segmento. De esta forma, el segmento considerado, perpendicular al plano XOZ, es la segunda línea focal del haz refractado. La línea focal $S'S''$, que se halla en el plano del dibujo, se llama *sagital*, y la línea focal S_1, perpendicular al plano del dibujo, se llama *meridiana*.

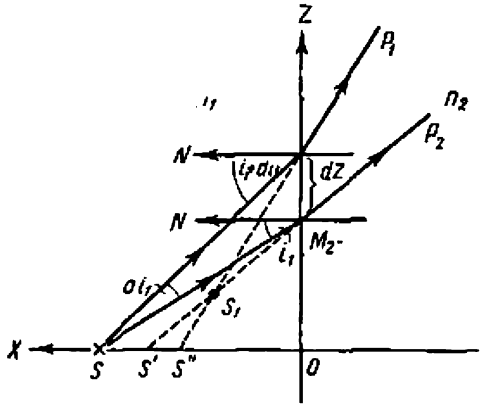

Fig. 231. Astigmatismo de un haz al refractarse en el plano de separación de dos medios.

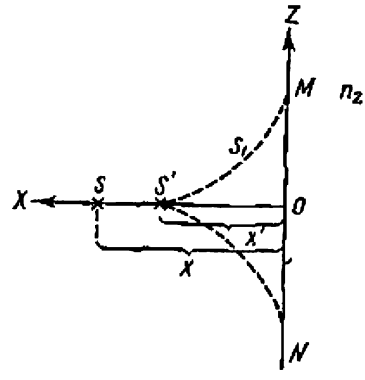

Fig. 232. Cáustica.

Al variar el ángulo de incidencia varía la posición de las dos líneas focales. En la fig. 232 la línea punteada representa el lugar geométrico de los puntos S_1. Esta línea se llama *cáustica*. Las líneas focales sagitales se sitúan a lo largo del eje OX, empezando

en el punto S' y terminando en el punto O. Cuando se trata de un haz infinitamente estrecho que parte de un punto luminoso S e incide normalmente sobre la superficie de separación ($i_1 = 0$), ambas líneas focales se confunden en un punto S'; en este caso el haz refractado sigue siendo homocéntrico. La coordenada x' del punto S' puede hallarse suponiendo $z = 0$ en la fórmula (2):

$$x' = \frac{n_2}{n_1} x. \qquad (2a)$$

A medida que varía el ángulo de incidencia la línea focal meridiana de los haces infinitamente estrechos se desplaza a lo largo de una de las ramas de la cáustica $S'M$ o $S'N$, dependiendo del signo que tenga el ángulo de incidencia i_1. Al mismo tiempo la línea focal sagital se desplaza desde el punto S' hasta el punto O a lo largo del eje OX. Las posiciones extremas de las líneas focales, correspondientes a los puntos M y O (o N y O), responden a la condición de que el ángulo de incidencia tiende a su valor máximo, a partir del cual aparece la reflexión total.

De lo expuesto se deduce que cuanto más oblicuamente incide el haz sobre la superficie de separación tanto mayor es el astigmatismo del haz refractado.

Si se miran, por ejemplo, objetos que están debajo del agua en dirección próxima a la normal, con respecto a la superficie del agua, sus imágenes conservan la nitidez, puesto que el astigmatismo es pequeño en este caso; pero si estos mismos objetos se observan bajo ángulos oblicuos sus imágenes dejarán de ser nítidas debido al astigmatismo.

§ 315. Refracción en una superficie esférica. Supongamos que dos sustancias transparentes homogéneas, con índices de refracción n y n' respectivamente, están separadas por una superficie esférica cuyo radio de curvatura es r.

Tracemos el *eje óptico principal*, entendiendo por él la recta que pasa por la fuente luminosa puntual P y por el centro de curvatura de la superficie C (fig. 233). Convencionalmente emplearemos la siguiente regla para los signos: las longitudes las mediremos a partir del vértice de la superficie refractora O y las consideraremos positivas cuando están dirigidas en el sentido de la propagación de la luz; los ángulos los mediremos a partir de la dirección del eje óptico principal (o de la normal a la superficie esférica) y los consideraremos positivos cuando se desarrollen en el sentido de las agujas del reloj. En el dibujo indicaremos siempre los valores positivos de las longitudes y de los ángulos. Por ejemplo, si una longitud determinada, que designaremos con la letra s, es negativa, en el segmento correspondiente del dibujo pondremos $-s$. Dicho esto, determinemos la dirección de los rayos que parten del objeto puntual P y los ángulos u

que estos rayos forman con el eje óptico principal PC. Tendremos en cuenta exclusivamente aquellos rayos que forman con el eje óptico ángulos tan pequeños que sus senos y tangentes pueden sustituirse por los propios ángulos y sus cosenos pueden ser considerados iguales a la unidad. Estos rayos reciben el nombre de *paraxiales*.

Veamos lo que ocurre con un rayo procedente del objeto P que incide sobre el límite de separación en el punto M y que después de refractarse corta al eje óptico principal en el punto P'. De acuerdo con la regla para los signos el ángulo u, cuya dirección se señala en

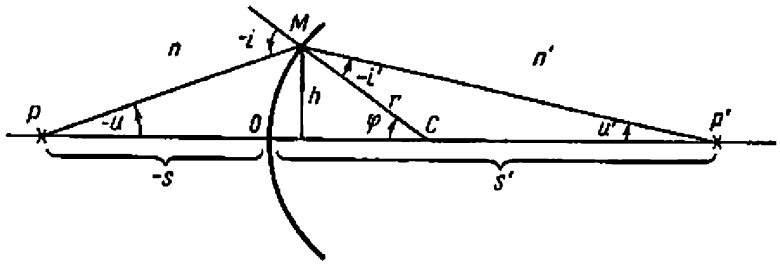

Fig. 233. Refracción de la luz en una superficie esférica.

la fig. 233 con una flecha, es negativo. Positiva será la magnitud $-u$. Los ángulos de incidencia i y de refracción i' también son negativos. Sus magnitudes positivas serán $-i$ y $-i'$. Según la ley de la refracción:

$$n \operatorname{sen}(-i) = n' \operatorname{sen}(-i').$$

Considerando que el rayo es paraxial, sustituimos los senos por los ángulos, y entonces

$$n(-i) = n'(-i'). \qquad (1)$$

Pero por el triángulo PMC tenemos que $-i = \varphi - u$, y por el triángulo CMP', $-i' = \varphi - u'$, donde $-u$ y u' son los ángulos positivos que forman los rayos PM y MP' con el eje óptico principal, y φ es el ángulo positivo entre este mismo eje y el radio CM. Poniendo estos valores de los ángulos $-i$ y $-i'$ en (1), hallamos:

$$n(\varphi - u) = n'(\varphi - u'). \qquad (2)$$

Llamando $-s$ y s' a las distancias positivas que hay respectivamente desde el vértice de la superficie de refracción O hasta los puntos P y P', y h a la longitud de la perpendicular bajada desde el punto M al eje PC, obtenemos, dentro de la aproximación admitida, que:

$$-u = \frac{h}{-s}, \quad u' = \frac{h}{s'}.$$

Y para el ángulo φ tenemos

$$\varphi = \frac{h}{r}.$$

Poniendo estos valores de $-u$, u' y φ en (2), hallamos:

$$n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right) \tag{3}$$

o

$$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}. \tag{4}$$

La magnitud que se encuentra en la parte derecha de la expresión (4) depende exclusivamente de los índices de refracción de las sustancias que intervienen y del radio de curvatura de la superficie que las separa. Por consiguiente, para unas sustancias y una superficie de separación determinadas esta magnitud será constante. La magnitud antedicha se llama *poder óptico* de la superficie refractora y se denomina con la letra Φ:

$$\Phi = \frac{n'-n}{r}. \tag{5}$$

Si introducimos el poder óptico en la expresión (4), obtenemos:

$$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s} = \Phi. \tag{4a}$$

Para una posición dada del objeto P (determinada por el segmento s) por la fórmula (4a) obtenemos un valor determinado del segmento s', *independiente del valor del ángulo u*. Esto quiere decir, que cuando los ángulos u son pequeños todos los rayos que salen del objeto puntual P, después de la refracción, se cortan en el punto P'. Si los rayos son paraxiales, todo haz homocéntrico, dentro de la aproximación admitida, después de refractarse en una superficie esférica seguirá siendo homocéntrico; P' será en este caso el punto imagen del punto objeto.

De los razonamientos anteriores queda claro que si se coloca una fuente luminosa en el punto P', el punto P será su imagen. Dos puntos P y P' que cumplan la condición de que si uno de ellos es el objeto el otro será la imagen y viceversa se llaman puntos *conjugados*.

Los rayos que forman ángulos u considerables con el eje óptico principal, después de refractarse en la superficie esférica no se cortan en un punto P', es decir, el haz después de refractado deja de ser homocéntrico y la imagen del objeto puntual deja de ser un punto. Pero limitándonos por ahora al estudio de los rayos paraxiales, hallemos el punto en que converge, después de refractarse en la superficie esférica, un haz de rayos paralelos. Para esto supongamos

que $-s = \infty$, entonces, de acuerdo con la fórmula (4):

$$s' = \frac{n'}{n'-n} r. \tag{6}$$

El punto en que se cortan los rayos de un haz paralelo después de refractarse en una superficie esférica se llama *foco principal imagen* F' de la superficie esférica, y la distancia que hay desde el vértice de la superficie refractora O hasta el foco principal imagen se llama *distancia focal imagen* f'. Por la fórmula (6), obtenemos:

$$f' = \frac{n'}{n'-n} r. \tag{7}$$

Se llama *foco principal objeto* F de una superficie refractora el punto que satisface la condición de que si en él se coloca una fuente luminosa puntual P, los rayos que partan de ella, después de refractados, formen un haz de rayos paralelos. La distancia desde el vértice O de la superficie rafractora hasta el foco principal objeto se llama *distancia focal objeto* f. Para hallar f suponemos que en la fórmula (4) $s' = \infty$, y entonces

$$f = -\frac{n}{n'-n} r. \tag{8}$$

Comparando las fórmulas (7) y (8) hallamos la correlación que existe entre la distancia focal imagen y la distancia focal objeto:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}. \tag{9}$$

Por la fórmula (9) puede verse que las dos distancias focales son proporcionales a los índices de refracción de las sustancias en que se encuentran los focos. El signo menos del segundo miembro de la igualdad (9) indica que las distancias focales tienen signos distintos, es decir, que los focos objeto e imagen se encuentran a distintos lados de la superficie refractora.

Introduzcamos en la fórmula (4a) las distancias focales. Para esto dividamos previamente los dos miembros de esta fórmula por $\frac{n'-n}{r}$, con lo que obtendremos:

$$\frac{1}{s'} \cdot \frac{n'}{n'-n} r - \frac{1}{s} \cdot \frac{n}{n'-n} r = 1,$$

o, basándonos en las correlaciones (7) y (8):

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1. \tag{4b}$$

A la fórmula (4b) se le puede dar otra forma. Para esto mediremos los segmentos que determinan las posiciones de los puntos P y P', no a partir del vértice O de la superficie refractora, sino desde uno

de los focos objeto F e imagen F' respectivamente. Llamando a estos segmentos x y x' (fig. 234), tendremos:

$$-s=-f-x \quad \text{y} \quad s'=f'+x'.$$

Poniendo estos valores de s y s' en (4b), hallamos:

$$\frac{f'}{f'+x'}+\frac{f}{f+x}=1$$

o

$$f'(f+x)+f(f'+x')=(f'+x')(f+x).$$

Abriendo los paréntesis y simplificando los términos semejantes,

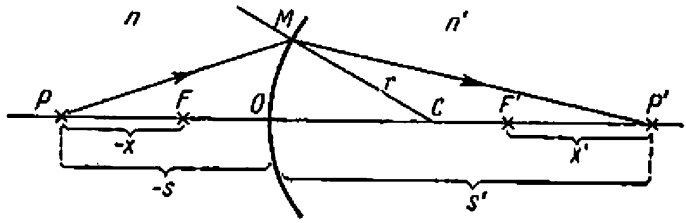

Fig. 234. Determinación de las posiciones del objeto P y de su imagen P' por medio de los segmentos x y x' tomados a partir de los focos principales.

llegamos a la expresión siguiente:

$$xx'=ff'. \tag{4c}$$

Esta forma simétrica de la expresión se llama fórmula de Newton.

Las fórmulas (4), (4a), (4b) y (4c) son equivalentes entre sí: cada una de ellas permite hallar por la posición de un punto objeto la posición de su punto imagen.

Finalmente establezcamos la correlación que existe entre las distancias focales f y f' y el poder óptico Φ de la superficie refractora. Por las fórmulas (5), (7) y (8) hallamos:

$$\Phi=\frac{n'}{f'}=-\frac{n}{f}. \tag{10}$$

Los resultados obtenidos para una superficie esférica refractora pueden extenderse al caso de un espejo esférico. Supongamos para esto que i es el ángulo de incidencia e i' el ángulo de reflexión. Conservando la regla convencional de los signos que hemos establecido, la ley de la reflexión tendrá la forma:

$$i=-i'.$$

Esta ley se obtiene formalmente de la de refracción (1) si el índice de refracción n' se toma igual a $-n$. De aquí que las fórmulas obtenidas para una superficie refringente esférica pasen a ser las del espejo

esférico si en ellas se toma $n' = -n$. De esta forma, de la fórmula (4), obtenemos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r},$$

expresión que permite hallar la posición que ocuparía la imagen producida por un espejo esférico si se conoce la que ocupa el objeto.

Para las distancias focales objeto e imagen de los espejos tenemos que $f = f' = \frac{r}{2}$. Los espejos cóncavos tienen $r > 0$ y el foco F se encuentra delante del espejo, entre su vértice y su centro de curvatura. Los espejos convexos tienen $r < 0$ y el foco F se encuentra detrás del espejo.

§ 316. Aumento de una superficie esférica refringente. Hasta ahora hemos estudiado el punto objeto (objeto puntual) y su punto imagen producido por una superficie esférica refringente (refractora).

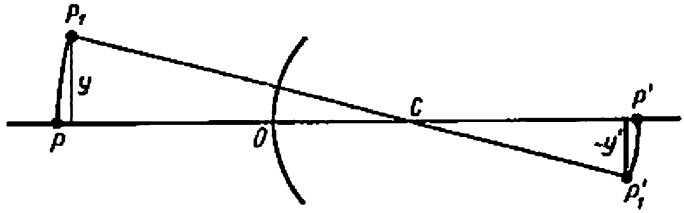

Fig. 235. Los puntos que se encuentran en el arco PP_1 tienen sus imágenes en puntos que se hallan en el arco $P'P_1'$.

Veamos ahora qué imagen producirá un segmento rectilíneo perpendicular al eje óptico. Para esto fijémonos en la fig. 235, donde P es un punto objeto y P' su imagen. Hagamos girar al eje PC, alrededor del centro de curvatura C de la superficie refringente, un ángulo pequeño. En estas condiciones el punto P ocupará la posición P_1 y su imagen la posición P_1. Todos los puntos del arco PP_1 tendrán sus imágenes en los puntos correspondientes del arco $P'P_1'$. Si los arcos PP_1 y $P'P_1$ son pequeños podemos sustituirlos por los segmentos rectilíneos y e y', perpendiculares al eje POP'. Por consiguiente, obtendremos que la imagen del segmento pequeño y, perpendicular al eje óptico, será el segmento y', también perpendicular al eje óptico. De aquí se deduce que la imagen de una superficie plana ΔS, normal al eje óptico, también será una superficie plana $\Delta S'$ perpendicular al eje óptico. Esta deducción es cierta cuando se trata de pequeñas superficies ΔS. Pero si las dimensiones de la superficie ΔS son considerables su imagen ya no puede considerarse plana: esta imagen representará una parte de superficie curva de forma determinada.

Cada uno de los puntos de la imagen es el punto de intersección de todos los rayos que parten de su punto conjugado del objeto. Para

hallar este punto basta determinar el de intersección de dos rayos cualesquiera. Examinemos, por ejemplo, el caso de un objeto en forma de segmento PP_1 (fig. 236) perpendicular al eje óptico. Para hallar la imagen del punto P_1 utilizaremos los dos rayos siguientes, cuyas direcciones después de refractarse en la superficie esférica conocemos: 1) el rayo P_1M, paralelo al eje óptico, que después de la refracción pasa por el foco imagen F', y 2) el rayo P_1FN, que pasa por el foco objeto F, que después de refractarse saldrá en dirección paralela

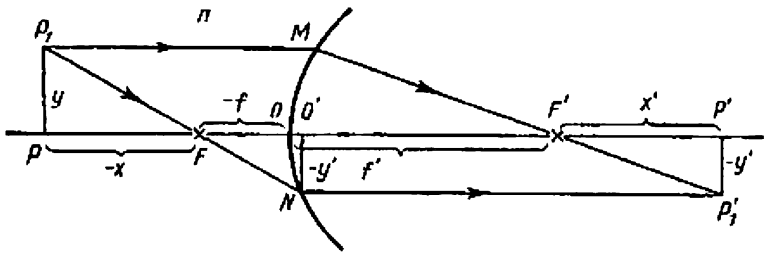

Fig. 236. Construcción de la imagen.

al eje óptico. El punto de intersección de estos rayos P_1' será la imagen del punto P_1. La imagen del segmento PP_1 será el segmento $P_1'P'$, perpendicular al eje óptico.

Llamemos y a la longitud del objeto a y' a la de su imagen. La razón de las dimensiones lineales de la imagen a las dimensiones lineales del objeto se llama *aumento lateral* β:

$$\beta = \frac{y'}{y}. \qquad (1)$$

Establezcamos convencionalmente que los segmentos perpendiculares al eje óptico serán positivos cuando estén dirigidos hacia arriba y negativos cuando lo estén hacia abajo. En el caso representado en la fig. 236 la longitud del objeto es positiva, mientras que la de su imagen es negativa. Bajemos desde el punto N una perpendicular al eje óptico; la longitud de esta perpendicular NO' será igual a $-y'$.

Según los triángulos PP_1F y $NO'F$ tenemos:

$$\frac{-y'}{y} = \frac{-f}{-x},$$

de donde el aumento lateral

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x}. \qquad (2)$$

Utilizando la fórmula de Newton (4c) del § 315: $xx' = ff'$, obtenemos que $\frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}$, después de lo cual a la expresión (2) puede dársele tam-

bién la forma

$$\beta = -\frac{x'}{f'}. \qquad (2a)$$

La expresión del aumento lateral β aún se puede transformar. Para ello tracemos los rayos P_1O y OP'_1, donde el punto O es el vértice de la superficie refractora. Como el eje óptico es normal a dicha

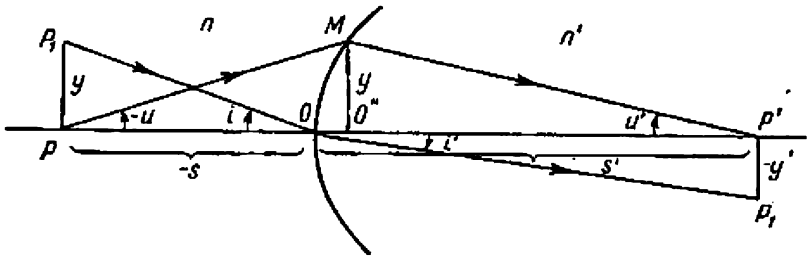

Fig. 237. Construcción de la imagen.

superficie, el $\angle P_1OP$ será el ángulo de incidencia i, y el $\angle P_1OP$ será el ángulo de refracción i'. Y según la fig. 237 tendremos que

$$y = -s \cdot i \quad \text{y} \quad -y' = s' \cdot i',$$

de donde obtenemos:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}\,\frac{i'}{i},$$

Por la ley de la refracción, dentro de la aproximación admitida, tenemos que $ni = n'i'$, es decir,

$$\frac{i'}{i} = \frac{n}{n'}.$$

Poniendo este valor de la relación i'/i en la expresión de β, hallamos que

$$\beta = \frac{n}{n'} \cdot \frac{s'}{s}. \qquad (3)$$

Tracemos ahora los rayos PM y MP' y bajemos desde el punto M la perpendicular MO'' al eje óptico. Entonces $MO'' = y$, y según los triángulos PMO'' y $P'MO''$ tenemos que

$$\frac{-u}{u'} = \frac{O''P'}{O''P}.$$

Pero aproximadamente $O''P = -s$ y $O''P' = s$, de donde se deduce que

$$\frac{s'}{s} = \frac{u}{u'}.$$

Poniendo este valor de s'/s en (3) obtenemos otra expresión del aumento lateral:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{u}{u'}. \tag{3a}$$

De la correlación (3a) obtenemos:

$$y'n'u' = ynu. \tag{4}$$

El producto *ynu* recibe el nombre de *invariante de Lagrange—Helmholtz.*

El ángulo $-u$ es el ángulo bajo el cual se ve el objeto y desde la distancia $-s$, y el u' es el ángulo bajo el cual se ve este mismo objeto desde la distancia s'. Se llama *aumento angular* γ la magnitud

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u}. \tag{5}$$

Dentro de la aproximación que hemos convenido se pueden sustituir las tangentes por los propios ángulos, y entonces obtenemos que

$$\gamma = \frac{u'}{u}. \tag{5a}$$

Hallemos ahora qué relación existe entre los aumentos laterales y angulares. Por las fórmulas (3a) y (5a) tenemos:

$$\beta = \frac{n}{n'} \frac{1}{\gamma}. \tag{6}$$

Como para un par de sustancias dado n/n' es una magnitud constante, el aumento lateral es inversamente proporcional al angular.

Examinemos también el llamado *aumento longitudinal.* Supongamos que el objeto se traslada a lo largo del eje óptico un espacio dx, en este caso su imagen se trasladará un espacio dx'. Se llama aumento longitudinal α la razón

$$\alpha = \frac{dx'}{dx}. \tag{7}$$

Por la fórmula de Newton (4c) del § 315 tenemos que

$$xx' = ff'.$$

La derivación de esta función nos da:

$$x\,dx' + x'\,dx = 0,$$

como resultado de lo cual, para el aumento longitudinal, obtenemos

$$\alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x}. \tag{8}$$

Hallemos la relación que existe entre los tres aumentos: lateral β, angular γ y longitudinal α. Para esto utilizaremos las correlaciones (2) y (2a), según las cuales

$$\beta^2 = \frac{x'}{x} \frac{f}{f'},$$

pero por la fórmula (9) del § 315 tenemos que $\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$, de donde hallamos que

$$\beta^2 = -\frac{x'}{x}\frac{n}{n'}.$$

De las expresiones (8) y (9) obtenemos:

$$\alpha = \frac{n'}{n}\beta^2.$$

Y finalmente advertimos que, por (6), $\frac{n'}{n}\beta = \frac{1}{\gamma}$; lo que nos da la relación buscada entre α, β y γ:

$$\alpha = \frac{\beta}{\gamma}.$$

§ 317. **Lentes delgadas.** Se llama lente óptica un cuerpo de sustancia transparente homogénea limitado por superficies de las cuales una, por lo menos, tiene radio de curvatura diferente de cero. Por lo general las superficies que sirven de límites a las lentes son

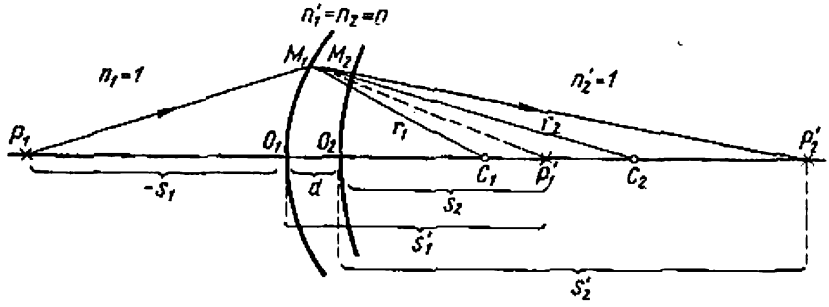

Fig. 238. Refracción de los rayos en una lente delgada.

esféricas. Nosotros nos ocuparemos exclusivamente de este tipo de lentes. Las lentes que se utilizan para la luz visible se hacen de vidrio; las que se emplean para los rayos ultravioletas son de cuarzo. Para los rayos infrarrojos se suelen utilizar lentes de cuarzo, de sal gema, de KCl etc.

En los §§ 315 y 316 estudiamos la refracción de la luz en una superficie esférica. La refracción de la luz en una lente se puede considerar como su refracción sucesiva en dos superficies esféricas. Supongamos que O_1 y O_2 representan dos superficies esféricas, cuyos respectivos radios son r_1 y r_2, que se encuentran separadas entre sí por una distancia d (fig. 238). Llamaremos eje óptico principal de este sistema de superficies a la recta que pasa por los centros C_1 y C_2. Supongamos que entre las dos superficies se encuentra una sustancia cuyo índice de refracción es n y que fuera de ellas está el aire, cuyo índice de refracción consideraremos igual a la unidad. Señalando las magnitudes

correspondientes a la primera superficie con el subíndice 1 y las relativas a la segunda con el subíndice 2, y conservando para todo lo demás las designaciones adoptadas en los §§ 315 y316, tendremos:

$$n_1 = n_2' = 1, \quad n_1' = n_2 = n. \tag{1}$$

Sea P_1 un objeto puntual situado en el eje óptico principal del sistema a una distancia $-s_1$ de la primera superficie refringente. Si únicamente existiera esta superficie refractora la imagen se formaría en el punto P_1', a una distancia s_1' de O_1. Esta imagen debe considerarse como objeto para la segunda superficie refractora. Dicho objeto se encuentra a la distancia s_2 del vértice O_2 de la segunda superficie refractora y su imagen se obtiene en un punto P_2' que se encuentra a una distancia s_2' del punto O_2. Pero P_2' será al mismo tiempo la imagen del objeto P_1 producida por el conjunto de ambas superficies refringentes.

Para hallar el sitio en que debe encontrarse el punto P_2' aplicaremos la fórmula (4) del § 315 a cada una de las superficies refringentes. Si se cumplen las correlaciones (1) obtenemos:

$$\frac{n}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \frac{n-1}{r_1}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{s_2'} - \frac{n}{s_2} = \frac{1-n}{r_2}. \tag{3}$$

En la fig. 238 vemos que entre s_2 y s_1' tiene lugar la correlación:

$$s_2 = s_1' - d.$$

Estudiaremos el caso de una *lente delgada*, es decir, de una lente en la cual la distancia d entre las superficies refringentes es pequeña con respecto a las distancias que la separan del objeto y de la imagen. En este caso $s_2 = s_1'$ y, según (2), obtenemos:

$$\frac{n}{s_2} = \frac{n}{s_1'} = \frac{1}{s_1} + \frac{n-1}{r_1}.$$

Poniendo este valor de n/s_2 en (3), tendremos:

$$\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_1} - \frac{n-1}{r_1} = \frac{1-n}{r_2}. \tag{4}$$

Al estudiar las lentes delgadas llamaremos s y s' a las distancias respectivas hasta el objeto y hasta la imagen. En estas condiciones, y de acuerdo con (4), tendremos:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{5}$$

Para una lente dada pueden conocerse los radios de curvatura de sus superficies r_1 y r_2 y el índice de refracción n de la sustancia de que está hecha. Por esta razón en el segundo miembro de la igual-

dad (5) tendremos la magnitud constante

$$\Phi = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \qquad (6)$$

que se llama *potencia óptica de la lente*. Como puede verse, la potencia óptica de una lente delgada es igual a la suma de las potencias de sus dos superficies refractoras $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

La fórmula (5) relaciona la posición del objeto con la de la imagen producida por la lente delgada.

Repitiendo los razonamientos que al tratar de una sola superficie refringente explicamos en el § 315 hallamos el valor de las distancias focales de las lentes delgadas

$$f' = -f = \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}. \qquad (7)$$

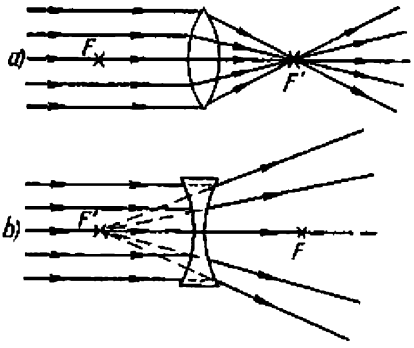

Fig. 239. Lentes: *a*, convergente; *b*, divergente.

El índice n es siempre mayor que la unidad, por consiguiente, el signo de la potencia óptica Φ depende del signo que tenga la magnitud $\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$. Si Φ es positiva tendremos una *lente convergente* (*positiva*); todo haz de rayos paralelos que incida sobre esta lente después de refractado convergerá en su foco imagen (fig. 239, *a*). Si Φ es negativa tendremos una lente *divergente* (*negativa*) y todo haz de rayos paralelos que incida sobre ella formará un haz divergente después de refractado; las

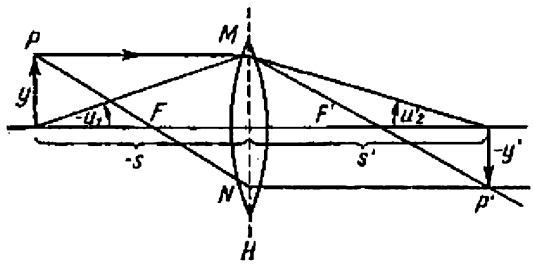

Fig. 240. Construcción de la imagen que produce una lente delgada.

prolongaciones de los rayos de este haz se cortarán en el foco imagen de la lente (fig. 239, *b*).

La imagen que produce una lente delgada puede construirse, lo mismo que en el caso de una sola superficie refringente, conociendo la marcha de los dos rayos siguientes (fig. 240): 1) del rayo PM,

paralelo al eje óptico, que después de refractarse en la lente pasa por su foco imagen F', y 2) del rayo PN, que pasa por el foco objeto F, el cual después de refractado seguirá en dirección paralela al eje óptico.

La posición del objeto y y de la imagen y' viene determinada respectivamente por los segmentos s y s', tomados a partir del centro de la lente (o de uno de sus vértices). Estos segmentos están relacionados entre sí por la correlación:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \Phi,$$

siendo Φ la potencia óptica de la lente.

Como demostraremos en el § 318 la ecuación de Lagrange—Helmholtz también es válida para las lentes. Esto da la posibilidad de relacionar el aumento lateral que produce la lente con las dimensiones de los segmentos s y s'. Por la invariante de Lagrange—Helmholtz, tenemos:

$$y' n_2' u_2' = y n_1 u_1.$$

Si la lente se encuentra en el aire $n_2' = n_1 = 1$ y de la invariante de Lagrange — Helmholtz se deduce que

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{u_1}{u_2'}.$$

Pero en la fig. 240 vemos que $\frac{u_1}{u_2'} = \frac{s'}{s}$, de donde obtenemos el aumento lateral

$$\beta = \frac{s'}{s}. \qquad (8)$$

§ 318. Sistema de superficies centradas. Planos principales. Examinemos el caso de un sistema de superficies esféricas de radios arbitrarios que separen entre sí sustancias cuyos índices de refracción sean distintos. Un sistema de este tipo se llama *centrado* cuando los centros de curvatura de todas las superficies se encuentran en una misma recta.

Nos limitaremos, como anteriormente, a considerar los rayos paraxiales. La refracción de un haz luminoso en un sistema podemos estudiarla analizando sucesivamente sus refracciones en cada una de las superficies esféricas. En este caso la imagen producida por cada superficie antecedente servirá de objeto a la superficie consecuente. Como al refractarse en cada una de las superficies todo haz homocéntrico sigue siéndolo, dentro de los límites admitidos, también lo será después de pasar por todo el sistema. De esto se deduce que cuando el objeto es un punto el sistema produce con los rayos paraxiales una imagen también puntual.

Puede demostrarse que para los sistemas también es válida la invariante de Lagrange—Helmholtz [fórmula (4) del § 316]. Efectivamente, tomemos por separado las dos primeras superficies refringentes de nuestro sistema A_1B_1 y A_2B_2 (fig. 241). Llamemos n_1 al

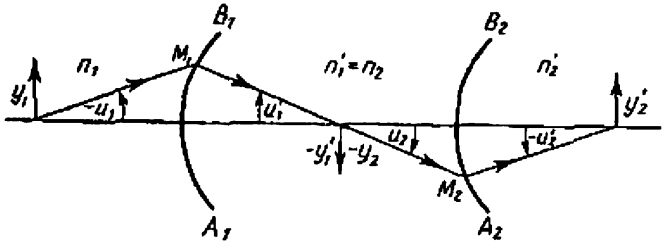

Fig. 241. Sistema de superficies refringentes centradas.

índice de refracción de la sustancia que se encuentra a la izquierda de la superficie A_1B_1 y n_1' al de la sustancia que se encuentra a su derecha. Análogamente llamemos n_2 y n_2' respectivamente a los índices de refracción respectivos de las sustancias separadas por la superficie A_2B_2. Como entre estas dos superficies hay una misma sustancia, tendremos:

$$n_1' = n_2. \tag{1}$$

Veamos lo que ocurre con el rayo M_1M_2 que después de sufrir la refracción en la superficie A_1B_1 incide sobre la A_2B_2. Llamemos u_1' y u_2 a los ángulos que este rayo forma con el eje óptico. Como puede verse en la fig. 241:

$$u_1' = u_2. \tag{2}$$

Finalmente llamemos y_1, y_2, y_1' e y_2' a las longitudes de los objetos y de sus respectivas imágenes correspondientes a las superficies A_1B_1 y A_2B_2. Como la imagen que produce la superficie A_1B_1 sirve de objeto a la superficie A_2B_2, tendremos que

$$y_1' = y_2. \tag{3}$$

Ahora podemos escribir la invariante de Lagrange-Helmholtz con respecto a cada una de las superficies A_1B_1 y A_2B_2:

$$n_1y_1u_1 = n_1'y_1'u_1',$$

$$n_2y_2u_2 = n_2'y_2'u_2'.$$

Partiendo de estas dos igualdades y aplicando las correlaciones (1), (2) y (3), obtenemos:

$$n_1y_1u_1 = n_1'y_1'u_1' = n_2y_2u_2 = n_2'y_2'u_2'.$$

Un sistema de igualdades semejante puede escribirse para los demás pares de superficies contiguas sucesivas hasta llegar a la última,

a la cual llamaremos superficie k; como resultado obtendremos:

$$n_1 y_1 u_1 = n_1' y_1' u_1' = n_2 y_2 u_2 = \ldots = n_k' y_k' u_k'. \quad (4)$$

Prescindiendo de todos los miembros intermedios de esta igualdad, hallamos:

$$n_1 y_1 u_1 = n_k' y_k' u_k'. \quad (4a)$$

En esta expresión y_1 representa las dimensiones del objeto que se encuentra delante del sistema, e y_k' las dimensiones de la imagen que se forma después de pasar la luz por todo el sistema. De esta forma, la igualdad (4a) es la invariante de Lagrange—Helmholtz correspondiente al sistema en su conjunto.

Todas las demás correlaciones válidas para el sistema pueden establecerse estudiando también la refracción sucesiva de los rayos en

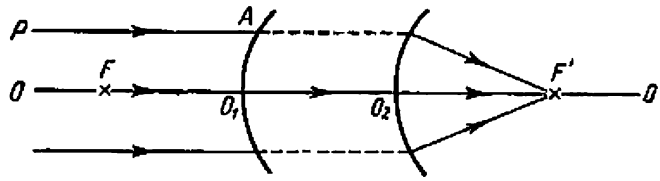

Fig. 242. Focos principales de un sistema centrado.

cada una de las superficies. No obstante, algunas propiedades generales del sistema se pueden establecer sin necesidad de un estudio tan detallado.

Sea por ejemplo un sistema compuesto por una serie de superficies esféricas centradas (fig. 242). La recta OO', que pasa por los centros de curvatura de todas las superficies, es el eje óptico del sistema. Examinemos lo que ocurre con el rayo PA que incide sobre el sistema paralelamente al eje óptico OO'. Después de atravesar el sistema, este rayo (o su prolongación) cortará al eje óptico en un determinado punto F'. El rayo que pasa a lo largo del eje óptico atraviesa el sistema sin sufrir refracción, puesto que incide en las superficies refringentes normalmente. Por consiguiente, los dos rayos PA y OO' después de pasar por el sistema se cortarán en el punto F'. Y como los rayos paraxiales homocéntricos siguen siendo homocéntricos después de atravesar el sistema, todos los rayos paralelos al eje óptico se cortarán en un mismo punto F' después de refractarse. Razonando análogamente podemos determinar la existencia de un punto F que tenga la propiedad de que los rayos que partan de él formen un haz de rayos paralelos al eje óptico después de refractarse en el sistema. Los puntos F y F' son los focos principales del sistema. De esta forma el sistema de superficies refringentes centradas tiene dos focos principales, lo mismo que si fuera una sola superficie.

Volvamos a examinar el caso del rayo PA paralelo al eje óptico OO' (fig. 243). suponiendo que pasa a una distancia arbitraria h de dicho eje. Después de refractarse dará lugar al rayo $B'F'$, que pasará por el foco imagen F' del sistema. Cualquier rayo que pase por el foco objeto F del sistema producirá un rayo paralelo al eje óptico después de refractarse. La distancia que hay entre este rayo y el eje óptico OO' depende de la inclinación que tenga el rayo FB. Puede hacerse que esta inclinación del rayo FB sea tal que el rayo $A'P'$ que le corresponda pase a una distancia h del eje. Los rayos PA y FB (o sus prolongaciones) se cortarán en un punto M determinado, mientras que los rayos $A'P'$ y $B'F'$ se cortarán en el punto M'. La posición

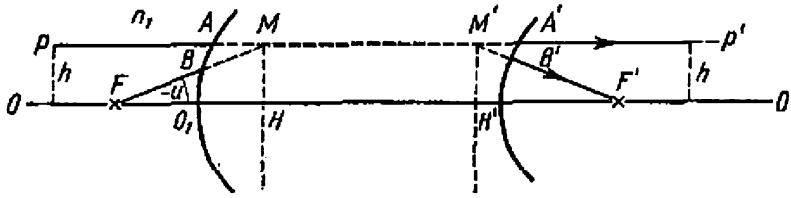

Fig. 243. Planos principales MH y $M'H'$ de un sistema.

de los puntos M y M' viene determinada por la propia marcha de los rayos antes de incidir sobre el sistema y después de salir de él. Para hallar estos puntos no es necesario conocer la marcha de los rayos dentro del sistema, por esto en la fig. 243 no se da esta marcha: las líneas punteadas representan exclusivamente las prolongaciones de los rayos que van fuera del sistema.

Los puntos M y M' se encuentran a igual distancia h del eje óptico. Hagamos pasar por estos puntos M y M' sendos planos perpendiculares al eje OO'; estos planos reciben el nombre de *planos principales del sistema*. Los puntos H y H' de intersección de los planos principales con el eje óptico se llaman *puntos principales del sistema*. Como los puntos M y M' son los de intersección de un mismo par de rayos (o de sus prolongaciones), son puntos conjugados del sistema. De aquí se deduce la siguiente definición de los planos principales: *los planos principales de un sistema son dos planos conjugados cuyos correspondientes puntos conjugados se encuentran a la misma distancia h del eje óptico.*

Conociendo la posición de los planos y focos principales de un sistema se puede hallar la situación de la imagen que dicho sistema produce partiendo de una posición dada del objeto. Efectivamente, supongamos que el sistema viene dado por sus planos principales H y H' y por sus focos principales F y F' (fig. 244). Las distancias que determinan las posiciones del objeto, de su imagen y de los focos principales las tomaremos respectivamente a partir del plano principal

objeto y del plano principal imagen. En la fig. 244 la posición del punto objeto viene determinada por el segmento $MP = -s$. El rayo PM, paralelo al eje óptico, después de experimentar la refracción en el sistema pasa por el foco principal imagen F'. De acuerdo con la propiedad, indicada anteriormente, de los planos principales este rayo (o su prolongación) cortará al plano principal imagen en el punto M', que se encontrará a la misma distancia $h = H'M'$ del eje óptico que el punto M. En calidad de segundo rayo procedente

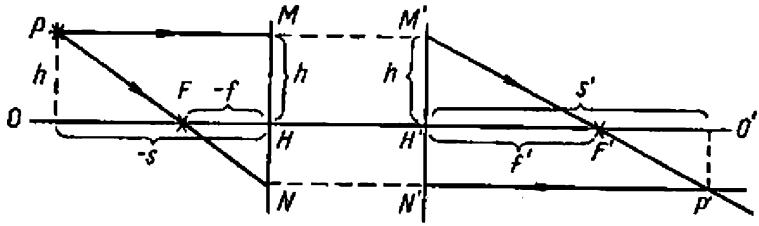

Fig. 244. Construcción de la imagen que produce un sistema dado por sus planos principales MH y $M'H'$ y por sus focos principales F y F'.

del objeto tomaremos el que pasa por el foco principal objeto F. Este rayo (o su prolongación) se encontrará con el plano principal objeto en el punto N y con el plano principal imagen en el punto N', ambos a la misma distancia del eje óptico. Después de refractarse en el sistema el rayo PN seguirá la dirección $N'P'$, paralela al eje óptico. El punto de intersección de los rayos $M'P'$ y $N'P'$ determinará la posición de la imagen P'.

De acuerdo con los triángulos NPM y NFH tenemos:

$$\frac{HF}{MP} = \frac{NH}{NM},$$

pero $MP = -s$ y $HF = -f$, siendo f la distancia focal objeto del sistema, por lo que como resultado obtenemos:

$$\frac{f}{s} = \frac{NH}{NM}. \tag{5}$$

Análogamente, de acuerdo con los triángulos $M'P'N'$ y $M'H'F'$ tenemos:

$$\frac{f'}{s'} = \frac{M'H'}{M'N'}. \tag{6}$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (5) y (6), hallamos:

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = \frac{M'H'}{M'N'} + \frac{NH}{NM}. \tag{7}$$

Pero por la propiedad de los planos principales que indicamos antes

$$M'N' = NM \quad \text{y} \quad NH = M'N' - M'H',$$

teniendo en cuenta estas correlaciones, la igualdad (7) toma la forma:

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=\frac{M'H'+NH}{M'N'}=\frac{M'N'}{M'N'}.$$

En definitiva

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1. \tag{8}$$

La igualdad (8) da la posibilidad de hallar la posición de la imagen cuando se da la del objeto (es decir, s) y se conocen las distancias focales principales del sistema y las posiciones que ocupan sus planos principales. La igualdad (8) coincide con la (4b) del § 315 deducida

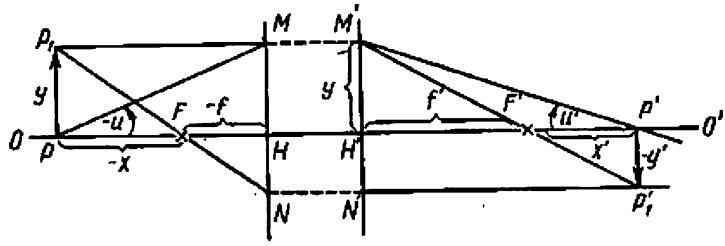

Fig. 245. Esquema para deducir el aumento lateral que produce un sistema.

para una sola superficie refringente. Análogamente puede demostrarse que para los sistemas se conservan las demás correlaciones deducidas en los §§ 315 y 316 para una sola superficie refringente, siempre que todas aquellas distancias que cuando se trata de una sola superficie refringente se toman desde su vértice, se tomen en el sistema a partir de sus planos principales. Demostremos, por ejemplo, que la expresión que se obtiene para el aumento lateral β de un sistema coincide con la expresión (2a) del § 316. Llamemos x y x' a las distancias desde el objeto y su imagen hasta los focos principales objeto e imagen respectivamente. Sea y la longitud del objeto (fig. 245) e y' la de la imagen. En estas condiciones según los triángulos $P'_1P'F'$ y $H'M'F'$ tenemos:

$$\frac{-y'}{M'H'}=\frac{x'}{f'}.$$

Por la propiedad fundamental de los planos principales $M'H'=y$, de donde el aumento lateral β será

$$\beta=\frac{y'}{y}=-\frac{x'}{f'}. \tag{9}$$

Análogamente y de acuerdo con los triángulos PP_1F y HNF hallamos la segunda expresión de β:

$$\beta=-\frac{f}{x}. \tag{9a}$$

De la comparación de las igualdades (9) y (9a) se deduce que la fórmula de Newton

$$xx' = ff'$$

es válida para el sistema.

Estudiemos el caso en que el objeto se encuentra en el plano principal objeto. En este caso $x = -f$ y por la fórmula de Newton obtenemos que $x' = -f'$, es decir, la imagen se encontrará en el plano principal imagen, y de acuerdo con la fórmula (9) tenemos que $\beta = +1$. De esta forma podemos dar una nueva definición de los planos principales: *los planos principales son aquellos planos conjugados del sistema a los que corresponde un aumento lateral igual a + 1.*

Las distancias focales de una superficie refringente se toman desde su vértice. De aquí, y teniendo en cuenta las condiciones que determinan la posición de los planos principales ($x = -f$ y $x' = -f'$), se deduce: que *cuando se trata de una sola superficie refringente ambos planos principales coinciden entre sí y con el plano tangente a la superficie refringente en su vértice.*

§ 319. Posiciones de los focos y de los planos principales de un sistema. Un sistema centrado puede considerarse dado si se conocen los radios de curvatura de las superficies refringentes, la distancia que hay entre estas últimas y los índices de refracción de todas las sustancias limitadas por ellas. Los planos principales de cada una

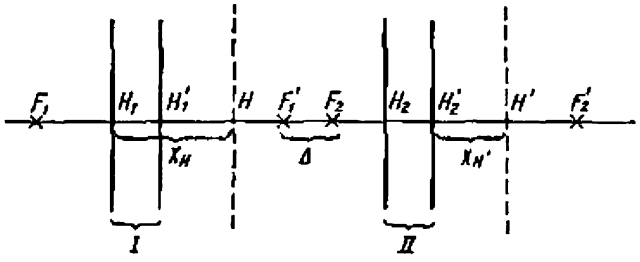

Fig. 246. Posiciones de los planos y focos principales de un sistema centrado.

de las superficies refractoras, de acuerdo con lo expuesto en el párrafo anterior, coinciden con el plano tangente que pasa por el vértice de dicha superficie. Las distancias focales principales de las distintas superficies refringentes pueden calcularse por las fórmulas (7) y (8) del § 315. Con estos datos se pueden hallar las posiciones de los planos y de los focos principales de todo el sistema.

Sean dos sistemas centrados *I* y *II* (fig. 246) dados cada uno por sus planos principales y por sus distancias focales principales f_1, f_1' y f_2, f_2'. La disposición mutua de estos dos sistemas la determinamos por la distancia Δ que hay entre el foco principal imagen F_1' del sistema *I* y el foco principal objeto F_2 del sistema *II*. Examinando

sucesivamente el paso del rayo por ambos sistemas se pueden hallar las distancias focales principales f y f_1 del sistema conjunto que forman y la posición de sus planos principales (véase la letra pequeña). Para las distancias focales principales obtenemos:

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}, \quad f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta}. \tag{1}$$

La posición del plano principal objeto H de todo el sistema viene determinada por el segmento X_H, tomado a partir del plano principal objeto del sistema I (fig. 246):

$$X_H = f_1 \frac{\Delta + f_1' - f_2}{\Delta}. \tag{2}$$

Análogamente la posición del plano principal imagen de todo el sistema vendrá determinada por el segmento

$$X_{H'} = f_2' \frac{\Delta + f_1' - f_2}{\Delta}, \tag{3}$$

tomado a partir del plano principal imagen del sistema II.

Cuando tanto los planos como los focos principales de las distintas superficies refringentes son conocidos, aplicando sucesivamente las fórmulas (1), (2) y (3) podemos hallar los planos y focos principales de cualquier sistema centrado complejo.

Estudiemos varios casos particulares.

1. **Caso de una lente gruesa.** Supongamos que una lente gruesa está limitada por dos superficies esféricas AB y $A'B'$ (fig. 247) cuyos

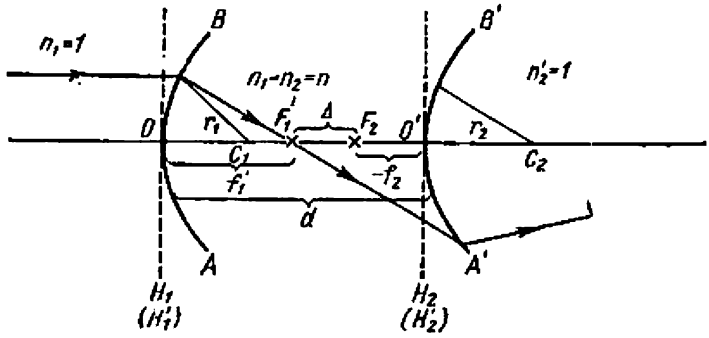

Fig. 247. Determinación de los focos y planos principales de una lente gruesa.

radios de curvatura son respectivamente r_1 y r_2, que se encuentran separados entre sí por una distancia d. El índice de refracción de la sustancia comprendida entre las superficies AB y $A'B'$ lo designaremos con la letra n. Supongamos que la lente se encuentra en el aire, cuyo índice de refracción consideraremos que es igual a la unidad. Los planos principales de la superficie primera y segunda

coinciden con los planos tangentes a las superficies refringentes en los puntos O y O' (en la fig. 247 se representan con líneas punteadas).

Comparemos entre sí las distancias focales objeto o imagen de la lente. Aplicando la fórmula (9) del § 315, para las superficies esféricas primera y segunda tendremos:

$$\frac{f_1'}{f_1} = -\frac{n_1'}{n_1} = -n \quad \text{y} \quad \frac{f_2'}{f_2} = -\frac{n_2'}{n_2} = -\frac{1}{n},$$

de donde se deduce que

$$\frac{f_1' f_2'}{f_1 f_2} = \frac{n_1' n_2'}{n_1 n_2} = \frac{n}{n} = 1.$$

Basándonos en esta igualdad y en la fórmula (1) llegamos a la conclusión de que las distancias focales objeto e imagen de la lente (rodeada de un medio homogéneo) son iguales en magnitud y tienen signo diferente:*)

$$f = -f'.$$

De acuerdo con la definición de potencia de una superficie refringente [fórmula (10) del § 315] por potencia de una lente (o de un sistema centrado de lentes) que se encuentra en un medio homogéneo de índice de refracción n_0 se entenderá la magnitud

$$\Phi = \frac{n_0}{f'} = -\frac{n_0}{f}.$$

En nuestro caso $n_0 = n_1 = n_2' = 1$ y

$$\Phi = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}.$$

Hallemos, pues, la potencia Φ de la lente. Por la fórmula (1)

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta}.$$

Pero por la fig. 247

$$\Delta = d - f_1' + f_2, \tag{4}$$

de donde para la potencia de la lente hallamos que

$$\Phi = \frac{1}{f'} = -\frac{\Delta}{f_1' f_2'} = \frac{d - f_1' + f_2}{f_1' f_2'}$$

o

$$\Phi = -\frac{f_2}{f_1' f_2'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{d}{f_1' f_2'}.$$

*) La igualdad $f = -f'$, donde f y f' son las distancias focales principales, no sólo se cumple cuando se trata de una lente, sino también en el caso de cualquier sistema centrado de lentes que se encuentre en un medio homogéneo. Para convencerse de esto no hay más que aplicar las fórmulas (6) y (6a) y tener en cuenta que para cualquier lente cuyo número de orden sea k tendrá lugar la igualdad $f_k = -f^k$.

Por lo expuesto

$$\frac{f_2}{f_2'} = -\frac{n_2}{n_2'} = -n.$$

Poniendo este valor de f_2/f_2' en la expresión de Φ, obtenemos

$$\Phi = \frac{n}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{d}{f_1' f_2'},$$

pero $\frac{n}{f_1'} = \Phi_1$ y $\frac{1}{f_2'} = \Phi_2$ donde Φ_1 y Φ_2 son las potencias respectivas de la primera y de la segunda superficie refringente de la lente. Utilizando estas correlaciones obtenemos en definitiva la potencia Φ de la lente gruesa:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n}\Phi_1\Phi_2. \tag{5}$$

Para determinar la posición del plano principal objeto de la lente gruesa utilizaremos la fórmula (2). Poniendo en ella en lugar de Δ su valor según (4) obtenemos:

$$X_H = f_1 \frac{d}{\Delta},$$

o escrito de otra forma

$$X_H = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \frac{d}{f_2}.$$

La magnitud $f_1 f_2/\Delta$, por la fórmula (1), es igual a la distancia focal objeto de la lente, de donde obtenemos que

$$X_H = f \frac{d}{f_2}.$$

Teniendo en cuenta que $f = -\frac{1}{\Phi}$, siendo Φ la potencia de la lente, y que $\frac{1}{f_2} = -\frac{\Phi_2}{n}$, obtenemos para X_H la siguiente expresión definitiva:

$$X_H = \frac{d}{n}\frac{\Phi_2}{\Phi}. \tag{6}$$

La magnitud X_H representa la distancia desde el vértice O de la lente hasta su plano principal objeto.

De manera análoga hallamos la posición del plano principal imagen de la lente. Por la fórmula (3) tenemos:

$$X_{H'} = f_2' \frac{d}{\Delta} \quad \text{o} \quad X_{H'} = \frac{f_1' f_2'}{\Delta}\frac{d}{f_1'}.$$

Aplicando la fórmula (1) podemos escribir esta expersión de la forma

$$X_{H'} = -f' \frac{d}{f_2'}.$$

Teniendo en cuenta que $f_1' = \frac{1}{\Phi}$ y $f_1' = \frac{n}{\Phi}$, obtenemos la siguiente expresión definitiva de $X_{H'}$:

$$X_{H'} = -\frac{d}{n}\frac{\Phi_1}{\Phi}. \qquad (6a)$$

La magnitud $X_{H'}$ es la distancia desde el vértice O' hasta el plano principal imagen.

En la fig. 248 se da la posición de los planos principales H y H' de una lente biconvexa gruesa calculada por las fórmulas (6) y (6a).

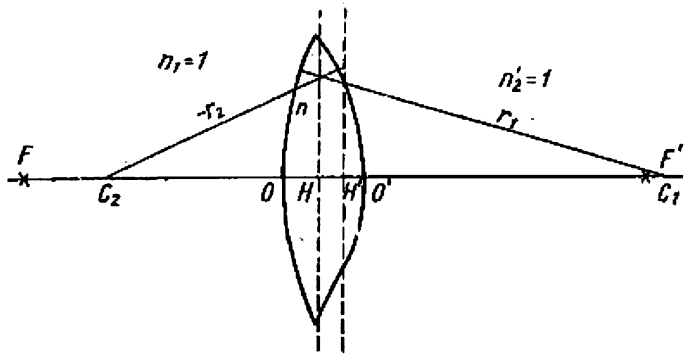

Fig. 248. Posiciones de los planos principales de una lente biconvexa gruesa.

Como puede verse ambos planos se encuentran dentro de la lente y, si los radios de curvatura r_1 y r_2 no son iguales, a distintas distancias con respecto a sus respectivas superficies. Las dos distancias focales

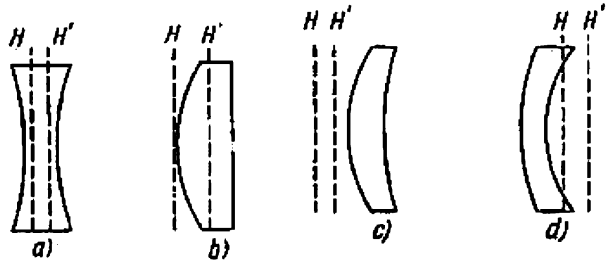

Fig. 249. Posiciones de los planos principales de las lentes: *a*, bicóncava; *b*, plano-convexa; *c*, menisco convergente; *d*, menisco divergente.

y f' son iguales numéricamente pero, como hay que tomarlas a partir de los planos principales correspondientes, resulta que el foco objeto no se encuentra a la misma distancia del vértice O de la lente que el foco imagen de su vértice O'.

De forma análoga se puede hallar la posición de los planos y focos principales de cualquier clase de lentes gruesas. En la fig. 249 se

representan los siguientes casos : a) lente bicóncava, b) lente plano-convexa, c) menisco convergente (positivo) y d) menisco divergente (negativo).

Cuando se trata de lentes delgadas la distancia entre sus superficies se puede considerar aproximadamente igual a cero, y entonces la fórmula (5) nos da:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

es decir, obtenemos el mismo resultado que hallamos anteriormente (§ 317), la potencia de una lente delgada es igual a la suma de las potencias de los dioptrios que la forman.

La potencia de las lentes se mide en *dioptrías*, tomándose como una dioptría la potencia de una lente cuya distancia focal es igual a 1 m.

2. Caso de dos lentes delgadas situadas entre sí a una distancia finita. Tomemos dos lentes delgadas cuyas potencias sean Φ_1 y Φ_2 y que estén situadas a una distancia d una de otra (fig. 250). Basándonos

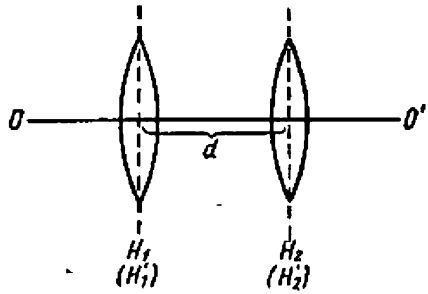

Fig. 250. Dos lentes delgadas.

en lo expuesto anteriormente podemos considerar cada una de estas lentes como una superficie refringente de la misma potencia que ella tiene. Suponiendo que las lentes se encuentran en el aire (cuyo índice de refracción es igual a la unidad), por la fórmula (5) obtenemos que la potencia Φ del sistema formado por ambas lentes delgadas será:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2. \qquad (7)$$

Por las fórmulas (6) y (6a) hallamos la magnitudes X_H y $X_{H'}$, que determinan las posiciones de los planos principales del sistema:

$$X_H = d\frac{\Phi_2}{\Phi}, \quad X_{H'} = -d\frac{\Phi_1}{\Phi}. \qquad (8)$$

La magnitud X_H deberá ser tomada a partir de la primera lente y la $X_{H'}$ a partir de la segunda.

Como ejemplo examinemos el caso del llamado ocular de Huygens, que consta de dos lentes convergentes delgadas (fig. 251) de las cuales una tiene

la distancia focal igual a a y la otra la tiene tres veces mayor:

$$f_2' = a, \quad f_1' = 3a.$$

La distancia d entre las lentes es igual a $2a$.

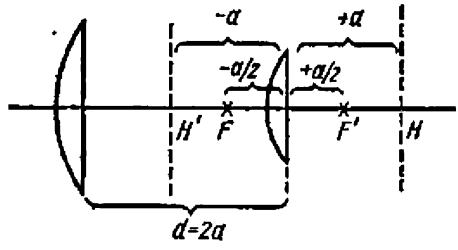

Fig. 251. Ocular de Huygens.

Determinemos la posición de los planos y de los focos principales de este sistema.

Las potencias de ambas lentes serán:

$$\Phi_1 = \frac{1}{f_1'} = \frac{1}{3a}, \qquad \Phi_2 = \frac{1}{f_2'} = \frac{1}{a}.$$

La potencia del conjunto del sistema, según (7), será:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2 = \frac{1}{3a} + \frac{1}{a} - \frac{2a}{3a^2} = \frac{2}{3a}.$$

De aquí obtenemos que las distancias focales del sistema serán:

$$f' = -f = \frac{1}{\Phi} = \frac{3}{2}a.$$

Las posiciones de los planos principales del sistema las hallamos por las fórmulas (8):

$$X_H = d\frac{\Phi_2}{\Phi} = 2a\frac{3a}{2a} = 3a,$$

$$X_H = -d\frac{\Phi_1}{\Phi} = -2a\frac{3a}{2\cdot 3a} = -a.$$

Por estas expresiones vemos que el plano principal objeto H estará fuera del sistema, a la derecha de la segunda lente y a una distancia a de ella; el plano principal imagen H' se encontrará entre las dos lentes. Los focos principales, como puede verse claramente, están situados simétricamente con respecto a la segunda lente, es decir, a iguales distancias de ella $+a/2$ y $-a/2$.

§ 320. Sistema telescópico. Se llama telescópico un sistema centrado formado a su vez por dos sistemas I y II (fig. 252) situados de tal manera que el foco principal imagen F_1' del I coincide con el foco principal objeto F_2 del II. En este caso $\Delta = 0$, y por las fórmulas deducidas en el § 319 se obtiene que los focos y los planos principales del sistema telescópico se encuentran en el infinito y que su

potencia Φ es igual a cero. Un haz de rayos paralelos que incida sobre un sistema telescópico saldrá de él en forma de haz paralelo.

Para construir la imagen que produce un sistema telescópico no sirve el procedimento que indicamos en el § 318. Para esto hay que

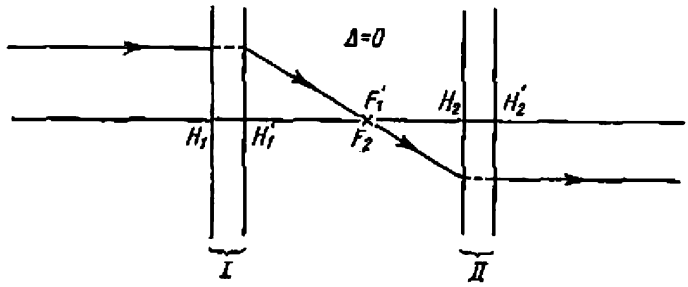

Fig. 252. Sistema telescópico.

proceder de la forma siguiente. Supongamos que el sistema telescópico (fig. 253) viene dado por las posiciones de los planos principales

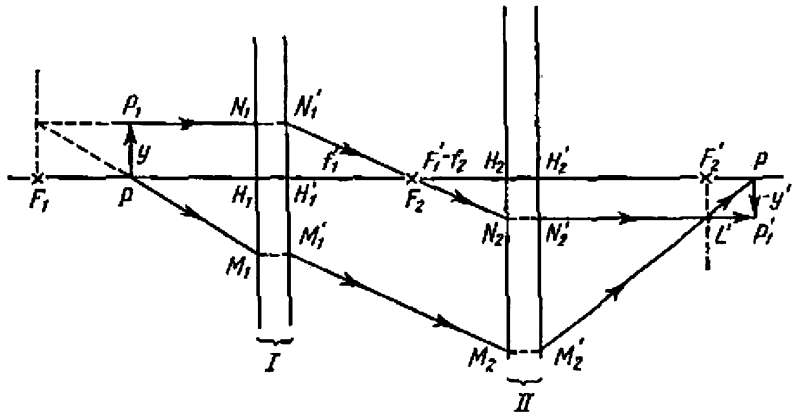

Fig. 253. Construcción de la imagen que produce un sistema telescópico.

H_1, H'_1, y H_2, H'_2 y de los focos F_1, F'_1 y F_2, F'_2 de los sitemas I y II que lo integran.

Estudiemos el caso en que el objeto y se encuentra entre el sistema I y su foco objeto F_1.

Hagamos pasar por el foco principal objeto F_1 del sistema I un plano perpendicular al eje óptico. Este plano lo denominaremos plano focal principal del sistema I (en la fig. 253 se representa por una línea de puntos). Todo punto objeto situado en cualquier lugar de este plano focal después de refractarse en el sistema I dará

un haz de rayos paralelos que formará un ángulo determinado con el eje óptico.

Veamos lo que ocurre con dos rayos que parten del objeto y, eligiéndolos de manera que sus direcciones puedan ser halladas después de experimentar la refracción en el sistema telescópico. Como uno de estos rayos podemos tomar el P_1N_1, paralelo al eje óptico. Después de refractarse en el sistema I este rayo pasará por su foco principal imagen F_1' e irá a parar a un punto N_2 del plano principal objeto H_2 del sistema II. Como quiera que el foco imagen F_1' del sistema I es al mismo tiempo foco objeto del sistema II, el rayo $N_1'F_1'W_2$ después de refractarse en este último sistema saldrá paralelo al eje óptico.

Como segundo rayo podemos elegir el PM_1, trazado en una dirección tal que su prolongación corte a la prolongación del rayo P_1N_1 en un punto L que se encuentre en el plano focal principal F_1. En estas condiciones el rayo LPM_1 después de refractarse en el sistema I producirá el rayo $M_1'M_2$ paralelo al $N_1'N_2$. Esta circunstancia nos da la posibilidad de hallar la dirección del rayo que resulta del $M_1'M_2$ después de experimentar la refracción en el sistema II. Efectivamente, como los rayos $M_1'M_2$ y $N_1'N_2$ son paralelos entre sí, después de la refracción en el sistema II deberán cortarse en el punto L' del plano focal principal F_2'. De esta forma hallamos la dirección del rayo $M_2'L'$ producido por el PM_1 después de refractarse en el conjunto del sistema telescópico. Este rayo $M_2'L'$ cortará al eje óptico en el punto P', que será la imagen del punto P. La imagen del segundo punto del objeto que examinamos, es decir, la del punto P_1, es fácil de encontrar razonando que deberá encontrarse en la intersección del rayo $N_2'L'$ con la recta y', trazada por el punto P' perpendicularmente al eje óptico. El punto P_1' de intersección de las dos rectas antedichas será la imagen del P_1. La imagen del objeto y en su conjunto será el segmento $-y'$.

Por la fig. 253 es fácil determinar el aumento lateral β que produce el sistema telescópico. Teniendo en cuenta que, por la construcción, $y = H_1'N_1'$ y que $-y' = H_2N_2$, obtenemos:

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{H_2N_2}{H_1'N_1'}.$$

Además, por los triángulos $H_1'N_1'F_1'$ y $H_2N_2F_1'$ tenemos que

$$\frac{H_2N_2}{H_1'N_1'} = \frac{-f_2}{f_1'},$$

siendo f_1' y f_2 respectivamente la distancia focal imagen del sistema I y la distancia focal objeto del sistema II. Como resultado tenemos que el aumento lateral del sistema telescópico será:

$$\beta = \frac{f_2}{f'};$$

y si el sistema se encuentra en el aire, $f_2 = -f'_2$ y

$$\beta = -\frac{f'_2}{f_1}, \qquad (1)$$

donde f'_2 es la distancia focal imagen del sistemá *II*. Por la fórmula (1) vemos que el aumento lateral del sistema telescópico viene determinado exclusivamente por la relación que existe entre las distancias focales principales de los sistemas que lo componen y no depende de la posición del objeto. Cualquiera que sea el lugar en que se encuentren el objeto y su imagen el aumento lateral de un sistema telescópico dado tiene siempre un mismo valor.

El aumento angular γ del sistema telescópico puede hallarse, basándose en la fórmula (6) del § 316, según la cual

$$\gamma = \frac{n}{n'}\frac{1}{\beta}. \qquad (2)$$

Si nuestro sistema telescópico se encuentra en el aire, $n = n' \cong 1$, y por las fórmulas (2) y (1):

$$\gamma = -\frac{f'_1}{f'_2}, \qquad (3)$$

es decir, el aumento angular del sistema telescópico es numéricamente tanto mayor cuanto mayor sea la distancia focal principal del primer sistema y menor la distancia focal principal del segundo sistema.

§ 321. Defectos de los sistemas ópticos y procedimientos para corregirlos. Hasta ahora nos hemos limitado a estudiar los rayos paraxiales, es decir, aquellos que forman ángulos u pequeños con el eje óptico. En estos casos un objeto puntual produce con suficiente aproximación una imagen también puntual. Pero los valores pequeños de los ángulos u obligan a operar exclusivamente con haces luminosos comprendidos dentro de los límites de ángulos sólidos estrechos. La estrechez de los haces luminosos, como veremos en el § 324, conduce a su vez a que la iluminación dentro de los límites de la imagen sea pequeña. Por esto, desde el punto de vista práctico interesa emplear ángulos sólidos relativamente anchos, es decir, renunciar a la limitación que impone la condición de que sean paraxiales. Pero como consecuencia de esta renuncia el haz de rayos homocéntrico dejará de serlo después de sufrir la refracción en el sistema y la imagen de un objeto de dimensiones finitas tendrá una serie de defectos. Estudiemos sucintamente estos defectos y las posibilidades de corregirlos.

Tomemos una lente de potencia positiva. Valiéndonos de una pantalla opaca AB (fig. 254, *a*) con un orificio redondo (*diafragma* circular) aislemos un haz de rayos paraxiales procedentes de la fuente puntual P. Supongamos que los rayos de este haz se cortan en el punto P' situado a una distancia s' de la lente. Sustituyamos ahora el dia-

fragma circular por otro en forma anular CD, EG (fig. 254, *b*). Este diafragma anular dejará pasar el haz de rayos marginales procedentes también de la fuente puntual P, comprendido entre los conos DPE y CPG. Los rayos marginales sufren una refracción relativamente mayor y, aunque la fuente P permanezca en el mismo sitio, su imagen

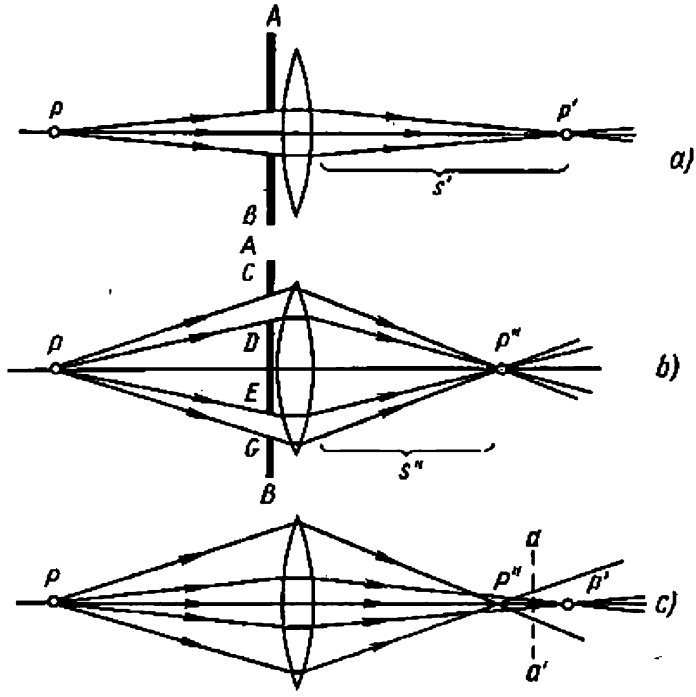

Fig. 254. Origen de la aberración esférica:
El foco de los rayos paraxiales (*a*) está más lejos que el foco de los rayos marginales (*b*).

P'' se encontrará ahora a una distancia s'' menor que s'. La distancia $\delta s = s'' - s'$ se llama *aberración esférica axial*. La existencia de la aberración esférica axial hace que la imagen carezca de nitidez. Efectivamente, si sobre la lente representada en la fig. 254, *c* incide un haz de rayos ancho, los rayos que forman ángulos u distintos con el eje óptico lo cortarán en diferentes puntos después de refractados. La sección del haz refractado por cualquier plano aa' toma la forma de un círculo de dimensiones finitas. Estas dimensiones serán mínimas en un punto medio determinado situado entre los focos P'' y P' de los rayos marginales y paraxiales.

En las lentes convergentes la aberración esférica axial $\delta s = s'' - s'$ es negativa.

En las lentes de potencia negativa (divergentes) los rayos marginales se refractan relativamente menos que los paraxiales, es decir, el foco de los rayos marginales se encuentra más lejos que el de los

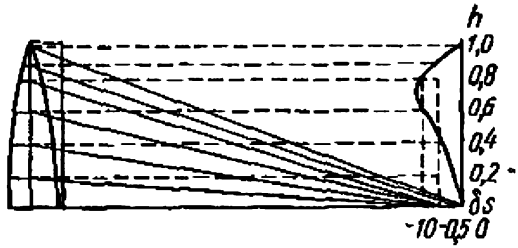

Fig. 255. Lente compuesta corregida de la aberración esférica.

rayos paraxiales, y la aberración esférica axial $\delta s = s'' - s'$ es positiva. Esta circunstancia da la posibilidad de corregir la aberración esférica de los sistemas combinando lentes convergentes y divergentes, cuyas aberraciones tienen signos distintos.

En la fig. 255 se representa un sistema formado por dos lentes (solamente se ve la mitad superior), una de las cuales es convergente

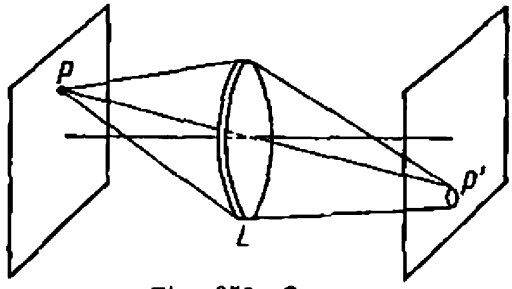

Fig. 256. Coma.

y la otra divergente. Las potencias de estas lentes se han elegido de tal manera que la lente compuesta que forman tiene potencia positiva. En la parte derecha de la fig. 255 se da la gráfica de la aberración esférica axial δs de la lente compuesta que examinamos para los rayos que pasan por ella a diferentes distancias h del eje óptico. La aberración axial ha sido compensada totalmente para los rayos marginales; para los rayos intermedios sigue existiendo una pequeña aberración residual.

La aberración axial puede estar totalmente corregida para los haces procedentes de un punto objeto situado en el eje óptico del sistema pero seguir existiendo para los objetos puntuales que se encuentran fuera de dicho eje. En este caso la sección del haz no axial por un plano perpendicular al eje óptico (fig. 256) toma la forma de man-

cha alargada parecida a un cometa. Por esta razón la aberración que afecta a los haces que no proceden de puntos situados sobre el eje recibe el nombre de *coma*, del griego κόμα que significa cabellera o cometa («estrella con cola»).

La aberración de coma no existe en aquellos sistemas corregidos de aberración esférica en que se cumple la llamada *condición de los senos* (o de Abbe). Esta condición se reduce a lo siguiente:

$$ny \operatorname{sen} u = n'y' \operatorname{sen} u' \qquad (1)$$

(véase la letra pequeña al final del párrafo).

Los haces refractados por un sistema óptico suelen tener además de las aberraciones antedichas la que se llama *astigmatismo* (§ 313).

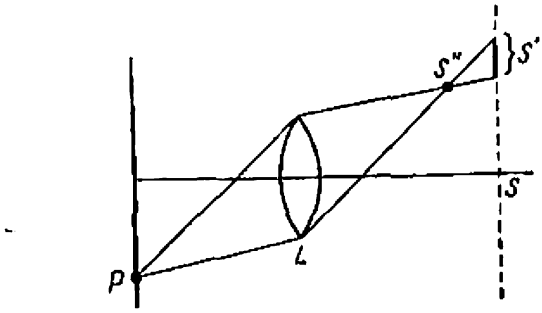

Fig. 257. Astigmatismo de los haces no axiales.

El astigmatismo puede existir incluso cuando se trata de haces estrechos, si es que éstos no proceden de puntos situados en el eje óptico. Estos haces astigmáticos producen dos líneas focales (fig. 257), una S', que se encuentra en el plano del dibujo (línea focal de las secciones sagitales o focal sagital), y otra S'', perpendicular al plano del dibujo (línea focal de las secciones meridianas, focal meridional o focal tangencial). La distancia entre las dos líneas focales S' y S'' es la diferencia astigmática. Cuando existe astigmatismo la imagen de un objeto puntual tiene la forma de una raya corta o de un círculo poco nítido (entre las dos focales).

El astigmatismo se manifiesta claramente cuando la imagen que se obtiene sobre una pantalla perpendicular al eje óptico es la de un objeto formado por líneas radiales y por una serie de circunferencias concéntricas centradas sobre el eje y situadas en un plano perpendicular a él. Si la pantalla se coloca en el plano de los focos de las secciones meridianas (focales S'') el objeto toma el aspecto representado en la fig. 258, *a*. Las circunferencias darán imágenes nítidas, ya que las líneas focales al superponerse unas a otras no las deforman, pero las imágenes de los radios no son claras, siendo su nitidez tanto menor cuanto mayores son las distancias que separan del centro a los puntos de los radios. Si la pantalla se coloca en el plano de los focos

de las secciones sagitales (focales S') se obtiene la figura representada en la fig. 258, *b*. En este caso las imágenes de los radios son nítidas,

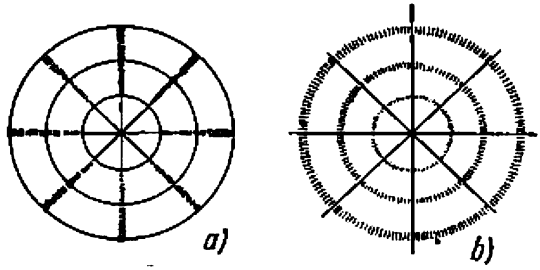

Fig. 258. Deformaciones de las imágenes debidas al astigmatismo: *a*, en el foco de las secciones meridianas; *b*, en el foco de las secciones sagitales.

mientras que las de las circunferencias no lo son, con la particularidad de que cuanto más lejos del centro se encuentran estas últimas menor es su nitidez.

El astigmatismo de un sistema puede corregirse eligiendo convenientemente los radios de curvatura y la potencia de las superfi-

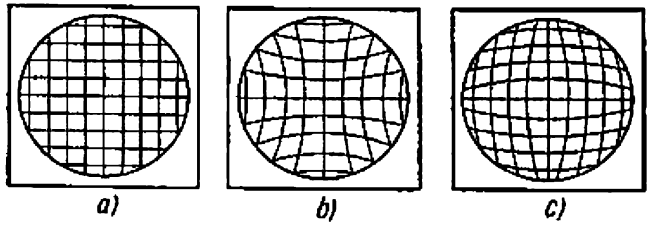

Fig. 259. Distorsión.

cies refringentes. Los sistemas corregidos de astigmatismo se llaman *anastigmáticos*.

Además de los tres defectos indicados (aberración esférica, coma y astigmatismo) existen otros, como la *curvatura de campo* de la imagen y la *distorsión*. La curvatura de campo consiste en que a un objeto plano perpendicular al eje del sistema le corresponde una imagen en forma de superficie curva. La *distorsión* es una deformación producida por la desigualdad del aumento lateral dentro de los límites del conjunto del campo de la imagen. Como resultado de la distorsión se altera la semejanza geométrica entre el objeto y su imagen. Si el objeto es una red de mallas cuadradas situada en un plano perpendicular al eje óptico (fig. 259, *a*), su imagen tendrá la forma de red de líneas curvas. Cuando el aumento crece al alejarse del eje, la imagen tiene la forma representada en la fig. 259, *b* (distorsión en corsé), mientras que si el aumento disminuye al

alejarse del eje la imagen tendrá el aspecto representado en la fig. 259, *c* (distorsión en barril). En la mayoría de los instrumentos de observación visual la distorsión no tiene gran importancia, pero cuando la imagen se utiliza para mediciones de precisión (mediciones geodésicas, fotografía aérea, etc.) se necesitan sistemas corregidos de distorsión.

Según el principio de Fermat (§ 253) todo rayo luminoso que se propaga entre dos puntos cumple la condición de que la longitud del camino óptico que recorre es extrema. Entre dos puntos solamente pueden pasar varios rayos si las longitudes de sus caminos ópticos son iguales. Por esto si una lente produce una imagen puntual P' de un objeto puntual P (fig. 260) quiere decir que los caminos

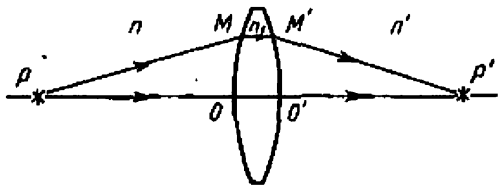

Fig. 260. Igualdad de los caminos ópticos de los rayos que parten de un punto objeto y que convergen en un punto imagen.

ópticos de todos los rayos que salen del objeto P y que convergen en la imagen P' son iguales. Recordemos que se llama camino óptico el producto del camino geométrico por el índice de refracción del medio en que se propaga el rayo. Supongamos que el índice de refracción del material de que está hecha la lente es n_1 y que a la derecha y a la izquierda de ella se encuentran dos medios cuyos índices de refracción respectivos son n y n'. En estas condiciones la longitud óptica del rayo $POO'P'$ será:

$$L_1 = n \cdot PO + n_1 \cdot OO' + n' \cdot O'P'.$$

De la misma forma obtendremos que el camino óptico del rayo $PMM'P'$ será:

$$L_2 = n \cdot PM + n_1 \cdot MM' + n' \cdot M'P'.$$

La igualdad de los dos caminos ópticos tomará la forma

$$n \cdot PO + n_1 \cdot OO' + n' \cdot O'P' = n \cdot PM + n_1 \cdot MM' + n' \cdot M'P'; \qquad (2)$$

esta igualdad puede cumplirse puesto que los tres índices de refracción n, n_1 y n' no son iguales entre sí. De esta forma, a pesar de que las longitudes geométricas de los rayos sean distintas, sus longitudes (caminos) ópticos pueden resultar iguales.

La igualdad de los caminos ópticos de los rayos significa que las vibraciones luminosas que se propagan a lo largo de todos los rayos *convergen en la imagen P' en concordancia de fase*.

Efectivamente, desde el punto objeto P todas las vibraciones salen en una misma fase. Queda por determinar cuáles serán las variaciones que experimentan las fases al propagarse las vibraciones desde el punto P hasta el P'. En la sustancia homogénea de la parte cuya longitud geométrica es l_i la fase de las vibraciones variará en una magnitud $\Delta_i = 2\pi \frac{l_i}{\lambda_i}$, donde λ_i es la longitud de onda en dicha sustancia. Por lo tanto, cuando el rayo recorre el camino $POO'P'$ la fase

varía en la magnitud

$$\Delta_1 = 2\pi \left(\frac{PO}{\lambda} + \frac{OO'}{\lambda_1} + \frac{O'P'}{\lambda'} \right), \qquad (3)$$

siendo λ, λ_1 y λ' las longitudes de onda correspondientes a las sustancias dentro de cuyos límites se encuentran los segmentos PO, OO' y $O'P'$. Llamando λ_0 a la longitud de onda en el vacío, tendremos:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n_1} \quad \text{y} \quad \lambda' = \frac{\lambda_0}{n'}.$$

Poniendo estos valores de λ, λ_1 y λ' en (3), obtenemos:

$$\Delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n \cdot PO + n_1 \cdot OO' + n' \cdot O'P').$$

De la misma forma hallamos que cuando el rayo recorre el camino $PMM'P'$ la fase variará en la magnitud Δ_2:

$$\Delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n \cdot PM + n_1 \cdot MM' + n' \cdot M'P').$$

Comparando las expresiones obtenidas para Δ_1 y Δ_2 con la igualdad (2), hallamos que

$$\Delta_1 = \Delta_2.$$

Esta igualdad indica que la variación de fase que tiene lugar a lo largo de cualquier rayo que vaya desde el punto P hasta el P' es la misma. Por consiguiente, todos los rayos convergen en el punto P' en la misma fase.

En el caso en que el objeto tiene dimensiones finitas la imagen será nítida si los caminos ópticos de los rayos entre cada par de puntos conjugados del

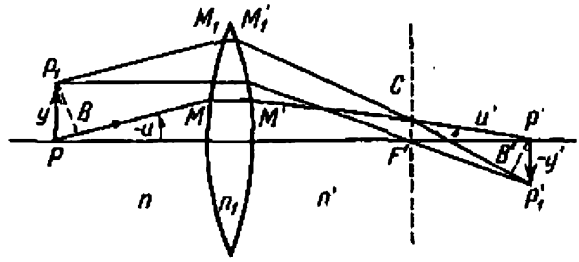

Fig. 261. Esquema para deducir la condición de los senos.

objeto y de su imagen son iguales. Examinemos otra vez el caso de una lente, hecha de material cuyo índice de refracción sea n_1, que se encuentre entre dos medios cuyos respectivos índices de refracción sean n y n' (fig. 261). Tomemos dos puntos P y P_1 del objeto y supongamos que sus imágenes son los puntos P' y P_1'. Admitamos que los puntos P y P_1 están cerca el uno del otro y que los puntos P' y P_1' también lo están. Veamos lo que ocurre con los rayos $PMM'P'$ y $P_1M_1M_1'P_1'$ cuyos segmentos PM y P_1M_1 son paralelos entre sí. Estos dos rayos se cortan en el punto C del plano focal imagen F'. Tracemos desde los puntos P_1 y P' las rectas P_1B y $P'B'$; perpendiculares respectivamente a los segmentos PM y $M_1'P_1'$. Si por los puntos P_1 y B pasara una onda plana (cuyos puntos vibran en concordancia de fase) los rayos normales a la superficie de esta onda llegarían al foco C también en concordancia de fase. De esto se deduce que los caminos ópticos de los segmentos $P_1M_1M_1'C$ y $BMM'C$ son iguales. Por

consiguiente, los caminos ópticos de los rayos $PMM'P'$ y $P_1M_1M_1'P_1'$ serán iguales entre sí cuando sean iguales los caminos ópticos de los segmentos PB y $B'P_1'$, es decir, cuando se cumpla la igualdad:

$$n \cdot PB = n' \cdot B'P_1'. \tag{4}$$

Por la fig. 261 tenemos: $PB = y \operatorname{sen}(-u) = -y \operatorname{sen} u$, siendo y la distancia entre los puntos P y P_1 y u el ángulo que forma el rayo PM con el eje óptico. Si la distancia y' entre los puntos P' y P_1' es pequeña, tendremos que aproximadamente $B'P_1' = -y' \operatorname{sen} u'$, donde u' es el ángulo que forma el rayo $M'P'$ con el eje óptico. Poniendo estos valores de PB y $B'P_1'$ en (4), hallamos:

$$ny \operatorname{sen} u = n'y' \operatorname{sen} u', \tag{5}$$

expresión que representa la condición de los senos que indicamos en el texto fundamental del presente párrafo. En el caso en que los rayos sean paraxiales los ángulos u y u' serán pequeños y, aproximadamente, sen $u \cong u$ y sen $u' \cong u'$; en este caso la condición de los senos (5) toma la forma de la invariante de Lagrange-Helmholtz:

$$nyu = n'y'u'.$$

La condición de los senos, en general, se puede aplicar únicamente a un par de planos conjugados del sistema. Este par de planos conjugados se llama *aplanático*.

§ 322. **Aberración cromática.** Hasta ahora hemos supuesto que los índices de refracción de los cuerpos transparentes que forman los sistemas ópticos eran constantes. Esto es cierto únicamente cuando dichos sistemas se iluminan con luz monocromática. Cuando

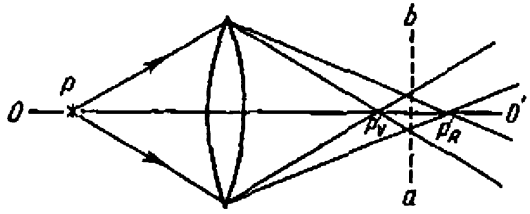

Fig. 262. Origen de la aberración cromática.

la luz tiene una composición compleja hay que tener en cuenta la variación que experimentan los índices de refracción en función de las longitudes de onda. Como ya indicamos en el § 279, en los cuerpos transparentes tiene lugar un aumento monótono de los índices de refracción a medida que disminuyen las longitudes de onda. Por esto una lente ordinaria, por ejemplo, tiene más potencia óptica para los rayos azules que para los rojos. Como resultado de esto, si la fuente emite luz blanca su imagen no será nítida y tendrá los bordes coloreados. Este fenómeno recibe el nombre de *aberración cromática*.

Supongamos que por medio de una lente convergente (fig. 262) se obtiene la imagen de una fuente puntual P de luz blanca. En este

caso la imagen del punto con la luz de los rayos violetas P'_V será la que se encuentra más próxima a la lente, mientras que la imagen que producen los rayos rojos P'_R será la más alejada de ella. Entre estas dos imágenes se encontrarán las originadas por los rayos de los demás colores. Coloquemos un plano ab perpendicular al eje óptico OO' en cualquier lugar situado entre los puntos P'_V y P'_R. En este plano veremos un círculo coloreado borroso en lugar de una imagen puntual. Si tomamos el plano que pasa por el foco de los rayos violetas P'_V, que corta los conos formados por todos los demás rayos (cuyos vértices se encuentran a su derecha), obtendremos un círculo que tendrá por márgenes una franja roja y cuyo centro será de color lila. Si el plano se hace pasar cerca del punto P'_R, el círculo tendrá por márgenes una franja violeta y su centro será de color rojizo.

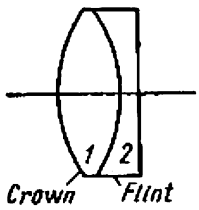

Fig. 263. Lente compuesta corregida de cromatismo.

La aberración cromática puede eliminarse combinando lentes convergentes y divergentes hechas con vidrios de diferentes clases cuyas dispersiones relativas sean distintas (véase la deducción más adelante en este mismo párrafo). La dispersión relativa del llamado vidrio *crown* es menor que la del llamado *flint*. En un sistema compuesto por una lente convergente de vidrio crown (fig. 263) y de una lente divergente de vidrio flint se puede compensar la aberración cromática y al mismo tiempo conseguir que la potencia conjunta de ambas lentes siga siendo positiva. Las lentes de este tipo se llaman *acromáticas*.

Demostremos que es posible construir lentes acromáticas. Para simplificar consideremos que ambas lentes componentes son infinitamente delgadas. Supongamos que los índices de refracción de la primera lente (crown) son: n_{R1}, para los rayos rojos, y n_{V1}, para los rayos violetas. Designemos por medio de $\bar{n}_1$ el índice de refracción para una determinada zona intermedia del espectro (por ejemplo, para la amarillo-verde) y llamemos r_1 y r_2 a los radios de curvatura de las superficies refrengentes de las lentes. En estas condiciones, de acuerdo con lo dicho en el § 319, las potencias Φ_{R1} y Φ_{V1} de la primera lente para los rayos rojos y violetas y su potencia Φ_1 para la zona central del espectro serán respectivamente iguales a:

$$\Phi_{R1}=(n_{R1}-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right),$$

$$\Phi_{V1}=(n_{V1}-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \text{ y } \Phi_1=(\bar{n}_1-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

De estas igualdades se deduce que:

$$\Phi_{R1}=\frac{n_{R1}-1}{\bar{n}_1-1}\Phi_1 \text{ y } \Phi_{V1}=\frac{n_{V1}-1}{\bar{n}_1-1}\Phi_1. \qquad (1)$$

De la misma forma podemos obtener las potencias de la segunda lente (flint) correspondientes a los rayos rojos y violetas:

$$\Phi_{R2}=\frac{n_{R2}-1}{n_2-1}\Phi_2 \text{ y } \Phi_{V2}=\frac{n_{V2}-1}{n_2-1}\Phi_2, \quad (2)$$

donde Φ_2 es la potencia óptica de esta misma lente para la zona central del espectro.

Las potencias correspondientes a los rayos rojos y violetas de la lente compuesta, formada por el conjunto de las lentes primera y segunda, serán respectivamente iguales a

$$\Phi_R=\Phi_{R1}+\Phi_{R2} \text{ y } \Phi_V=\Phi_{V1}+\Phi_{V2}.$$

La lente compuesta carecerá de cromatismo si sus potencias ópticas correspondientes a los rayos rojos y violetas son iguales, es decir, si $\Phi_R=\Phi_V$. Por consiguiente, la condición de acromatismo vendrá expresada por la siguiente igualdad:

$$\Phi_{R1}+\Phi_{R2}=\Phi_{V1}+\Phi_{V2} \text{ o } \Phi_{V1}-\Phi_{R1}=-(\Phi_{V2}-\Phi_{R2}).$$

Poniendo aquí en lugar de las potencias ópticas sus expresiones según (1) y (2), obtenemos:

$$\frac{n_{V1}-n_{R1}}{n_1-1}\Phi_1=-\frac{n_{V2}-n_{R2}}{n_2-1}\Phi_2.$$

Las magnitudes $\frac{n_{V1}-n_{R1}}{n_1-1}$ y $\frac{n_{V2}-n_{R2}}{n_2-1}$ se llaman dispersiones relativas y pueden designarse por medio de ν_1 y ν_2 respectivamente. Entonces la condición de acromatismo del sistema toma la forma definitiva siguiente:

$$\nu_1\Phi_1+\nu_2\Phi_2=0. \quad (3)$$

La potencia óptica Φ del sistema para la zona media del espectro será:

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2. \quad (4)$$

Por las igualdades (3) y (4) hallamos los siguientes valores de las potencias ópticas de las lentes primera y segunda

$$\Phi_1=\frac{\nu_2}{\nu_2-\nu_1}\Phi \text{ y } \Phi_2=-\frac{\nu_1}{\nu_2-\nu_1}\Phi. \quad (5)$$

La dispersión relativa del vidrio flint ν_2 es mayor que la del crown. Por lo tanto la diferencia $\nu_2-\nu_1$ será positiva, y de acuerdo con (5) tendremos: primero, que las potencias de las lentes primera y segunda tienen signos diferentes; segundo, que el valor absoluto de la potencia $|\Phi_1|$ es mayor que el de la potencia $|\Phi_2|$. De esto, y de acuerdo con (4), se deduce que si la primera lente se toma convergente ($\Phi_1>0$) la potencia de la lente compuesta será positiva, con la particularidad de que los focos de esta lente correspondientes a los rayos rojos y violetas coincidirán, es decir, que la lente compuesta estará corregida de cromatismo.

Aunque coincidan los focos de los rayos rojos y violetas puede ocurrir que exista cierta discrepancia entre los focos de los rayos de otros colores, por ejemplo, verdes y rojos. Esto da lugar a la existencia de un cromatismo residual insignificante. Construyendo sistemas más complicados que el que acabamos de estudiar se puede conseguir que coincidan los focos de los rayos de tres colores diferentes, lo que prácticamente conduce a la compensación total del cromatismo (sistema apocromático).

§ 323. Flujo luminoso que pasa por un sistema óptico. Desde el punto de vista práctico tiene gran importancia la luminancia de la imagen que se obtiene con un sistema óptico. Para esclarecer esta cuestión empezaremos por estudiar el caso de una lente delgada AB (fig. 264) sumergida en una sustancia homogénea, por ejemplo, el de una lente de este tipo que se encuentra en el aire. Supongamos que el objeto es una superficie rectangular pequeña ΔS situada perpendicularmente al eje óptico de la lente. La imagen

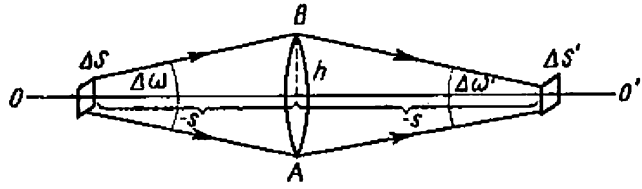

Fig. 264. Esquema para el cálculo del flujo luminoso que pasa a través de una lente.

será una superficie rectangular $\Delta S'$ también perpendicular al eje óptico. Cada uno de los lados de la imagen estará aumentado β veces, siendo β el aumento lateral. Por esto la razón entre la superficie de la imagen y la del objeto será igual al cuadrado del aumento lateral:

$$\frac{\Delta S'}{\Delta S} = \beta^2. \qquad (1)$$

Sea B la luminancia del objeto. En este caso sobre la lente incidirá el flujo luminoso ΔF emitido por la superficie ΔS dentro de los límites del ángulo sólido $\Delta\omega$ bajo el cual se ve la lente AB desde el sitio en que se encuentra la superficie ΔS. Limitándonos al caso de los rayos paraxiales podemos considerar pequeño el ángulo sólido $\Delta\omega$ y entonces, de acuerdo con la fórmula (1) del § 303, el flujo luminoso ΔF podrá representarse de la forma

$$\Delta F = B \cos i \Delta\omega \Delta S.$$

En esta fórmula i es el ángulo que forma el eje del haz con la normal a la superficie ΔS. Como la superficie ΔS es por las condiciones del problema perpendicular al eje óptico de la lente AB, $\cos i = 1$ y, por consiguiente

$$\Delta F = B \Delta\omega \Delta S. \qquad (2)$$

Al pasar por la lente el flujo ΔF disminuye debido a que una parte de sus rayos se refleja y otra es absorbida por el material de la lente. El flujo que sale de la lente AB después de pasar por

ella será:

$$\Delta F' = k\Delta F,$$

donde $k < 1$.

Poniendo en lugar de ΔF su valor según (2) obtenemos el siguiente valor del flujo $\Delta F'$ después de pasar por la lente:

$$\Delta F' = kB\Delta\omega\Delta S. \tag{3}$$

El flujo $\Delta F'$ pasa en su totalidad por la superficie $\Delta S'$, limitada por las dimensiones de la imagen, y está comprendido dentro del ángulo sólido $\Delta\omega'$, bajo el cual se ve la lente AB desde el sitio en que se encuentra la imagen $\Delta S'$. De esta forma a la derecha de la imagen se propagará el flujo luminoso $\Delta F'$ que sale de la superficie $\Delta S'$ comprendido entre los límites del ángulo sólido $\Delta\omega'$. Por lo tanto, la luminancia B' de la superficie $\Delta S'$, de acuerdo con lo dicho en el § 303, será:

$$B' = \frac{\Delta F'}{\cos i' \Delta\omega' \Delta S'}. \tag{4}$$

Como la superficie $\Delta S'$ es perpendicular al eje del haz, cos $i' = 1$ y, de acuerdo con (4), tendremos:

$$\Delta F' = B'\Delta\omega'\Delta S'.$$

Poniendo este valor de $\Delta F'$ en (3), hallamos:

$$B'\Delta\omega'\Delta S' = kB\Delta\omega\Delta S,$$

de donde obtenemos que la luminancia de la imagen será

$$B' = kB\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega'}\frac{\Delta S}{\Delta S'}. \tag{5}$$

Como los ángulos sólidos $\Delta\omega$ y $\Delta\omega'$ son pequeños, aproximadamente tenemos que

$$\Delta\omega = \frac{\pi h^2}{s^2} \quad \text{y} \quad \Delta\omega' = \frac{\pi h^2}{s'^2},$$

donde h es el radio de la circunferencia que limita la lente, y s y s' son las distancias desde la lente al objeto y a la imagen respectivamente. De aquí obtenemos que

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega'} = \frac{s'^2}{s^2},$$

pero como s'/s es igual al aumento lateral β que produce la lente, obtenemos:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega'} = \beta^2.$$

Esta correlación conjuntamente con la (1) da:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega'}\frac{\Delta S}{\Delta S'} = \beta^2\frac{1}{\beta^2} = 1,$$

después de lo cual la fórmula (5) toma el aspecto

$$B' = kB. \qquad (6)$$

Como quiera que el coeficiente k depende exclusivamente de las pérdidas de luz que tienen lugar en la lente, en definitiva tenemos: que si por ambos lados de la lente se encuentran medios que tienen un mismo índice de refracción *la luminancia B' de la imagen viene determinada únicamente por la luminancia del objeto y por las pérdidas que se producen al pasar la luz por la lente*. La luminancia de la imagen no depende de las dimensiones de la lente, ni de su potencia óptica, ni del aumento que produce. Como el coeficiente k es siempre menor que la unidad, la luminancia de la imagen siempre es menor que la del objeto. La luminancia de la imagen solamente puede aproximarse a la del objeto disminuyendo las pérdidas de luz en la lente. Generalmente se utilizan materiales (vidrios) tan transparentes en la zona visibre que las pérdidas de luz se producen principalmente por reflexión en las superficies de la lente. Si el índice de reflexión es r, a través de la primera superficie (dioptrio) de la lente pasará una parte igual a $(1 - r)$ del flujo que sobre ella incide, y a través de ambas superficies pasará una parte igual a $(1 - r)^2$. Por consiguiente, si despreciamos la absorción de la luz por el material de la lente, $k = (1 - r)^2$.

La luminancia de la imagen puede aumentarse solamente si se hace que sean diferentes los índices de refracción de las sustancias que se encuentran a ambos lados de la lente. Si en la parte de espacio en que está el objeto el índice de refracción es igual a n y en la parte en que se encuentra la imagen es igual a n', la igualdad (6) deberá ser sustituida por la igualdad

$$B' = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 kB. \qquad (6a)$$

Todo sistema óptico puede suponerse compuesto por lentes aisladas, por lo tanto las deducciones sacadas conservan su valor con respecto a cualquier sistema óptico. Si el objeto y la imagen producida por el sistema se encuentran en sustancias cuyos índices de refracción son iguales, la luminancia de la imagen será menor que la del objeto cualquiera que sea la estructura del sistema. Para los sistemas compuestos de p superficies refringentes el coeficiente k, despreciando las pérdidas por absorción, será igual a $(1 - r)^p$. Cuando p es grande las pérdidas de luz resultan muy considerables.*

*) Un procedimiento para disminuir las pérdidas por reflexiones puede verse en el § 277.

Cuando se trata de un sistema compuesto hay que tener en cuenta que el flujo luminoso ΔF puede debilitarse también a causa de las limitaciones debidas a las monturas de algunas de las lentes o de los diafragmas (véase el § 324).

Para valorar el efecto de muchos instrumentos ópticos importa conocer no la luminancia de la imagen, sino la iluminación o iluminancia E' que se produce dentro de los límites de dicha imagen. Si $\Delta F'$ es el flujo que sale de la lente y da origen a la imagen, la iluminación

$$E' = \frac{\Delta F'}{\Delta S'}.$$

Poniendo en lugar de $\Delta F'$ su valor según (3), obtenemos:

$$E' = kB\Delta\omega \frac{\Delta S}{\Delta S'}.$$

Teniendo en cuenta que según (1) $\frac{\Delta S}{\Delta S'} = \frac{1}{\beta^2}$, podemos escribir la expresión anterior de la forma

$$E' = kB\frac{\Delta\omega}{\beta^2}. \qquad (7)$$

Por la fórmula (7) vemos que *la iluminación dentro de los límites de la imagen viene determinada por la luminancia del objeto B y depende del ángulo sólido* $\Delta\omega$, *bajo el cual se ve la lente desde el sitio en que se encuentra el objeto, y del aumento lateral* β.

La iluminación E' puede tomar otra forma si se aplica la correlación

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega'} = \frac{s'^2}{s^2},$$

de la que se deduce que

$$\Delta\omega = \Delta\omega' \frac{s'^2}{s^2} = \Delta\omega'\beta^2.$$

Poniendo esta expresión de $\Delta\omega$ en (7), obtenemos:

$$E' = kB\Delta\omega'. \qquad (8)$$

De aquí se deduce que la iluminación dentro de los límites de la imagen viene determinada por el ángulo sólido $\Delta\omega'$ que forman los rayos que salen de la lente y convergen en la imagen.

Cuando el objeto y la imagen se encuentran en medios diferentes, cuyos índices de refracción son respectivamente n y n', la expresión (8) deberá sustituirse por la fórmula:

$$E' = kB\left(\frac{n'}{n}\right)^2\Delta\omega'. \qquad (8a)$$

§ 324. **Pupilas de entrada y de salida.** Cuando se trata de sistemas compuestos el haz luminoso que entra en dicho sistema por la abertura de la primera lente puede verse limitado por las monturas de las otras lentes o por cualquier diafragma. Imaginémonos, por ejemplo, un sistema compuesto por dos lentes infinitamente delgadas, cuyos diámetros D son iguales, que se encuentran separadas entre sí por una distancia d (fig. 265). Si una fuente puntual P se encuentra entre la primera lente y su foco objeto F_1, solamente una parte de los rayos que deja pasar esta primera lente atravesarán la segunda. Por lo tanto, a través del sistema pasará el flujo omitido por la fuente dentro de los límites del ángulo sólido $\Delta\omega$, que es

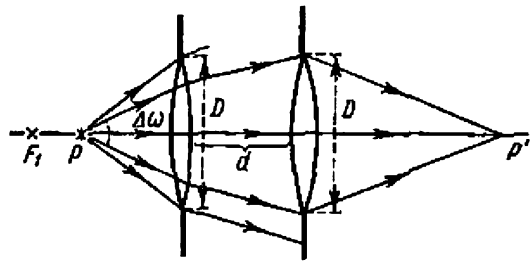

Fig. 265. Haz de luz que pasa por dos lentes.

menor que el ángulo sólido bajo el cual se ve la primera lente desde el sitio en que se encuentra el objeto P. Si la fuente P se encontrara más allá del foco objeto F_1, el haz que saldría de la primera lente sería convergente y la segunda lente no quedaría cubierta completamente por la luz. El ángulo sólido $\Delta\omega'$ que formarían los rayos al salir de la segunda lente sería menor que el ángulo sólido bajo el cual se veía esta lente desde el sitio en que se encontrara la imagen.

Los diafragmas se incluyen en los sistemas para disminuir las aberraciones o para aumentar la nitidez de las imágenes que producen en un mismo plano objetos que se encuentran a diferentes distancias de dicho sistema. Cuando existen diafragmas por regla general son éstos y no las monturas de las lentes los que limitan los haces.

La montura o diafragma que limita los haces de rayos que pasan a través del sistema se llama *diafragma real* o *de abertura*. Antes de exponer el procedimiento para hallar el diafragma real estudiaremos un sistema elemental formado por una lente infinitamente delgada L y por un diafragma AB (fig. 266). Supongamos que la distancia que hay entre el diafragma y la lente es menor que la distancia focal imagen f' de esta última. Consideremos que el diámetro D_1 del diafragma es menor que el D de la lente. Si una fuente

luminosa puntual se encuentra en el foco objeto F de la lente los rayos FM y FN, como puede verse en la figura, serán los que limitan el haz de rayos emitidos por el punto F que pasan por el diafragma. En la prolongación de los rayos FM y FN se encuentra la imagen virtual $A'B'$ del diafragma AB producida por la lente L. De esta forma el ángulo sólido $\Delta\omega$ dentro de cuyos límites se encuentran los rayos procedentes del punto F que pasan por el sistema es igual al ángulo sólido bajo el cual se ve la imagen del diafragma $A'B'$ desde el sitio en que está la fuente. En este caso el ángulo

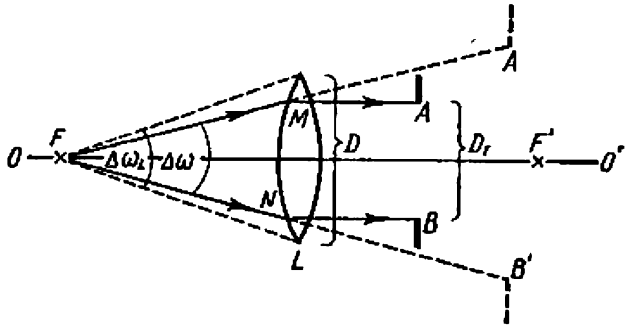

Fig. 266. Diafragma real.

$\Delta\omega$ es menor que el $\Delta\omega_L$ bajo el cual se ve la montura de la lente L desde el sitio en que está la fuente. Por consiguiente el diafragma AB es un diafragma real o de abertura. Pero si el diámetro D_1 del diafragma fuera mayor que el D de la lente el ángulo $\Delta\omega_L$ resultaría menor que el $\Delta\omega$ y el diafragma real sería la montura de la lente L.

De lo expuesto se deduce el procedimiento para hallar el diafragma real de cualquier sistema. Este procedimiento consiste en obtener las imágenes de todas las monturas y diafragmas producidas por los elementos del sistema que preceden al diafragma o la montura dada (tomados en la dirección que siguen los rayos procedentes de la fuente). Entre estas imágenes hay que incluir la montura de la primera lente del sistema. El diafragma real será aquel cuya imagen se vea bajo el menor ángulo sólido $\Delta\omega$, desde el punto en que está el objeto. La imagen del diafragma real que producen los elementos del sistema anteriores a él recibe el nombre de *pupila de entrada*.

De la misma forma puede introducirse el concepto de *pupila de salida* construyendo la imagen del diafragma real que producen los elementos del sistema posteriores a él.

El ángulo que forman los rayos trazados desde el objeto (situado en el eje del sistema) a los extremos del diámetro de la pupila de entrada se llama *ángulo de abertura de entrada*. Por analogía, el

ángulo que forman los rayos trazados desde el sitio en que se encuentra la imagen del objeto a los extremos del diámetro de la pupila de salida se llama *ángulo de abertura de salida*.

El ángulo sólido bajo el cual se ve la pupila de entrada desde el sitio en que se encuentra el objeto es el ángulo $\Delta\omega$ dentro de cuyos límites queda comprendido el haz luminoso emitido por el objeto y que pasa por el sistema. De la misma forma el ángulo sólido bajo el cual se ve la pupila de salida desde el sitio en que se produce la imagen es el ángulo sólido $\Delta\omega'$ que limita el haz luminoso que sale del sistema y converge en la imagen. Estos ángulos sólidos $\Delta\omega$ y $\Delta\omega'$ son precisamente los que deben entrar en las fórmulas (7) y (8) del § 323, que determinan la iluminación dentro de los límites de la imagen.

Cuando se trata de una sola lente infinitamente delgada las pupilas de entrada y salida coinciden con la montura de la lente.

Como ejemplo examinemos el ocular de Huygens cuyo esquema se dio a conocer en el § 319. Supongamos que entre las lentes L_1 y L_2 que forman el ocular

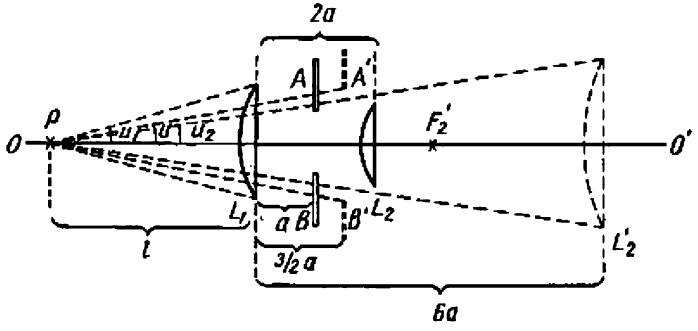

Fig. 267. Pupila de entrada del ocular de Huygens.

se encuentra un diafragma circular AB (fig. 267). Hallemos las pupilas de entrada y de salida y el ángulo de abertura de salida para el foco imagen de la segunda lente del ocular.

Recordemos que el ocular de Huygens consta de dos lentes cuyas distancias focales f_1' y f_2' cumplen la correlación $f_1' = 3f_2' = 3a$; la distancia entre las lentes $d = 2a$. Las lentes del sistema se consideran infinitamente delgadas.

Determinemos las posiciones de las imágenes del diafragma AB y de la montura de la lente L_2 que produce la lente L_1. La potencia de la lente L_1 es $\Phi_1 = \frac{1}{3a}$.

Llamando s y s' a las posiciones del objeto y de su imagen respectivamente con relación a la lente L_1, obtendremos (véase el § 319):

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s} = \Phi_1,$$

de donde hallamos que

$$s' = \frac{s}{1 + \Phi_1 s} \tag{1}$$

De acuerdo con las condiciones, la distancia entre el diafragma AB y la primera lente es igual a a, por lo tanto $s = -a$, y, por (1), tenemos:

$$s' = \frac{-a}{1 - \frac{a}{3a}} = -\frac{3}{2}a;$$

en estas condiciones el aumento lateral β será:

$$\beta = \frac{s'}{s} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}.$$

De esta forma la imagen del diafragma AB producida por la lente L_1 se encuentra entre las lentes y a la distancia de $\frac{3}{2}a$ de la primera. Llamando D al diámetro del diafragma, el diámetro de su imagen será $D' = \frac{3}{2}D$.

La montura de la lente L_2 se encuentra a la distancia $2a$ de la primera lente, por lo tanto, para ella $s = -2a$ y, por (1), obtenemos:

$$s' = \frac{-2a}{1 - \frac{2a}{3a}} = -6a;$$

en este caso el aumento lateral $\beta = 3$. Por consiguiente la imagen de la montura de la segunda lente se encuentra a la derecha de la primera lente, a una distancia de ella igual a $6a$, y tiene un diámetro $D_2 = 3D_2$, siendo D_2 el diámetro de dicha lente.

Tomemos un punto P situado a la izquierda del sistema y a una distancia l de su primera lente. Para hallar la pupila de entrada hay que comparar entre sí los ángulos $2u_1$, $2u$ y $2u_2$ bajo los cuales se ven respectivamente desde el punto P la montura de la primera lente (cuyo diámetro llamaremos D_1), la imagen del diafragma AB y la de la montura de la lente L_2, producidas ambas por la lente L_1.

La pupila de entrada puede ser la montura de la lente L_1 o la imagen del diafragma o de la lente L_2, según cuál de los ángulos u_1, u o u_2 sea el menor. Si el punto P, con respecto al cual se determina la pupila de entrada, se encuentra a una distancia l de la primera lente mucho mayor que la que hay entre las dos lentes, como puede verse en la fig. 267, tienen lugar las siguientes igualdades:

$$\operatorname{tg} u_1 = \frac{1}{2}\frac{D_1}{l}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{1}{2}\frac{3D}{2l}, \quad \operatorname{tg} u_2 = \frac{1}{2}\frac{3D_2}{l}. \tag{2}$$

De las correlaciones (2) se deduce que si los diámetros de las lentes L_1 y L_2 satisfacen las desigualdades

$$D_1 > \frac{3}{2}D, \quad D_2 > \frac{1}{2}D,$$

la pupila de entrada será la imagen del diafragma producida por la primera lente. En este caso el diafragma real o de abertura será el diafragma AB.

La pupila de salida la hallaremos suponiendo que el diafragma AB es el real. Este diafragma se encuentra en el plano focal objeto de la lente L_2, de donde obtenemos que la pupila de salida se encuentra en el infinito. Esta pupila

se ve desde el foco imagen F_2' de la lente L_2 (fig. 268) bajo el mismo ángulo u' que forman los rayos que salen de las márgenes del diafragma AB paralelamente al eje óptico al converger en el foco imagen F_2' de la lente L_2. Por consiguiente el ángulo de abertura $2u'$ que buscábamos vendrá determinado por la igualdad

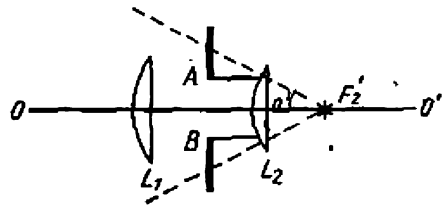

Fig. 268. Pupila de salida del ocular de Huygens.

$$\operatorname{tg} u' = \frac{D/2}{a} = \frac{D}{2a}.$$

§ 325. **Sistema óptico del ojo.** La estructura general del ojo humano fue expuesta en el § 305. Estudiemos ahora el sistema óptico del ojo, que sirve para formar en la retina la imagen real de los objetos que se observan. El sistema refringente del ojo está formado por la superficie convexa de la córnea (§ 305), el cristalino, el humor acuoso y el humor vítreo que llena el ojo. En el ojo la imagen se forma en una sustancia (humor vítreo) diferente de aquella en que se encuentra el objeto que se observa (aire). Por esta razón las distancias focales objeto e imagen del ojo son diferentes. El cristalino es un cuerpo no homogéneo cuya parte exterior tiene un índice de refracción igual a 1,38, mientras que la interior tiene un índice igual a 1,41. La potencia óptica del cristalino se puede variar modificando la curvatura de sus superficies mediante la acción de los músculos ciliares. Con la variación de la potencia óptica del cristalino se consigue enfocar nítidamente sobre la retina las imágenes de los objetos que se encuentran a distintas distancias del ojo. Este proceso se llama *acomodación*.

La pupila de entrada del ojo casi coincide con su pupila real. Mediante el iris puede variarse el diámetro de la pupila, con lo cual se regula la magnitud del flujo luminoso que entra en el ojo: cuando la iluminación es pequeña la pupila se dilata y cuando es grande se contrae.

El sistema óptico del ojo suele presentar discrepancias individuales considerables de unas a otras personas. Para dar una característica general puede utilizarse un modelo simplificado intermedio (llamado *ojo reducido*) cuyas constantes son las siguientes:

poder refractor	58,64D
situación del plano principal objeto (a partir del vértice de la córnea)	+1,348 mm

situación del plano principal imagen (a partir del vértice de la córnea)	+1,602 mm
distancia focal objeto	−17,1 mm
distancia focal imagen	+22,8 mm

Las posiciones que ocupan los planos principales (H y H') y los focos principales (F y F') se muestran en la fig. 269).

Los puntos límites entre los cuales es posible la acomodación se llaman *punto remoto* o *alejado* y *punto próximo*. Para el ojo normal el punto remoto se encuentra en el infinito y el punto próximo a una

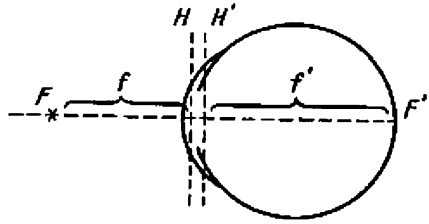

Fig. 269. Planos y focos principales del ojo.

distancia aproximada de 20 cm. Las personas jóvenes pueden acomodar el ojo para ver objetos a distancias más cortas (10-15 cm). A medida que aumenta la edad disminuye la facultad de acomodar el ojo sobre objetos próximos.

Los casos en que el sistema óptico del ojo presenta los defectos llamados miopía e hipermetropía son frecuentes. El *ojo miope* tiene más potencia óptica que el normal y su punto remoto no se encuentra en el infinito, sino a una distancia finita del ojo (cuando la miopía es fuerte, a una distancia de 1,5-1 m o todavía menor). Para el *ojo hipermétrope* el punto próximo se encuentra a una distancia mayor de 20 cm, mientras que el punto remoto se halla detrás del ojo; esto significa que el ojo hipermétrope es capaz de enfocar sobre la retina, no sólo los haces de rayos paralelos, sino también los de rayos convergentes. El ojo hipermétrope tiene menos potencia óptica que el normal.

El sistema óptico del ojo tiene una serie de defectos, como son: aberración esférica, coma y una considerable aberración cromática. Pero estos defectos influyen poco en el carácter de la percepción subjetiva de los objetos que se observan como resultado de las peculiaridades fisiológicas del proceso de visión.

Como indicamos en el § 305, el ojo distingue gran cantidad de detalles cuando la imagen del objeto incide sobre la mancha amarilla de la retina, sobre todo si cae en la fóvea central. La mancha amarilla tiene dimensiones pequeñas y sobre ella inciden las imágenes de los objetos que se ven bajo un ángulo no mayor de 6-7°. Pero el campo total que percibe el ojo tiene unas dimensio-

nes angulares de cerca de 130° en dirección vertical y de 160° en dirección horizontal. La agudeza visual o poder separador del ojo normal dentro de los límites de la mancha amarilla es igual aproximadamente a 1'. Esto significa que el ojo puede distinguir separadamente dos puntos luminosos entre los cuales exista una distancia angular de 1'; son frecuentes los casos de mayor agudeza visual, que llega a alcanzar 30" y hasta 10". A medida que nos alejamos del centro de la mancha amarilla el poder separador disminuye rápidamente: a un ángulo de 60°, con respecto a la dirección de la fóvea central, la agudeza visual es igual aproximadamente al 0,02 de la que se observa dentro de los límites de la mancha amarilla. Con la visión nocturna la agudeza visual es considerablemente menor (hasta 10 veces) que con la diurna.

Con la iluminación diurna el ojo distingue el mayor número de detalles cuándo el objeto se halla de él a una distancia algo mayor que la del punto próximo. Generalmente esta distancia se toma igual a 25 cm y se llama *distancia de visión perfecta*.

La sensación visual no alcanza su intensidad máxima inmediatamente después que la luz comienza a actuar sobre la retina ni desaparece inmediatamente después de cesar la acción de la luz. La sensación visual persiste cerca de 1/10 de s después de que la luz deja de incidir en el ojo. A esto se debe que las fuentes de luz intermitente cuya frecuencia es mayor de 10 destellos por segundo parezca que brillan continuamente.

Consecuencia de las peculiaridades fisiológicas del ojo es que manteniendo a éste fijo podamos percibir un campo anchuroso con poca cantidad de detalles y una zona pequeña del mismo (correspondiente a la mancha amarilla) con gran abundancia de ellos. El proceso de la visión se reduce a «observar» sucesivamente los objetos, lo cual tiene gran importancia fisiológica, puesto que permite en cada instante fijar la atención sobre un número limitado de objetos, al mismo tiempo que se recibe una orientación menos detallada del medio circundante. El proceso general de la visión es un acto muy complejo en el que desempeñan un papel determinado la memoria, las percepciones de otros órganos, etc. En muchos casos la relación geométrica que existe entre las imágenes de los objetos que se perciben no corresponde a su relación geométrica real. Estos casos se conocen con el nombre de «ilusiones ópticas». En la fig. 270 pueden verse dos líneas horizontales de trazo grueso de cuyos extremos salen formando ángulos diferentes unas líneas más delgadas. La recta de trazo grueso superior parece más larga que la inferior. No obstante las dos rectas de trazo grueso tienen la misma longitud, cosa que puede comprobarse fácilmente marcando sus longitudes sobre una tira de papel.

La mancha amarilla está situada un poco a un lado del punto de intersección del eje óptico del ojo con la retina. Por esto, al fijar el

ojo sobre un objeto cualquiera dirigimos hacia él, no el eje óptico, sino la recta que pasa por el punto nodal del ojo y por el centro de la mancha amarilla. Esta recta se llama *línea de visión directa*. En el

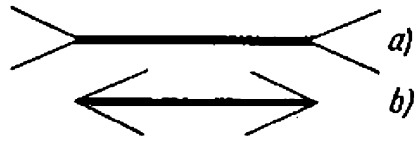

Fig. 270. Ejemplo de «ilusión óptica»: la recta *b* parece más corta que la *a*.

proceso de la visión desempeña un papel muy importante la observación de los objetos con ambos ojos. Al mirar a cualquier objeto P (fig. 271) hacemos girar los ojos de forma que las dos líneas de visión directa pasen por dicho objeto. Al ocurrir esto todos los demás objetos, situados más cerca o más lejos que el P, se representan dobles. Debido a la *visión binocular* podemos apreciar la distancia que hay desde los objetos hasta el ojo. Esta apreciación, que no tiene nada de arbitraria, se realiza por medio del ángulo en que se giran los ojos. Sean, por ejemplo, las líneas de visión directa O_1A_1 y O_2A_2 (fig. 271) las que corresponden a la observación de un objeto muy lejano. En este caso las dos líneas serán prácticamente paralelas entre sí. Pero si se observa un objeto P situado a una distancia finita l sobre la recta O_1A_1 el ojo derecho tiene que girar un poco. El ángulo ε que forman las rectas O_2A_2 y O_2P se llama *ángulo de paralaje*. Este ángulo ε se relaciona con la distancia l por medio de la correlación:

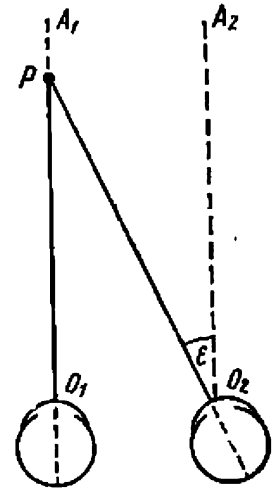

Fig. 271. Visión binocular.

$$l = \frac{b}{\varepsilon}, \qquad (1)$$

donde b es la distancia entre los puntos nodales de los ojos. La visión binocular que permite apreciar las distancias por medio del ángulo de paralaje ε se llama *visión estereoscópica*. La visión estereoscópica tiene lugar cuando los ángulos de paralaje ε superan un determinado valor mínimo $\varepsilon_{mín}$. Generalmente $\varepsilon_{mín} = 1'$, pero para muchas personas $\varepsilon_{mín}$ tiene un valor más pequeño y a veces alcanza incluso hasta $10''$. El ángulo de paralaje de $1'$ corresponde a una distancia $l \cong 220$ m. Por lo tanto el efecto estereoscópico se observa únicamente en objetos que se encuentran a distancias no mayores de 220-250 m del ojo. El juicio que nos formamos de la

distancia a que se encuentran los objetos más lejanos se basa en una serie de observaciones indirectas, como las dimensiones angulares visuales de los objetos conocidos, la cantidad de detalles que se distinguen, etc.

Para convencerse del papel que desempeña la visión estereoscópica cuando se observan objetos próximos basta realizar el siguiente experimento: cójase un lápiz con cada mano y hágase que coincidan sus puntas. Esto es fácil de conseguir cuando se mira con los dos ojos, pero si se mira con uno sólo es difícil.

§ 326. **Luminancia subjetiva.** La sensación subjetiva de *luminancia (brillo) viene determinada por la iluminancia (iluminación) que percibe la retina* dentro de los límites de la imagen. Supongamos que el objeto que se observa tiene dimensiones finitas. En este caso, según la fórmula (8a) del § 323, la iluminación E' dentro de los límites de la imagen del objeto será:

$$E' = kB\left(\frac{n'}{n}\right)^2 \Delta\omega', \qquad (1)$$

siendo $\Delta\omega'$ el ángulo que forman los rayos al converger desde la pupila del ojo hasta la retina, n y n' los índices de refracción del aire y del humor vítreo respectivamente y B la luminancia (brillo) fotométrica del objeto.

Llamando d al diámetro de la pupila y sabiendo que la distancia desde ésta hasta la retina es aproximadamente igual a la distancia focal imagen f' del ojo, tendremos aproximadamente que el ángulo sólido

$$\Delta\omega' = \frac{\pi \cdot d^2}{4f'^2}.$$

Poniendo este valor de $\Delta\omega'$ en (1), hallamos que

$$E' = \frac{k\pi}{4}\left(\frac{n'}{n}\right)^2\left(\frac{d}{f'}\right)^2 B. \qquad (2)$$

Para un ojo determinado y unas condiciones dadas la magnitud $\frac{d}{f'}$ será constante, por consiguiente, por la fórmula (2) tenemos que *la luminancia subjetiva de los objetos que se observan viene determinada por su luminancia fotométrica.* La luminancia subjetiva no depende de las dimensiones del objeto ni de la distancia que hay desde él al ojo, siempre que la imagen que se forma en la retina tenga dimensiones finitas. Dos hojas de papel igualmente iluminadas, por ejemplo, parecerán tener la misma luminancia aún en el caso en que una de ellas esté cerca del ojo y la otra lejos.

La intensidad de la sensación visual, como las de todas las demás sensaciones, no está en simple relación con la potencia del excitador. Como en el caso de la intensidad de la sensación acús-

tica (véase el t. 1), la intensidad de la sensación visual puede considerarse directamente proporcional al logaritmo de la potencia del excitador. Por lo tanto, de acuerdo con la fórmula (2), al aumentar la luminancia fotométrica B al doble, por ejemplo, la luminancia subjetiva aumenta mucho menos. Cuando las variaciones de la luminancia de los objetos son muy grandes hay que tener en cuenta que el diámetro d de la pupila depende de la magnitud del flujo luminoso que sobre ella incide.

Todo lo expuesto se refiere a los casos en que el objeto se observa bajo un ángulo visual finito. Pero cuando el objeto está tan alejado que los rayos que desde él llegan al ojo se pueden considerar paralelos, las correlaciones que obtenemos son otras. En este caso la imagen que se forma en la retina no es semejante geométricamente al objeto, sino que es un círculo determinado exclusivamente por los fenómenos de difracción que tienen lugar en el ojo. Las dimensiones de este círculo (véase el § 269) dependen únicamente de la estructura del ojo. Resultado de esto es que la iluminación dentro de los límites del círculo de difracción viene determinada por la magnitud del flujo luminoso ΔF que incide sobre el ojo. Si miramos una fuente luminosa tan alejada que puede considerarse puntual, el flujo $\Delta F = I\Delta\omega$, siendo I la intensidad luminosa y $\Delta\omega$ el ángulo bajo el cual se vería la pupila desde el sitio en que se encuentra la fuente. Si la distancia desde el ojo a dicha fuente es igual a r, tendremos que $\Delta\omega = \frac{\pi d^2}{4r^2}$, y el flujo luminoso ΔF que incide sobre la pupila será:

$$\Delta F = \frac{\pi d^2}{4}\frac{I}{r^2}. \qquad (3)$$

La luminancia subjetiva estará determinada en este caso por la magnitud del flujo ΔF, es decir, de acuerdo con la fórmula (3), *la luminancia subjetiva de una fuente puntual está determinada por su intensidad luminosa y depende también de la distancia que hay desde dicha fuente al ojo.*

§ 327. **Instrumentos ópticos visuales.** Los instrumentos ópticos visuales sirven de complemento al ojo y en la mayoría de los casos tienen por objeto aumentar su agudeza o poder separador.

Estudiemos algunos de los instrumentos ópticos más simples.

Lupa o microscopio simple. La lupa más simple es una lente convergente que se utiliza para ver agrandados los objetos pequeños. La lente L (fig. 272) se coloca delante del ojo de manera que el objeto que se observa PP' se encuentre cerca de su plano focal principal F por la parte más próxima a la lente. En estas condiciones se produce una imagen P_1P_1' virtual, derecha y aumentada que se encuentra a una distancia bastante grande y que el ojo puede observar sin acomodación. Considerando que la lente es delgada

podemos suponer que los rayos PO y $P'O$ trazados desde los extremos del objeto al centro de la lente O pasarán a través de ella sin experimentar la refracción. Por lo tanto, las dimensiones angulares de la imagen P_1P_1' vienen determinadas por el ángulo $2u$ que es

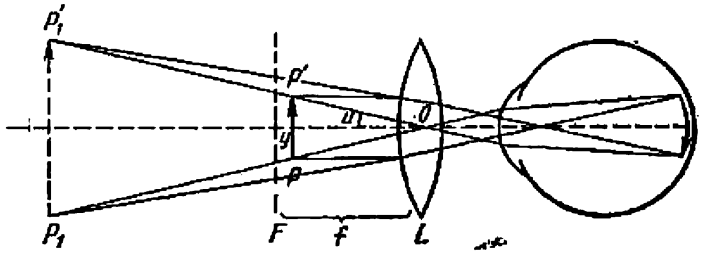

Fig. 272. Efecto que produce una lupa.

igual al ángulo bajo el cual se ve el objeto PP' desde el centro O de la lente. Llamando f a la distancia focal objeto de la lente e y a las dimensiones del objeto, obtenemos:

$$2u = \frac{y}{f}. \tag{1}$$

Para valorar la acción de la lupa, comparemos la distancia angular $2u$ con la $2u_0$, bajo la cual se observa el objeto a simple vista. Esta última distancia angular es igual a $2u_0 = \frac{y}{l}$, siendo l la distancia que separa al objeto del ojo. Como por regla general la lupa se utiliza para observar objetos que pueden situarse a distancias arbitrarias del ojo, la distancia l se elige de forma que sea igual a la distancia de visión perfecta l_0, entonces

$$2u_0 = \frac{y}{l_0}. \tag{2}$$

De las igualdades (1) y (2) hallamos que la lupa permite aumentar las dimensiones angulares del objeto que se observa un número de veces

$$\gamma = \frac{u}{u_0} = \frac{l_0}{f}. \tag{3}$$

Si la lente de la lupa no estropea la imagen, el poder separador o de resolución aumenta el mismo número de veces.

La magnitud γ se llama aumento angular de la lupa. Si l_0 y f se expresan en centímetros, como $l_0 = 25$ cm, para γ obtendremos:

$$\gamma = \frac{25}{f\ (\text{cm})}. \tag{3a}$$

Para corregir las aberraciones las lupas suelen estar formadas por dos lentes situadas a cierta distancia una de otra. Estas lupas dan aumentos de hasta 10-20 veces.

Anteojo astronómico. Los anteojos y los telescopios sirven para observar objetos muy alejados. El sistema óptico de los anteojos en su forma más simple está constituido por dos lentes L_1 y L_2 (fig. 273) dispuestas de tal forma que el foco imagen de la lente L_1 coincide con el foco objeto de la lente L_2 (sistema telescópico).

La lente L_1 se llama objetivo y la L_2, ocular. Si el objeto está suficientemente alejado, su imagen $P'P'_1$, producida por la lente

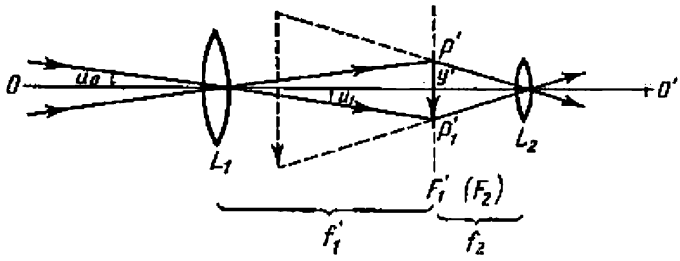

Fig. 273. Esquema de un anteojo astronómico.

L_1, se obtiene en el plano focal principal de esta lente y sus dimensiones angulares serán iguales a $2u_1 = \frac{y'}{f'_1}$, donde y' son sus dimensiones lineales y f'_1 es la distancia focal imagen del objetivo. El ocular juega el papel de lupa y, por consiguiente, la imagen que produce es percibida por el ojo bajo el ángulo

$$2u_2 = \frac{y'}{f_2},$$

siendo f_2 la distancia focal objeto del ocular.

Como la longitud del anteojo es pequeña en comparación con la distancia hasta el objeto, este último se percibe a simple vista bajo un ángulo $2u_0 = 2u_1$. De aquí se deduce que el aumento angular del anteojo será:

$$\gamma = \frac{2u_2}{2u_1} = \frac{2u_2}{2u_0} = \frac{f'_1}{f_2}. \qquad (4)$$

De esta forma el aumento angular del anteojo es tanto mayor cuanto mayor sea la distancia focal de su objetivo y cuanto menor sea la distancia focal de su ocular.

Los anteojos construidos según el esquema indicado producen una imagen invertida del objeto que se observa. Cuando el anteojo se utiliza para observar objetos astronómicos (anteojo astronómico o telescopio) esta inversión de la imagen no tiene importancia. Pero cuando se emplea para observaciones en la Tierra (anteojo

terrestre) se le suele añadir un sistema que vuelve a invertir la imagen de forma que se vea derecha.

En la práctica las lentes simples no sirven para objetivos y oculares debido a sus grandes aberraciones geométricas y cromáticas. Por esto el objetivo se hace de dos lentes pegadas, una convergente y otra divergente, o en forma de sistemas más complejos que permiten corregir la imagen. El ocular se hace en forma de sistema compuesto formado generalmente por dos lentes.

Cuando con el anteojo se miran objetos bajo un ángulo de vista finito, su luminancia, según lo dicho en el § 323, no puede ser mayor que la luminancia fotométrica real. Las inevitables pérdidas de luz, que tienen lugar como resultado de las reflexiones y absorciones, son causa de que los anteojos disminuyan siempre un poco la luminancia. Para que las pérdidas de luz sean menores hay que evitar que en los anteojos existan superficies reflectoras innecesarias y procurar que el flujo luminoso que sale del ocular llene por completo la pupila del observador, puesto que únicamente así se puede conseguir la máxima iluminación de la retina que puede producir un objeto de luminancia determinada.

A pesar de que el anteojo no pueda aumentar la luminancia de los objetos que se observan, cuando esto se hace con luz nocturna «se ve mejor» con el anteojo que a simple vista. Esto se explica por el hecho de que con la visión nocturna, como ya indicamos en el§§ 305, el poder separador del ojo es mucho menor que cuando se trata de iluminaciones diurnas. Pero como el anteojo produce un gran aumento, todos los detalles del objeto resultan visibles bajo un gran ángulo y el ojo puede distinguirlos.

El problema de la construcción de un anteojo que hiciera posible ver los objetos de noche fue planteado por M. Lomonósov, que construyó un anteojo al que llamó «videonocturno». Este anteojo era de gran aumento, estaba construido de forma que el flujo luminoso llenaba por completo la pupila del ojo y, efectivamente, con él se veía de noche mejor que a simple vista.

Al observar las estrellas con un telescopio nos encontramos con el caso de objetos de los que prácticamente llega al objetivo del telescopio un haz de luz paralelo.

En este caso el objetivo del telescopio produce en su plano focal únicamente una figura de difracción igual a la que, como vimos en el § 269, produce un orificio circular. Esta figura se observa después con el ocular. El orificio redondo que limita al haz de rayos paralelos que se difracta es la montura del objetivo del telescopio. Pero como al producirse la difracción por el orificio circular una gran parte de la luz va a parar a la mancha brillante central, resulta que la «imagen» de la estrella que se ve con el telescopio no es otra cosa que esta mancha central de la figura de difracción. El radio angular ϑ de la mancha central, según lo dicho en el § 269, es una magnitud del orden de $\vartheta \cong 1{,}22\frac{\lambda}{D}$, donde D es el

diámetro del orificio (en este caso el de la armadura del objetivo). El radio lineal de esta misma mancha (círculo) central $r = \vartheta f'_1 = \cong 1{,}22\lambda \frac{f'_1}{D}$, siendo f'_1 la distancia focal imagen del objetivo. Como las magnitudes f'_1 y D son constantes para cada telescopio, quiere decir que todas las estrellas producen círculos del mismo tamaño. Por consiguiente, la luminancia de estos círculos será proporcional al flujo luminoso ΔF que desde la estrella llega al objetivo del telescopio. Si E es la iluminación que produce una estrella sobre la superficie de la Tierra, tendremos que $\Delta F = E \frac{\pi D^2}{4}$; a esta magnitud son proporcionales la luminancia del círculo de difracción y la luminancia subjetiva de la estrella que se observa por el telescopio. Si esta misma estrella se observa a simple vista, según lo expuesto en el § 326, tendremos que su luminancia subjetiva será proporcional al flujo $\Delta F'$ que incide sobre la pupila del ojo e igual a $\Delta F' = E \frac{\pi d^2}{4}$, donde d es el diámetro de la pupila. La relación entre los flujos indicados es la medida del aumento que experimenta la luminancia de la estrella cuando se observa con el telescopio:

$$\frac{\Delta F}{\Delta F'} = \left(\frac{D}{d}\right)^2.$$

Cuando el diámetro del objetivo del telescopio es grande la relación $\left(\frac{D}{d}\right)^2$ también lo es y la estrella resulta mucho más brillante al observarla con el telescopio que a simple vista. La luminancia subjetiva del cielo no varía prácticamente aunque se mire con el telescopio.

El poder separador del telescopio será estudiado más adelante (§ 329).

Además de los anteojos astronómicos y de los telescopios formados por sistemas de lentes se pueden construir sistemas de espejos reflectores. El primer telescopio reflector fue construido por Newton. El esquema del telescopio de Newton se representa en la fig. 274. El haz de rayos procedente del objeto incide sobre el espejo cóncavo AB, se refleja en él, sufre un giro al incidir sobre el espejo plano ab y converge en el plano focal F' del espejo cóncavo. La imagen obtenida en el plano focal F' se observa por medio del ocular O.

El espejo refleja por igual los rayos de todas las longitudes de onda y no produce aberración cromática. En este sentido el telescopio de Newton tenía una gran ventaja con respecto a los telescopios de lentes de aquella época, ya que entonces aún no sabían construir lentes acromáticas y los telescopios tenían gran aberración cromática.

En la actualidad los mayores telescopios también se hacen con espejos reflectores, debido a las dificultades que presenta la fabricación de lentes grandes de buena calidad. Los telescopios de lentes («refractores») más modernos tienen objetivos de cerca de 1 m de diámetro; los mayores telescopios de espejos («reflectores») tienen espejos de hasta 5 m de diámetro.

En la actualidad también se emplean sistemas combinados de lentes y espejos.

Sistemas de este tipo con lentes convexo-cóncavas han sido propuestos y realizados por el técnico óptico soviético D. D. Maksútov. El esquema de uno de los telescopios de Maksútov se representa en la fig. 275, donde L es una lente convexo-cóncava y AB es un espejo cóncavo. Los rayos del objeto que se observa inciden sobre la lente L, después de lo cual se reflejan en el espejo AB

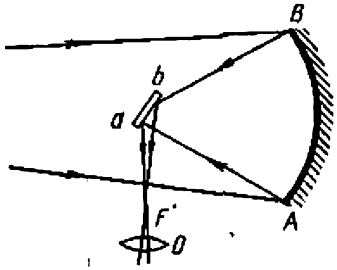

Fig. 274. Esquema del telescopio reflector de Newton.

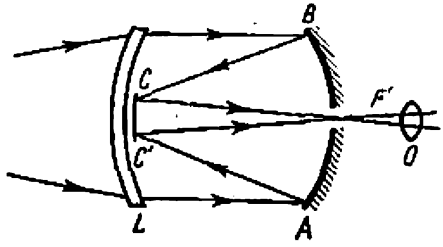

Fig. 275. Esquema del telescopio de Maksútov.

y vuelven a incidir sobre la lente L. La parte central de la superficie cóncava de esta lente CC' está aluminada (recubierta de aluminio) y forma un espejo cóncavo en el que los rayos se reflejan otra vez. En el centro del espejo AB se practica un pequeño orificio a través del cual los rayos salen del telescopio. Detrás del foco F' en que convergen los rayos se encuentra el ocular O. La doble reflexión de los rayos permite hacer más corto el telescopio. La lente convexo-cóncava tiene propiedades acromáticas y además da la posibilidad de corregir la aberración esférica del espejo. El instrumento construido según el esquema de la fig. 275 proporciona una imagen derecha y puede utilizarse para observar objetos tanto celestes como terrestres.

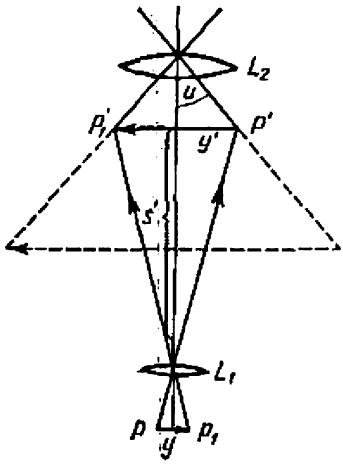

Fig. 276. Esquema óptico del microscopio.

Microscopio compuesto. Para conseguir grandes aumentos se emplea el microscopio compuesto o simplemente microscopio, cuyo esquema óptico puede verse en la fig. 276, donde L_1 es un objetivo de pequeña distancia focal y L_2 es el ocular..

El objeto PP_1 que se observa se coloca delante del objetivo L_1 a una distancia ligeramente mayor que la focal principal objeto. El objetivo da una imagen real, invertida y aumentada $P'P_1'$ del objeto, situada a una distancia s' de aquél. El aumento lateral del objetivo $\beta \cong \frac{s'}{f_1}$, donde f_1 es su distancia focal principal objeto. Supongamos que las dimensiones lineales del objeto son iguales a y, entonces las

dimensiones lineales de la imagen serán:

$$y' = y\frac{s'}{f_1}. \tag{5}$$

El ocular L_2 hace las veces de lupa. Por esto la imagen y' que se observa a través del ocular se ve bajo el ángulo

$$2u = \frac{y'}{f_2},$$

donde f_2 es la distancia focal objeto del ocular. Poniendo aquí en lugar de y' su valor según (5), obtenemos el valor del ángulo bajo el cual se ve el objeto PP_1 cuando se observa al microscopio:

$$2u = y\frac{s'}{f_1 f_2}. \tag{6}$$

A simple vista este mismo objeto se vería bajo un ángulo

$$2u_0 = \frac{y}{l_0},$$

donde l_0 es la distancia a que se ve el objeto. Para el aumento angular γ del microscopio, hallamos:

$$\gamma = \frac{2u}{2u_0} = \frac{l_0 s'}{f_1 f_2}. \tag{7}$$

Si suponemos que l_0 es igual a la distancia de visión perfecta y que todas las demás magnitudes que entran en la fórmula (7) se toman en centímetros, tendremos que

$$\gamma = \frac{25s'}{f_1 f_2}. \tag{7a}$$

La distancia s' es practicamente igual a la distancia d que hay entre el objetivo L_1 y el plano focal principal del ocular L_2 (en las apreciaciones aproximadas del aumento del microscopio se puede considerar que d es igual a la longitud del tubo del mismo). Los aumentos de los microscopios alcanzan hasta 2 000.

Sobre el poder separador del microscopio hablaremos en el § 329. Para conseguir un gran poder separador el objetivo del microscopio debe recoger un haz, lo más ancho posible, de rayos procedentes del objeto. Para que en estas condiciones no se deforme la imagen a causa de las aberraciones, el objetivo debe hacerse en forma de sistema compuesto de una serie de lentes (los objetivos complejos llegan a tener hasta 10-12 lentes). Los objetos que se observan al microscopio son por lo general preparaciones más o menos transparentes que se colocan entre dos vidrios (portaobjetos y cubreobjetos o simplemente porta y cubre). Estas preparaciones se miran al trasluz y para su iluminación se utilizan unos sistemas especiales llamados condensadores.

Los objetivos y oculares del microscopio se hacen generalmente intercambiables, con lo que se consigue obtener diferentes aumentos.

Gafas. Los defectos ópticos del ojo, como la miopía o la hipermetropía, se corrigen por medio de gafas o lentes oftalmológicas. El ojo miope tiene una potencia óptica demasiado grande y para corregirlo se utiliza una lente divergente. El ojo hipermétrope, por el contrario, tiene una potencia óptica demasiado pequeña y para corregirlo hay que utilizar una lente convergente.

Supongamos que hay que corregir un ojo hipermétrope cuyo punto remoto P_R se encuentra detrás de la retina (fig. 277). Para que este ojo pueda observar

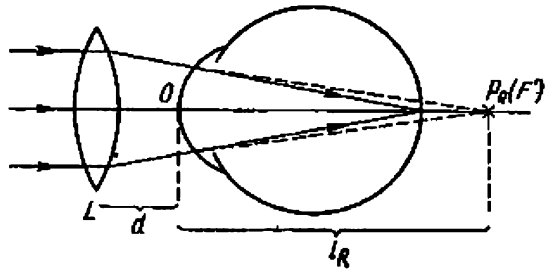

Fig. 277. Corrección de un ojo hipermétrope con una lente oftalmológica.

tranquilamente objetos infinitamente alejados hay que elegir una lente oftalmológica L que concentre el haz de rayos paralelos en el punto remoto del ojo P_R. Por consiguiente, el foco imagen de la lente F' debe coincidir con el punto remoto del ojo P_R. De aquí podemos deducir que la distancia focal imagen f' de la lente oftalmológica deberá ser igual a

$$f' = d + l_R,$$

donde d es la distancia desde la lente L hasta el vértice del ojo y l_R es la distancia desde dicho vértice hasta el punto remoto. La potencia óptica de la lente será igual a

$$\Phi = \frac{1}{f'} = \frac{1}{d + l_R}.$$

Si d y l_R se expresan en metros, la potencia óptica de la lente se obtiene en dioptrías.

Gemelos y telémetros. Los anteojos terrestres se unen con frecuencia formando pareja para poder observar el objeto simultáneamente con los dos ojos. Los anteojos así unidos se llaman *gemelos.*

En los gemelos, además de los anteojos con sistemas ópticos compuestos por dos lentes convergentes, se emplean anteojos que tienen por ocular una lente divergente. El primer anteojo de este tipo fue hecho por Galileo y se llama anteojo de Galileo. La lente divergente L_2 se encuentra entre el objetivo L_1 y su plano focal principal F_1' (fig. 278), a una distancia de este último igual a su propia distancia focal f_2'. De esta forma los focos del objetivo y del ocular coinciden y las dos lentes del anteojo de Galileo forman un sistema telescópico. El ocular da una imagen virtual del objeto que se observa. El aumento angular del anteojo de Galileo es igual a f_1'/f_2.

Los gemelos de poco aumento se hacen con dos anteojos de Galileo. Los de gran aumento (de campaña) se hacen con dos anteojos provistos de oculares

convergentes. El esquema de unos gemelos prismáticos de campaña puede verse en la fig. 279. En este caso el sistema inversor está formado por dos prismas de reflexión total a y b. Estos prismas, además de invertir la imagen, permiten

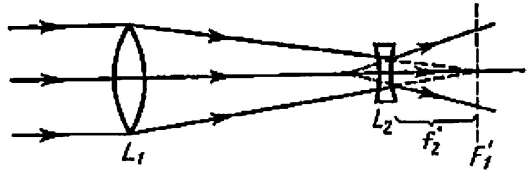

Fig. 278. Anteojo de Galileo.

acortar la longitud de los anteojos y aumentar la distancia entre los centros de los objetivos con respecto a la que hay entre las pupilas de los ojos. Este aumento contribuye a acrecentar el efecto estereoscópico.

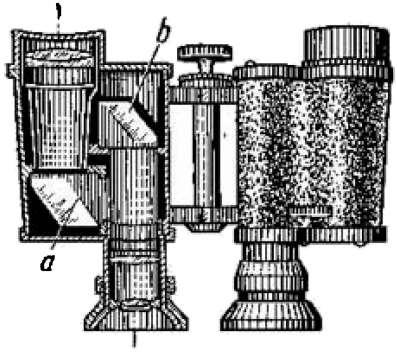

Fig. 279. Gemelos prismáticos de campaña.

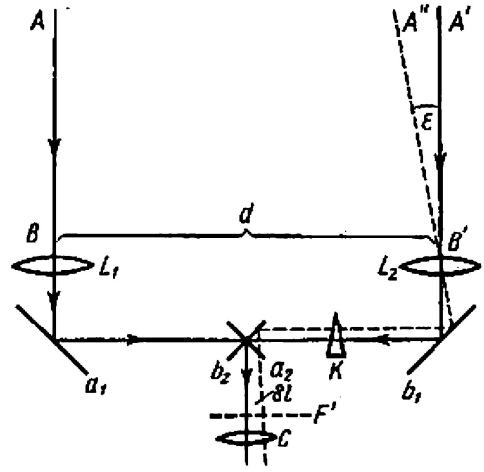

Fig. 280. Esquema de un telémetro monocular.

Los anteojos de gran efecto estereoscópico pueden utilizarse para medir la distancia que hay hasta el objeto que se observa. Cuando los anteojos se emplean para dicho fin se llaman *telémetros*.

El esquema de un telémetro monocular se muestra en la fig. 280. Los objetivos L_1 y L_2 se hallan separados entre sí por una gran distancia d (de hasta varios metros). Esta magnitud d se llama base del telémetro. Por medio de los espejos a_1, a_2 y b_1, b_2, los rayos procedentes del objeto se hacen llegar al ocular C, a través del cual se observan las imágenes producidas por los objetivos L_1 y L_2. Si el objeto se encuentra infinitamente lejos, los rayos AB y $A'B'$, que desde él llegan a los objetivos, son paralelos y ambas imágenes coinciden. Pero si el objeto se encuentra a una distancia finita, entre los rayos existirá un ángulo de paralaje ε y las imágenes estarán desplazadas entre sí. Supongamos para simplificar que el objeto se encuentra sobre el eje del objetivo izquierdo. En este

caso el rayo $A''B'$, procedente del objeto, que incide sobre el objetivo derecho formará con el rayo $A'B'$ un ángulo ε. La imagen producida por el objetivo derecho en el plano focal estará desplazada una magnitud $\delta l = \varepsilon f'$ con respecto a la producida por el izquierdo, siendo f' la distancia focal imagen del objetivo. Por otra parte, el ángulo ε está relacionado con la distancia l, que hay hasta el objeto que se observa, por la igualdad $\varepsilon = \frac{d}{l}$.

De las correlaciones anteriores se obtiene que

$$l = \frac{d \cdot f'}{\delta l}.$$

La magnitud $d \cdot f'$ es constante para cada telémetro; por lo tanto, la distancia l que hay hasta el objeto se puede hallar midiendo el desplazamiento δl de ambas imágenes. Por regla general la magnitud δl se mide haciendo coincidir las dos imágenes. Para conseguir esto, en una de las ramas o brazos del telémetro se intercala una cuña K. Cuanto mayor sea el desplazamiento δl tanto mayor será el ángulo que hay que inclinar la cuña. Por consiguiente, midiendo el ángulo de inclinación de la cuña se puede hallar δl y con esto determinar la distancia l hasta el objeto.

§ 328. Aparatos proyectores e iluminadores. El aparato proyector más simple es la *cámara fotográfica*, cuyo objetivo L (fig. 281) produce en el plano AB una imagen real del objeto fotografiado. En este plano AB se encuentra la placa o película fotosensible. El objetivo fotográfico suele ser un sistema compuesto de cuatro o más lentes, corregido de cromatismo, aberración esférica y otros defectos. La nitidez de la imagen que se forma sobre la placa fotográfica se consigue desplazando el objetivo o alguna de sus partes. El objetivo tiene por lo general un diafragma de abertura variable (diafragma de iris) el cual da la posibilidad de mejorar la «profundidad» de foco, es decir, de enfocar con suficiente nitidez objetos que se encuentran a distintas distancias del objetivo, y al mismo tiempo sirve para regular la magnitud del flujo luminoso que entra en la cámara.

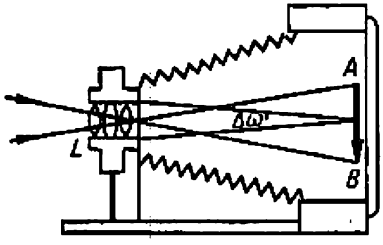

Fig. 281. Esquema óptico de una cámara fotográfica.

La intensidad del proceso fotoquímico que tiene lugar en la capa sensible de la placa, como dijimos en el § 305, viene determinada por la iluminación que se produce en el plano en que se encuentra dicha placa.

Según la fórmula (8) del § 323, esta iluminación E' es igual a

$$E' = kB\Delta\omega', \qquad (1)$$

donde B es la luminancia del objeto, k es una magnitud que determina la pérdida de luz que se produce al pasar ésta por el objetivo

y $\Delta\omega'$ es el ángulo sólido bajo el cual se ve el objeto desde el sitio en que se encuentra la imagen. Si el objeto que se fotografía está suficientemente lejos, la imagen se forma a una distancia del objetivo próxima a su distancia focal imagen f', y en este caso tendremos que el ángulo $\Delta\omega'$ será aproximadamente igual a

$$\Delta\omega' = \frac{\pi d^2}{4f'^2},$$

donde d es el diámetro del objetivo (cuando el diafragma está abierto por completo). Poniendo esta expesión en (1), hallamos que

$$E' = \frac{k\pi}{4}\left(\frac{d}{f'}\right)^2 B. \qquad (2)$$

Por la fórmula (2) vemos que la iluminación en la placa fotográfica es proporcional al cuadrado de la razón del diámetro del objetivo a su distancia focal. Esta razón d/f' suele llamarse *luminosidad del objetivo o abertura relativa*. La mayoría de los aparatos fotográficos modernos tienen una luminosidad de $1 : 4{,}5 \sim 1 : 2{,}5$. No obstante se pueden fabricar objetivos con abertura relativa mayor que la unidad (por ejemplo, $1 : 0{,}9$), pero tienen el inconveniente de que para que den una imagen de buena calidad hay que hacerlos con muchas lentes, lo que conduce a un aumento de la pérdida de luz por reflexión, es decir, a una disminución del coeficiente k. Como resultado de esto puede ocurrir que un objetivo con abertura relativa grande produzca menos iluminación que otro cuya abertura relativa sea menor, pero que tenga una estructura más simple.

Hablando estrictamente, en la fórmula (1) debe entenderse por $\Delta\omega'$ el ángulo sólido bajo el cual se ve la pupila de salida (§ 324) desde el sitio en que se encuentra la placa fotográfica. El diafragma real del objetivo fotográfico es generalmente el diafragma de iris que se halla entre sus lentes. Cuando la abertura del difragma es la máxima posible, el ángulo $\Delta\omega'$, bajo el cual se ve la imagen de aquél producida por la parte siguiente del objetivo, se aproxima al ángulo bajo el cual se ve la lente posterior de dicho objetivo. Por esto se puede considerar con un grado de aproximación suficiente que cuando el diafragma está abierto por completo la iluminación viene determinada por la razón $(d/f')^2$, donde d es el diámetro del objetivo, como se indicó en el texto fundamental. Al disminuir la abertura del diafragma la iluminación E' disminuye.

Linterna de proyección o proyector. Este aparato sirve para obtener sobre una pantalla la imagen amplificada de fotografías transparentes (diapositivas). En la fig. 282 se ve el esquema óptico de una linterna de proyección o proyector: S es un foco luminoso, M_1N_1 y M_2N_2 son dos lentes plano-convexas que constituyen el sistema de iluminación (condensador), PP_1 es la diapositiva y L el objetivo proyector. El condensador tiene por objeto aumentar la iluminación (y por consiguiente la luminancia B) de la diapositiva.

El objetivo proyector produce sobre la pantalla una imagen ampliada, real e inversa de la diapositiva PP_1. La iluminación E' que hay en la pantalla puede determinarse por medio de la fórmula (7) del § 323:

$$E' = kB\frac{\Delta\omega}{\beta^2}, \qquad (3)$$

donde β es el aumento lateral y $\Delta\omega$ el ángulo sólido bajo el cual se ve el objetivo proyector L desde el sitio en que se encuentra la

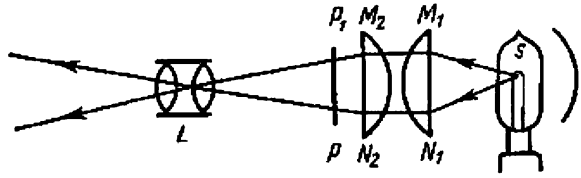

Fig. 282. Esquema óptico de una linterna de proyección.

diapositiva PP_1. Como los proyectores suelen proporcionar un gran aumento, la diapositiva PP_1 se sitúa cerca del plano foçal objeto del objetivo L. Por esto el valor aproximado del ángulo $\Delta\omega$ será:

$$\Delta\omega = \frac{\pi d^2}{4f^2},$$

siendo d el diámetro del objetivo y f su distancia focal objeto. Poniendo este valor de $\Delta\omega$ en (3), hallamos:

$$E' = \frac{\pi k}{4}\left(\frac{d}{f}\right)^2\frac{1}{\beta^2}B. \qquad (4)$$

Por la fórmula (4) puede verse que la iluminación que existe sobre la pantalla vuelve a estar determinada por la luminosidad (abertura relativa d/f) del objetivo y además es inversamente proporcional al cuadrado del aumento lateral β. Cuanto mayor sea el tamaño de la imagen que se desea obtener sobre la pantalla tanto mayor será la luminancia B que debe comunicársele al objeto, es decir, tanto mayor será la intensidad del foco luminoso S que debe ponerse en el proyector.

Por este mismo esquema se construye el sistema proyector de cine. Como en este caso los aumentos son aún mayores, los aparatos proyectores de cine se proveen de fuentes de luz muy potentes, en su mayoría de arcos eléctricos.

En las salas de conferencias y en las aulas de los centros de enseñanza se suele practicar la proyección de objetos opacos (con *epidiascopios o epidiáscopos*), como, por ejemplo, grabados de libros.

En este caso para conseguir sobre la pantalla la iluminación necesaria hay que crear una iluminación potente en el sitio en que se halla el objeto que se quiere proyectar, para que su luminancia B sea suficiente. Esto se consigue por medio de un arco eléctrico o de varias lámparas de incandescencia. Además, los epidiascopios se proveen de un objetivo L lo más luminoso posible.

Los sistemas ópticos varían los ángulos sólidos dentro de cuyos límites se propagan los flujos luminosos y por lo tanto pueden variar la iluminación. En este hecho se funda la construcción de diversos sistemas de iluminación y entre ellos los *proyectores* que sirven para iluminar objetos lejanos. Examinemos, por ejemplo, un esquema sencillo de proyector compuesto por una fuente puntual S, de intensidad luminosa I, y de una lente L (fig. 283).

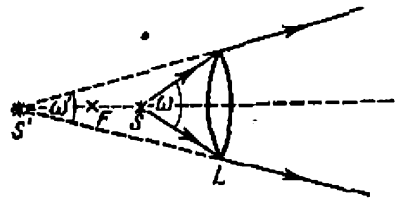

Fig. 283. Aumento de la intensidad I de la luz por medio de una lente.

Supongamos que la lente L se ve desde el sitio en que se encuentra la fuente bajo un ángulo sólido ω, en este caso el flujo que incide sobre la lente será igual a $I\omega$, y el que pasa a través de ella será:

$$F' = kI\omega, \qquad (5)$$

donde k es una magnitud que indica la pérdida de luz que se produce al pasar ésta por la lente. Si la fuente S se encuentra entre la lente L y su foco objeto, se obtendrá una imagen virtual S'. El haz luminoso que sale de la lente estará comprendido entre los límites del ángulo sólido ω', bajo el cual se ve la lente desde el sitio en que se encuentra la imagen S'. La intensidad luminosa de este haz

$$I' = \frac{F'}{\omega'},$$

poniendo aquí en lugar de F' su valor según (5), obtenemos:

$$I' = kI\frac{\omega}{\omega'}. \qquad (6)$$

Como quiera que las pérdidas de luz en una sola lente son pequeñas y, por consiguiente, k se aproxima a la unidad, de la fórmula (6) se deduce que la intensidad de la luz aumenta en el haz en la proporción ω/ω', con respecto a la intensidad luminosa de la propia fuente. La magnitud ω/ω' puede hacerse grande y, por lo tanto, por medio de una lente se puede aumentar considerablemente la intensidad de la luz en el haz.

Colocando la fuente puntual de luz S en el plano focal principal obtendremos su imagen S' en el infinito y como resultado de esto el ángulo ω' debe hacerse igual a cero. De acuerdo con esto la intensidad de la luz del haz que sale de la lente deberá hacerse igual a infinito. Pero en realidad toda fuente luminosa tiene extensión (además de que, debido a la difracción, no es posible conseguir un haz de rayos rigurosamente paralelos), por esta razón el ángulo ω' es siempre distinto de cero y la intensidad de la luz no puede alcanzar un valor infinito.

En los proyectores modernos en lugar de lentes se utilizan espejos cóncavos, pero el principio en que se basa su funcionamiento coincide con el que acabamos de exponer.

Examinemos ahora el caso particular en que una fuente S de intensidad luminosa $I = 1\,000$ cd está colocada delante de un espejo cóncavo AB (*fig.* 284) de forma que este último se ve desde el sitio en que está la fuente bajo un ángulo sólido $\omega = \pi$. Supongamos que el haz de rayos reflejados por el espejo queda comprendido entre los límites de un cono cuyo ángulo de abertura $\alpha = 6°$. Determinemos la intensidad de la luz I' en el haz considerando que el coeficiente de reflexión k del espejo es igual a 0,8. Para hallar la intensidad de la luz I' por la fórmula (6) hay que determinar previamente el ángulo sólido ω'. Este ángulo (véase el § 302) será:

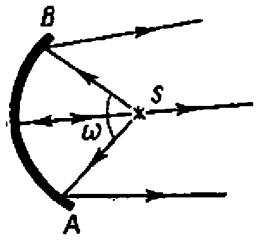

Fig. 284. Esquema de un proyector de espejo (reflector).

$$\omega' = 4\pi \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{4} \cong \pi \frac{\alpha^2}{4},$$

donde α debe expresarse en radianes. Poniendo este valor de ω' en (6), obtenemos:

$$I' = kI \frac{4\omega}{\pi\alpha^2}.$$

Poniendo aquí $\omega = \pi$, $\alpha = 6° \cong 0{,}1$ rad y $k = 0{,}8$ hallamos:

$$I' = 0{,}8I \frac{4}{0{,}1^2} = 320I.$$

Por consiguiente, gracias al espejo cóncavo, la intensidad de la luz en el haz aumenta 320 veces, es decir, cuando $I = 1\,000$ cd obtenemos que $I' = 320\,000$ cd.

En los proyectores modernos se consiguen haces con ángulos de divergencia de cerca de 2°, cuya intensidad luminosa es de centenares de millones de bujías (candelas).

§ 329. Poder separador de los instrumentos ópticos. Hasta ahora hemos considerado que los instrumentos ópticos pueden dar la imagen puntual de un punto objeto y que los defectos como la aberración esférica, el astigmatismo, etc., pueden corregirse en principio. No obstante, en el § 327 tuvimos ya que indicar que en el caso del telescopio las estrellas producen una figura de difracción en el plano focal del objetivo. En realidad el fenómeno de la difracción tiene lugar en todos los sistemas ópticos y cada punto del objeto se representa en el plano focal por un círculo de difracción. Esta circunstancia limita el número de detalles que pueden resolverse o distinguirse en la imagen y marca el límite de las amplificaciones que tienen sentido práctico.

En el telescopio es donde la difracción presenta un carácter más simple, razón por la cual empezaremos por ocuparnos de este instrumento. Cuando con el telescopio se observa una estrella, como ya dijimos, sobre el objetivo incide un haz de rayos paralelos y en su plano focal se forma una figura de difracción, que estudiamos en el § 269 y que está representada en la fig. 88. Cerca del 84% de todo el flujo luminoso corresponde a la mancha brillante central de esta figura de difracción y únicamente cerca de un 16% corresponde a los anillos que la rodean. Por esto, en adelante podemos no prestar atención a dichos anillos. Cuando se observan dos estre-

llas muy próximas las figuras de difracción que producen se superponen con frecuencia y resulta una mancha brillante más o menos alargada cuya luminosidad no es homogénea. Podemos preguntarnos, ¿con qué caso esta mancha puede percibirse todavía como la imagen de dos estrellas y cuándo será imposible asegurar que está formada por dos estrellas y no por una sola?

Aquí, lo mismo que en el caso de la separación de dos líneas espectrales (§ 271), podemos guiarnos por el criterio de Rayleigh, es decir, considerar que dos figuras de difracción se pueden resolver si *en la curva que representa la suma de sus intensidades la caída en*

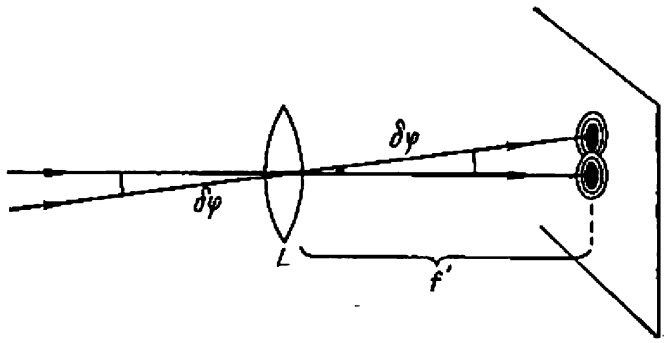

Fig. 285. Distancia angular δφ entre dos objetos puntuales que apenas se pueden resolver.

el mínimo alcanza un 20%, cosa que el ojo puede percibir por contraste como un espacio oscuro entre dos máximos.

En dos figuras de difracción superpuestas debidas a sendos orificios circulares la caída alcanzará el 20% en el caso en que *el máximo de una de las curvas coincida con el primer mínimo de la otra curva*. La distancia angular entre el máximo principal de la figura de difracción producida por un orificio circular (§ 269) y su primer anillo oscuro es igual a $\delta\varphi = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$, donde λ es la longitud de onda y D el diámetro del orificio. En nuestro caso el orificio es la montura del objetivo y, por lo tanto, D coincide con el diámetro del objetivo del telescopio. Las distancias angulares dentro de los límites de las figuras de difracción se determinan por los ángulos comprendidos entre las rectas trazadas desde el centro del objetivo L (fig. 285) a los puntos correspondientes de las figuras de difracción. De aquí obtenemos que el criterio de Rayleigh referido a la separación de dos estrellas se cumplirá si la distancia angular entre ellas es

$$\delta\varphi = 1{,}22\frac{\lambda}{D}. \qquad (1)$$

Por la fórmula (1) vemos que *cuanto mayor sea el diámetro del objetivo del telescopio tanto más próximas podrán hallarse las estrellas que permite separar.*

El aumento del ocular del telescopio debe elegirse de tal forma que las manchas de difracción separadas por el objetivo sean separadas también por el ojo, es decir, que se observen bajo un ángulo de cerca de 1'. Cuando las estrellas se fotografían la distancia lineal $\delta y'$ entre los centros de sus figuras de difracción deberá ser mayor que las dimensiones de los granos de la emulsión de la placa fotográfica, cosa que corresponde a distancias del orden de 0,01 mm. Si f' es la distancia focal imagen del objetivo del telescopio, la distancia lineal $\delta y'$ entre las imágenes de las estrellas que apenas se pueden separar será

$$\delta y' = f' \cdot \delta\varphi = 1{,}22 \frac{\lambda}{D} f'. \qquad (2)$$

Con los métodos microfotométricos modernos se puede descubrir el mínimo de una iluminación del orden de un 10 y hasta de un 5% y, por consiguiente, resolver estrellas más próximas, que las que satisfacen el criterio de Rayleigh.

Las condiciones de separación (1) y (2), que hemos deducido para el telescopio, son aplicables a los anteojos terrestres, cuando sirven para observar objetos muy distantes, y a las cámaras fotográficas, cuando se fotografían objetos lejanos. Si el objeto está cerca del objetivo, el haz que partiendo de él incide sobre este último no puede considerarse formado por rayos paralelos. En este caso el cálculo del papel que desempeña la difracción al formarse las imágenes es más complicado. Un caso de este tipo, en que el objeto que se observa se halla cerca del objetivo, es el que tenemos en el microscopio. Por esto, el cálculo exacto de la influencia de la difracción en el microscopio es un problema difícil de resolver en el que nos detendremos más adelante (§ 330). Aquí nos limitaremos a hacer un simple cálculo del poder separador del microscopio, partiendo para ello de la suposición de que cada punto del objeto es una fuente de luz independiente, que produce en el plano focal del objetivo un círculo de difracción cuyas dimensiones angulares son aproximadamente iguales a las que estudiamos en el caso de la difracción de un haz de rayos paralelos. En estas condiciones podemos considerar que dos puntos contiguos del objeto resultarán separados cuando los centros de sus imágenes se encuentren entre sí a la distancia lineal $\delta y'$ expresada por la fórmula (2), dando en lugar de f' habrá que poner la distancia s' que haya desde el objetivo hasta el punto en que se encuentra la imagen (fig. 286):

$$\delta y' = 1{,}22 \frac{\lambda}{D} s'. \qquad (3)$$

La distancia entre dos puntos del objeto que apenas se pueden resolver la designaremos por medio de δy.

Los objetivos de los microscopios siempre se calculan de forma que se cumpla la condición de los senos (§ 321) con relación a sus puntos conjugados; por esto tenemos que

$$n \operatorname{sen} u \cdot \delta y = n' \operatorname{sen} u' \cdot \delta y', \qquad (4)$$

donde n y n' son respectivamente los índices de refracción de las sustancias que hay delante del objetivo del microscopio y detrás de él.

En los microscopios la imagen siempre se forma en el aire, por lo tanto $n' \cong 1$; pero la preparación puede hallarse en una sustancia distinta del aire (véase más adelante lo referente a la inmersión), por esto, para generalizar, no consideraremos que n sea igual a la unidad. Además, por la fig. 286, tenemos:

$$\operatorname{sen} u' \cong \frac{D/2}{s'}.$$

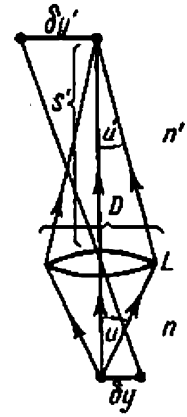

Fig. 286. Esquema para deducir el poder separador del microscopio.

Poniendo los valores indicados de n' y sen u' en (4), hallamos que

$$\delta y' = \frac{2s'}{D} \cdot n \operatorname{sen} u \cdot \delta y.$$

Comparando esta expresión de $\delta y'$ con la (3), obtenemos:

$$\frac{2s'}{D} \cdot n \operatorname{sen} u \cdot \delta y = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot s',$$

de donde hallamos que la distancia entre dos puntos que apenas se pueden resolver será:

$$\delta y = 0{,}61 \frac{\lambda}{n \operatorname{sen} u}. \qquad (5)$$

La magnitud $A = n$ sen u se llama *apertura numérica* del objetivo del microscopio. Si el objeto se halla en el aire, $n = 1$, y entonces, de acuerdo con la fórmula (5), se deduce que el microscopio permite resolver objetos que se encuentran entre sí a una distancia $\delta y = 0{,}61 \frac{\lambda}{\operatorname{sen} u}$. Para los objetivos de los microscopios el ángulo u es aproximadamente igual a $\pi/2$ y, por consiguiente, sen $u \cong 1$, de donde obtenemos que el microscopio permite resolver objetos que se encuentran entre sí a distancias del orden de $^1/_2\lambda$. Cuando las observaciones son visuales la longitud de onda λ se refiere a la zona visible del espectro, es decir, representa un magnitud del orden de $5 \cdot 10^{-5}$ cm, por consiguiente, el microscopio da la posibilidad de resolver objetos que se encuentren a una distancia del orden de $3 \cdot 10^{-5}$ cm.

Por la fórmula (5) vemos que el poder separador del microscopio puede aumentar si el objeto se sumerge en una sustancia cuyo índice de refracción $n > 1$. Esto se consigue de la siguiente forma: la preparación que ha de observarse al microscopio, y que generalmente es una sección delgada, se pega entre dos vidrios planos (portaobjetos y cubreobjetos), con la particularidad de que la sustancia para pegar se elige de manera que su índice de refracción sea igual al de los vidrios (generalmente $n = 1{,}5$). Para que en estas condiciones la reflexión total en la superficie de separación entre el cubreobjetos y el aire no limite el valor del ángulo de abertura u (fig. 287, *a*), entre el cubreobjetos y la primera lente del objetivo se interpone una gota de aceite transparente que tiene el mismo índice de refracción n. Entonces, como puede verse en la fig. 287, *b*, el ángulo u puede hacerse aproximadamente igual a $\pi/2$. Este procedimiento se conoce con

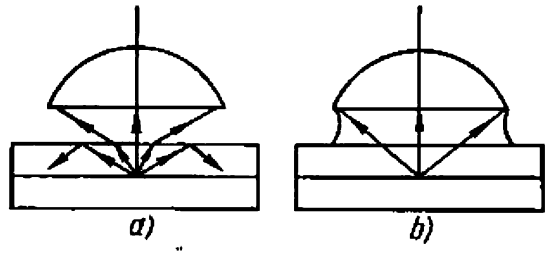

Fig. 287. Efecto que produce la inmersión.

el nombre de *inmersión*. Por medio de la inmersión con $n = 1{,}5$ la apertura numérica del microscopio puede hacerse llegar hasta 1,4 y su poder separador se puede aumentar aproximadamente 1,5 veces, en comparación con el que se consigue cuando el espacio que hay entre la preparación y el objetivo está ocupado por el aire.

Para que los detalles resueltos por el objetivo del microscopio puedan percibirse separadamente por el ojo, el aumento del ocular deberá elegirse de forma que dichos detalles se vean bajo un ángulo de cerca de $1'$.

El ocular no puede añadir detalles que no hayan sido resueltos por el objetivo del microscopio. Pero como quiera que la difinición del poder separador por el criterio de Rayleigh tiene carácter aproximado, el número de detalles que el ojo puede distinguir al microscopio y su grado de fidelidad aumenta en realidad cuando se toma un ocular cuyo aumento es algo mayor que el antes indicado.

Cuando se trata de fotografiar objetos al microscopio el poder separador puede elevarse pasando a utilizar rayos ultravioletas con longitud de onda menor que la de los rayos visibles.

Un microscopio ultravioleta permite (siendo $\lambda \cong 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm) resolver detalles dos veces más pequeños que los que se consiguen separar con el microscopio ordinario.

§ 330. Fenómenos de difracción en el microscopio. En el § 329, al estudiar el poder separador del microscopio, consideramos que cada punto del objeto

era una fuente de luz independiente. Las vibraciones procedentes de puntos diferentes no son coherentes. Cada punto del objeto origina en el plano focal del objetivo su círculo de difracción. En los sitios en que estos círculos de difracción se superponen parcialmente los rayos no interfieren entre sí y sus iluminaciones simplemente se suman. Estos razonamientos nos permitieron determinar el poder separador del microscopio examinando la curva que representa la suma de la distribución de las iluminaciones de dos círculos de difracción contiguos. No obstante, los objetos que se observan al microscopio no tienen luminosidad propia en la mayoría de los casos, sino que reciben la iluminación de una fuente luminosa externa. Por esta razón, las vibraciones que parten de los distintos puntos del objeto son, en cierta medida, coherentes. Serán totalmente coherentes las vibraciones que partan de distintos puntos del objeto cuando éste sea iluminado por un haz paralelo de rayos coherentes, es decir, por un haz obtenido por medio de una lente en cuyo plano focal se encuentre una fuente luminosa puntual.

Pero la iluminación del objeto se consigue generalmente dirigiendo sobre él la imagen de una fuente luminosa, de dimensiones finitas, por medio de un condensador. En este caso es de esperar que los rayos que parten de los distintos puntos del objeto tampoco sean coherentes, puesto que cada punto del objeto será iluminado por un sitio diferente de la fuente. Pero esta deducción sólo es justa para aquellos puntos del objeto que no están demasiado próximos entre sí. Los puntos del objeto que están próximos pueden ser iluminados por rayos procedentes de un mismo punto de la fuente luminosa, ya que el sistema condensador tiene de por sí un poder separador finito (al mismo tiempo que aberraciones) y la imagen que cada punto de la fuente producirá después de atravesar dicho sistema será un círculo de dimensiones también finitas. Esta es la causa de que el objeto, por lo general, resulte iluminado por luz compuesta, coherente y no coherente.

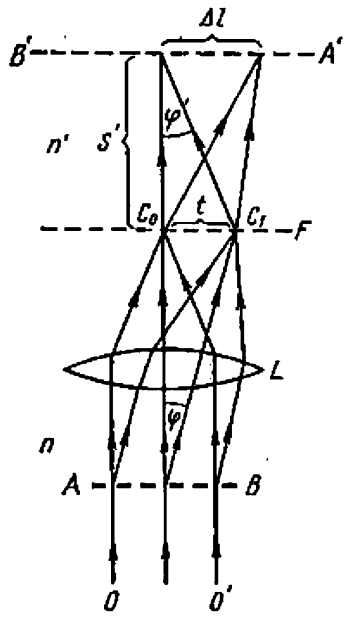

Fig. 288. Formación de la imagen de una red de difracción en el microscopio.

Como quiera que la distribución de la iluminación producida por los rayos de luz no coherente (que no interfieren entre sí) es diferente de la que producen los rayos coherentes (que interfieren entre sí), cabe suponer que el poder separador del microscopio depende del procedimiento de iluminación que se emplee. Abbe derarrolló la teoría del poder separador del microscopio para el caso límite en que la luz es totalmente coherente.

Para facilitar el cálculo de la interferencia de los rayos procedentes de los distintos puntos del objeto iluminado con luz coherente, Abbe eligió como objeto una red de difracción transparente. Supongamos que la red AB, cuya constante es b, se ilumina con un haz paralelo OO' de rayos coherentes (fig. 288). La imagen de la red que produce el objetivo del microscopio L se forma en el plano $A'B'$. En el plano focal principal F del objetivo L lo que se obtiene es la imagen de los espectros de distintos órdenes que produce la red. Por la fórmula (7) del § 270 el espectro de orden k es originado por los rayos que se difractan formando un ángulo φ determinado por la correlación:

$$b \operatorname{sen} \varphi = k\lambda, \qquad (1)$$

Cuando se trata de un sistema de inmersión (§ 329) la red está sumergida en un líquido cuyo índice de refracción n, debiendo entenderse por λ la longitud de onda en este líquido. Si lo que se entiende por λ es la longitud de onda en el vacío (prácticamente en el aire), como generalmente se hace, hay que dividir por n la parte derecha de la igualdad (1), y entonces obtenemos:

$$b \operatorname{sen} \varphi = k \frac{\lambda}{n}. \tag{1a}$$

Cuando $k = 0$ se obtiene una franja central brillante. Los rayos procedentes de esta franja central y de los diferentes espectros interfieren en el plano $A'B'$ dando lugar a la formación de la imagen de la red AB. Si una parte de los espectros está cerrada (tapada), la imagen de la red se deforma. Supongamos, por ejemplo, que se tapan todos los espectros y que solamente se deja la franja central brillante C_0. Esta franja produce en el plano $A'B'$ una iluminación uniforme. De esta forma, si se deja abierta únicamente la franja central brillante, en el ocular enfocado al plano $A'B'$ veremos un campo iluminado uniformemente, pero no la imagen de la red.

Supongamos ahora que está abierta la franja central C_0 y uno de los espectros, por ejemplo, el C_1, correspondiente a $k = 1$. Para simplificar consideremos que la red se ilumina con luz monocromática. En este caso el espectro C_1 se reduce a un máximo y en el plano focal principal del objetivo F se encontrarán dos fuentes de luz coherentes, la franja central C_0 y el máximo C_1, situadas a una distancia t una de otra. Los rayos procedentes de estas fuentes, interfiriendo entre sí en el plano $A'B'$, originan una serie de franjas de interferencia paralelas. La distancia entre dos franjas brillantes contiguas, según el cálculo que expusimos en el § 256, es igual:

$$\Delta l = \frac{\lambda}{t} s',$$

donde s' es la distancia que hay desde el plano focal principal F hasta el plano $A'B'$. Por la fig. 288 tenemos que $\frac{t}{s'} \cong \operatorname{sen} \varphi'$, de donde obtenemos que

$$\Delta l = \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \varphi'}. \tag{2}$$

Los trazos transparentes de la red se encuentran entre sí a una distancia b; llamando $\Delta y'$ a la dimensión de su imagen obtenida en el plano $A'B'$ de acuerdo con las reglas de la óptica geométrica, por la correlación de los senos (§ 329), tenemos:

$$nb \operatorname{sen} \varphi = n' \Delta y' \operatorname{sen} \varphi'.$$

Suponiendo que el índice de refracción del medio en que se forma la imagen es $n' = 1$ (el aire), de la última igualdad obtenemos:

$$\Delta y' = \frac{nb \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi'}.$$

Como quiera que limitamos el haz que sale del objetivo del microscopio de forma que solamente pudieran pasar la franja central brillante y uno de los espectros, el valor del seno φ vendrá determinado por la igualdad (1a), en la cual hay que considerar $k = 1$, entonces $nb \operatorname{sen} \varphi = \lambda$ y

$$\Delta y' = \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \varphi'}.$$

Comparando esta expresión con la (2), obtenemos: que las franjas de interferencia que se forman en el plano $A'B'$ se encuentran entre sí a una distancia Δl, igual

a la distancia $\Delta y'$ a que deben encontrarse las imágenes de las franjas brillantes de la red. En el plano $A'B'$ se produce una especie de «imagen» de la red, la cual se diferencia de la imagen geométrica correcta en que la transición desde los máximos, correspondientes a las franjas brillantes de la red, hasta los mínimos, correspondientes a sus franjas oscuras, no es brusca, sino paulatina. Se puede demostrar con todo rigor que si se deja pasar un mayor número de espectros, como resultado de las interferencias de los rayos procedentes de ellos, la transición entre los máximos y los mínimos en el plano $A'B'$ se hará más brusca, es decir, la «imagen» se parecerá más al objeto.

De los razonamientos expuestos podemos deducir que los trazos de la red estarán resueltos en la figura de interferencia que se forma en el plano $A'B'$

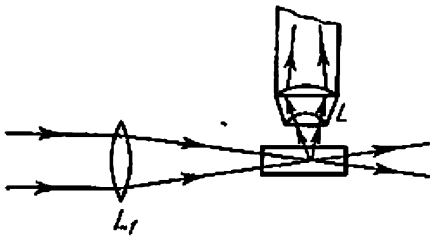

Fig. 289. Esquema para la observación de partículas ultramicroscópicas.

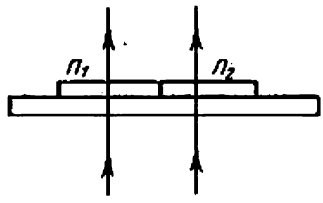

Fig. 290. Paso de los rayos a través de partes del objeto cuyos índices de refracción son diferentes.

siempre que se deje pasar el máximo central y, por lo menos, uno de los espectros, es decir, siempre que el ángulo φ cumpla la condición:

$$\operatorname{sen} \varphi \geqslant \frac{\lambda}{nb}.$$

En otras palabras, el microscopio puede resolver los trazos de la red si éstos se encuentran entre sí a una distancia

$$b \geqslant \frac{\lambda}{n \operatorname{sen} \varphi}.$$

En el § 329 vimos que dos puntos luminosos pueden ser resueltos por el microscopio si la distancia entre ellos no es menor de $0{,}61 \frac{\lambda}{n \operatorname{sen} \varphi}$. De esta forma resulta que el poder separador del microscopio, cuando el objeto se ilumina con luz coherente, es el mismo aproximadamente que cuando se observa un objeto cuyos puntos aislados emiten rayos no coherentes.

De la teoría de Abbe se deduce que la «imagen» puede resultar no semejante geométricamente al objeto si de forma artificial se tapa una parte de los espectros que se obtienen en el plano focal principal F del objetivo. Por ejemplo, si se dejan pasar solamente el máximo central y los espectros de órdenes pares ($k = \pm 2, \pm 4, \ldots$), las franjas brillantes se encontrarán en la «imagen» a una distancia entre sí $\Delta l' = \frac{1}{2} \Delta y'$, es decir, la «imagen» dará dos veces más trazos que los que en realidad existen en la red que se observa. Estas deducciones han sido confirmadas por las observaciones llevadas a cabo colocando diafragmas de distinta forma en el plano focal principal F.

El desarrollo ulterior de la teoría del microscopio se debe a los físicos soviéticos L. I. Mandelshtam y D. S. Rozhdiéstvenski. El primero desarrolló concretamente la teoría relativa a los objetos con luminancia propia y demostró tanto teórica como experimentalmente que una serie de deducciones de Abbe, entre ellas la de la posibilidad de que se duplique el número de trazos de la red, conservan su validez cuando se trata de objetos con luminancia propia. D. S. Rozhdiéstvenski investigó el caso más general, es decir, el caso en que la luz es coherente parcialmente, y puso de manifiesto el papel tan importante que desempeñan los fenómenos de la interferencia entre los haces luminosos que pasan a través de las distintas partes del objeto. En la mayoría de los casos los objetos que se observan al microscopio son más o menos transparentes. Los rayos que pasan a través de las distintas partes del objeto adquieren cierta diferencia de marcha o interfieren entre sí. En los bordes del objeto se producen franjas de interferencia que deforman aún más la imágen.

Las deducciones que sacamos tanto de este párrafo como del § 329 demuestran que cuando el poder separador del microscopio se aproxima al límite comienza a desaparecer la semejanza geométrica entre el objeto y su imagen. En estas condiciones, cuando la observación se hace visualmente, los microscopios permiten resolver, sin recurrir a la inmersión, objetos cuyas dimensiones sean del orden de 0,3μ, y recurriendo a ella, objetos del orden de 0,2μ. Cuando la observación se hace por medio de la fotografía con rayos ultravioletas pueden separarse objetos con dimensiones del orden de 0,1μ.

Si no se exige la semejanza geométrica entre el objeto que se observa y su imagen, el microscopio da la posibilidad de descubrir partículas con dimensiones mucho menores que una décima de micra. Esto se consigue con un procedimiento de observación basado en la difusión de la luz por las partículas pequeñas. El esquema de este procedimiento es el que se representa en la fig. 289. Un haz luminoso se concentra por medio de la lente L_1 sobre una cubeta en la que se encuentran en estado de suspensión pequeñas partículas. Estas partículas se conocen generalmente con el nombre de *ultramicroscópicas*. La luz difundida independientemente por una de las partículas ultramicroscópicas incide sobre el objetivo del microscopio L y produce en su plano focal un círculo de difracción. La existencia de este círculo pone de manifiesto la presencia de partículas y sus movimientos. El conjunto de las partículas que se observan tiene el aspecto de estrellitas brillantes sobre fondo negro (iluminación con campo oscuro). Este procedimiento «ultramicroscópico» permite descubrir la existencia de partículas de hasta 0,005μ de diámetro.

Otro procedimiento que se utiliza en la microscopía moderna es el que sirve para observar objetos que no absorben la luz, sino que únicamente producen en los haces luminosos ciertas diferencias de marcha. La mayoría de los objetos biológicos que se suelen observar al microscopio son transparentes y hay que teñirlos previamente de tal forma que los diferentes tejidos tomen distintas coloraciones. La elección de estos tintes suele ser difícil. Pero los tejidos sin teñir tampoco son ópticamente homogéneos, puesto que tienen diferentes índices de refracción de la luz. Por esto, entre las ondas que pasan a través de la parte del objeto cuyo índice de refracción es n_1 (fig. 290) y las que pasan a través de la parte con índice de refracción n_2 surge una diferencia de fase determinada. Esta diferencia de fase no se pone de manifiesto directamente. Pero en el año 1935 Zernike indicó que introduciendo en los rayos que producen la franja central brillante C_0 (véase la fig. 288) una diferencia de fase adicional de $\pi/2$ se puede conseguir que estos rayos interfieran con los que se difractan en las heterogeneidades del objeto que se observa y de esta forma descubrir la estructura de éste sin necesidad de teñirlo. Este procedimiento se llama de *observación en contraste de fase*.

CAPITULO XXIX

Fotones

§ 331. Teoría clásica de la radiación del electrón y límites dentro de los cuales puede aplicarse. En los capítulos anteriores de nuestro curso hemos visto que un gran número de fenómenos ópticos son explicables si se admite que dentro de los átomos y de las moléculas existen electrones que vibran e irradian luz cuya frecuencia ν es la misma que la de sus propias vibraciones. Esta hipótesis se confirma por las deducciones de la electrodinámica clásica, de las cuales resulta que todo electrón que se mueva con una aceleración $\ddot{x}$ emitirá ondas electromagnéticas cuya potencia será igual a

$$W = \frac{2e^2\ddot{x}^2}{3c^3}. \qquad (1)$$

Cuando el electrón realiza un movimiento vibratorio armónico de amplitud a y frecuencia ν, en torno a él se produce una onda electromagnética esférica de la misma frecuencia ν.

La potencia de la radiación del electrón (media con respecto al tiempo) es igual en este caso, y de acuerdo con la fórmula (1), a la magnitud

$$\overline{W} = \frac{16\pi^4 e^2 \nu^4 a^2}{3c^3}. \qquad (2)$$

Si el movimiento que realiza el electrón no es una vibración armónica pura, este movimiento puede desarrollarse en serie de Fourier en sus componentes armónicas. A cada una de las componentes de amplitud a_i le corresponderá una potencia de emisión $\overline{W_i}$ que vendrá determinada por la igualdad (2).

De hecho el electrón nunca realiza vibraciones armónicas puras, puesto que al irradiar pierde energía. Por esta razón la amplitud de sus vibraciones se amortigua siempre que no se le comunique constantemente energía de cualquier fuente externa. Un electrón de este tipo, que realiza vibraciones amortiguadas, emite una radiación cuya amplitud a_i se diferencia sensiblemente de cero en un intervalo de frecuencias finito (compárese con lo expuesto en el t. I, § 104). En otras palabras, el electrón que realiza vibraciones amortiguadas no emite una luz rigurosamente monocromática, sino una raya espectral de anchura finita. La anchura $\delta\nu$ de esta raya,

llamada «natural», viene determinada por la magnitud

$$\delta\nu = \frac{\gamma}{2\pi}, \quad \text{donde} \quad \gamma = \frac{8\pi^2 e^2 \nu^2}{3c^3 m}. \tag{3}$$

Por la fórmula (3) puede verse que la anchura natural depende únicamente de la carga e, de la masa del electrón m, de la velocidad de la luz c y de la frecuencia de la emisión ν. Para frecuencias del orden de 10^{15} seg^{-1} (luz visible) esta anchura es igual a $\delta\nu \cong 4 \cdot 10^7$ seg^{-1}, es decir, muy pequeña relativamente. Por esto podemos considerar con grado de aproximación suficiente que el electrón que dentro de un átomo o de una molécula tenga una frecuencia propia ν de vibraciones armónicas irradiará, de acuerdo con la electrodinámica clásica, una luz de esta misma frecuencia ν.

El desarrollo en integral de Fourier da para el movimiento no periódico del electrón en el caso general una amplitud a_i diferente de cero para todas las frecuencias ν_i. De esto se deduce que, en este caso, la radiación se caracterizará por tener ondas de todas las longitudes posibles, es decir, por ser *continua* y no de rayas.

Un ejemplo de radiación continua del electrón puede ser la llamada *radiación de frenado* o de enfrenamiento, que surge cuando se detiene el electrón. Aplicando la fórmula (1) obtenemos que el electrón que experimenta el frenado irradia durante el tiempo dt una energía

$$W \cdot dt = \frac{2e^2 \ddot{x}^2}{3c^3} dt.$$

Suponiendo que Δt sea el tiempo durante el cual se frena por completo el electrón, es decir, el tiempo durante el cual varía su velocidad desde el valor primitivo v hasta cero, y que el frenado se produce con una aceleración constante $\ddot{x} = w_0$, obtendremos que la cantidad total de energía E irradiada durante el tiempo Δt será:

$$E = \int_0^{\Delta t} \frac{2e^2 w_0^2}{3c^3} dt = \frac{2e^2 w_0^2}{3c^3} \Delta t.$$

Y como quiera que cuando la aceleración es constante tiene lugar la correlación $w_0 = \frac{v}{\Delta t}$, la última fórmula da que

$$E = \frac{2e^2 v^2}{3c^3 \Delta t}. \tag{4}$$

Por la fórmula (4) vemos que la radiación de energía será tanto mayor cuanto mayor sea la velocidad inicial v del electrón y menor el tiempo Δt de frenado. Esto significa que solamente puede esperarse una radiación sensible de energía cuando se frene bruscamente un electrón rápido. Estas condiciones se cumplen cuando se

bombardea un anticátodo sólido con electrones rápidos, como ocurre en los tubos de rayos X.

El hecho de que el tiempo Δt de frenado sea muy pequeño da lugar a que las ondas emitidas sean cortas. De esta forma se explica el origen de los rayos X.

El desarrollo del movimiento retardado de un electrón en integral de Fourier muestra que el espectro que en estas condiciones irradia dicho electrón es continuo y que tiene un máximo de energía que se encontrará en una región de longitudes de onda tanto más cortas cuanto mayor sea la velocidad inicial de los electrones. La experiencia confirma esta conclusión. En la fig. 291 pueden verse las curvas de distribución de la energía en un espectro continuo de rayos X obtenido al chocar el haz de electrones con un anticátodo de wolframio. Estas curvas corresponden a distintas diferencias de potencial de aceleración $V - V_0$, las cuales se variaron desde 20 hasta 50 kV.

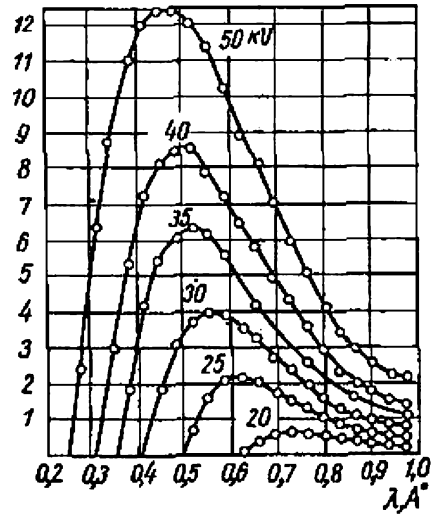

Fig. 291. Distribución de la energía en el espectro continuo de los rayos X.

Como otro ejemplo de radiación del electrón mencionaremos la que tiene lugar en los llamados betatrones y sincrotrones (§ 377). En estos aparatos el electrón, al moverse impulsado circularmente por un campo eléctrico rotacional alcanza, velocidades muy grandes, próximas a la velocidad de la luz. En el año 1944 los físicos soviéticos I. Pomeranchuk y D. Ivanenko predijeron que los electrones que se mueven circularmente en el betatrón o sincrotrón debían radiar. Poco tiempo después esta radiación fue observada en un sincrotrón que aceleraba los electrones hasta una energía de $7 \cdot 10^7$ eV. La órbita del haz de electrones tenía un diámetro de 29,3 cm. La irradiación, que fue observada visualmente, tenía el aspecto de una manchita brillante de luz blanca cuando se miraba por el tubo de vacío, en el plano de la órbita, al encuentro del electrón.

Los ejemplos citados demuestran que es posible aplicar la electrodinámica clásica a los cálculos de la radiación del electrón cuando éste tiene movimiento acelerado. Irradian únicamente los electrones que se mueven con aceleración; los electrones cuyo movimiento es uniforme no deben irradiar. Esta conclusión solamente es verdadera mientras la velocidad v del electrón que se mueve es menor que la velocidad de fase de la luz. La luz se propaga en el

vacío con la máxima velocidad posible c y, por consiguiente, la velocidad v del electrón no puede ser mayor que c. Pero cuando el electrón se mueve en una sustancia transparente cualquiera la cosa varía. En las sustancias transparentes la velocidad de fase de la luz es igual a c/n, siendo n el índice de refracción de la sustancia. Los cuerpos sólidos y líquidos tienen índices de refracción n considerablemente mayores que la unidad y, por lo tanto, la velocidad del electrón puede superar el valor c/n. La luminosidad del electrón cuando se mueve con una velocidad «ultraluminosa» fue descubierta en el año 1934 por P. A. Cherenkov al observar el paso a través de un líquido de electrones muy rápidos producidos por los rayos γ de elementos radiactivos. La teoría de este fenómeno fue elaborada por I. M. Frank y I. E. Tamm.

La luminosidad descubierta por P. A. Cherenkov se encuentra distribuida dentro de los límites de un cono cuyo ángulo de abertura θ puede determinarse por la correlación

$$\cos\theta = \frac{c}{vn}, \tag{5}$$

donde θ es el ángulo medido a partir de la dirección en que se mueve el electrón. La fórmula (5) da para θ valores menores de $\pi/2$, por consiguiente, la luminosidad puede observarse únicamente en la misma dirección en que el electrón se mueve. En el sentido contrario no existe irradiación luminosa.

Esta correlación está en perfecto acuerdo con los experimentos. Así, por ejemplo, para el benceno se observó un valor de $\theta = 38°30'$, siendo el calculado por la fórmula (5) igual a $38°40'$.

Todos los ejemplos expuestos demuestran la coincidencia de las deducciones de la electrodinámica clásica con los datos experimentales. No obstante, a medida que la Física se ha ido desarrollando se han ido acumulando hechos que están en desacuerdo tanto con la teoría clásica de la radiación como con las hipótesis sobre la naturaleza ondulatoria de la luz en general. La primera disconformidad evidente de las deducciones de la teoría clásica de la radiación con los datos experimentales se puso de manifiesto al estudiar la distribución de la energía según las longitudes de onda en el espectro del cuerpo negro. Como dijimos en los §§ 309 y 310, partiendo de los principios termodinámicos generales se puede demostrar que la distribución de la energía en el espectro del cuerpo negro es una función universal que depende exclusivamente de la longitud de onda y de la temperatura absoluta. Sin embargo la forma justa de esta función solamente pudo ser establecida por Plank después de sentar un criterio extraño totalmente a las concepciones clásicas, es decir, después de postular que la luz es emitida en forma de porciones aisladas (cuantos) $\varepsilon = h\nu$, siendo ν la frecuencia de la radiación y h la constante de Plank, que es igual a $6{,}624 \cdot 10^{-27}$ erg seg.

Otro ejemplo que demuestra que la teoría clásica de la radiación no sirve es el caso de la radiación de enfrenamiento de los rayos X. Ya hemos indicado que el desarrollo del movimiento retardado en serie de Fourier explica el carácter continuo de su radiación, con la particularidad de que en este desarrollo pueden existir frecuencias tan grandes como se desee, de donde se deduce que el espectro continuo de los rayos X no debe estar limitado por el lado de las ondas cortas, aunque su intensidad en la región de estas ondas pueda ser pequeña. Pero la experiencia demuestra que las curvas de la distribución de la energía en el espectro continuo de los rayos X tiene un límite por el lado de las longitudes de onda cortas (fig. 291). La situación de este límite depende de la velocidad de los electrones que chocan con el anticátodo, pero no del material de que está hecho este último. Cuanto mayor es la velocidad de los electrones tanto más corta es la longitud de onda λ_0 a que corresponde el límite del espectro. Numerosas mediciones han demostrado que la longitud de onda λ_0 a que corresponde el límite del espectro es inversamente proporcional a la diferencia de potencial (voltaje) $V_1 - V_2$ que acelera a los electrones:

$$\lambda_0 = \frac{K}{V_1 - V_2}. \qquad (6)$$

Si en la fórmula (6) la longitud de onda λ_0 se mide en angstrom y la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ en voltios, el coeficiente de proporcionalidad K tendrá el valor $K = 12\,350$.

La existencia del límite de las ondas cortas en el espectro continuo de los rayos X se explica directamente por la hipótesis de Plank sobre la radiación de la energía en porciones $\varepsilon = h\nu$. Efectivamente, si la radiación se debe a la energía de los electrones que se frenan, la energía radiada por el electrón no puede ser mayor que su energía inicial:

$$\varepsilon = h\nu \leqslant E_c, \qquad (7)$$

donde E_c es la energía cinética del electrón que choca con el anticátodo. Como el electrón que pasa entre dos puntos cuya diferencia de potencial es $V_1 - V_2$ tiene una energía $E_c = e(V_1 - V_2)$, donde e es su carga, tendremos que de acuerdo con (7)

$$h\nu \leqslant e(V_1 - V_2).$$

De aquí obtenemos que la frecuencia máxima ν_0 a que puede radiar el electrón retardado será:

$$\nu_0 = \frac{e}{h}(V_1 - V_2).$$

Pasando de las frecuencias ν a las longitudes de onda, hallamos que la longitud de onda correspondiente al límite del espectro con-

tinuo de los rayos X viene determinado por la igualdad

$$\lambda_0 = \frac{hc}{e}\,\frac{1}{V_1 - V_2} = \frac{K}{V_1 - V_2},$$

que coincide con la fórmula empírica (6). Aplicando los valores numéricos conocidos de h, c y e, hallamos que $K = \frac{hc}{e} = 4{,}13 \cdot 10^{-7}$. Si este valor lo traducimos al sistema de unidades en que λ_0 se expresa en angstrom y $V_1 - V_2$ en voltios, tendremos que $K = 12\,340$, lo que coincide bien con el valor obtenido por medición directa del límite de las ondas cortas en el espectro continuo de los rayos X.

§ 332. Efecto fotoeléctrico. En el párrafo anterior hemos estudiado fenómenos que demuestran que la luz es radiada en porciones (cuantos) $\varepsilon = h\nu$. La absorción de la luz se realiza en las mismas porciones que su radiación. Esto se deduce con especial claridad del efecto fotoeléctrico, que se reduce a que por la acción de la luz se pueden arrancar electrones de los cuerpos.

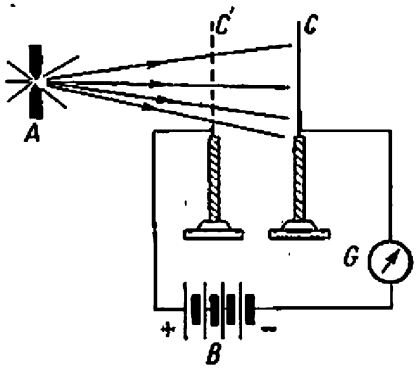

Fig. 292. Esquema del experimento de A. G. Stoliétov.

La influencia que ejerce la luz en el desarrollo de los procesos eléctricos fue descrita la primera vez por Hertz, que observó que las descargas eléctricas entre dos esferas de zinc se producen con mucha más facilidad si una de ellas se ilumina con luz ultravioleta. Estudios posteriores más detenidos sobre la influencia que ejerce la luz en los cuerpos cargados eléctricamente fueron realizados durante el período 1888-1890 por el profesor de la Universidad de Moscú A. G. Stoliétov, simultáneamente este efecto fue estudiado también por el físico inglés Hallwachs.

El esquema del experimento de Stoliétov puede verse en la fig. 292, donde CC' es un condensador formado por una lámina de zinc pulimentada C y por una rejilla metálica C'. Entre la lámina y la rejilla se creaba una diferencia de potencial por medio de la batería B. La corriente que se producía al variar la carga de la lámina C se podía medir con el galvanómetro G. La lámina C se iluminaba con la luz procedente del arco eléctrico A. Stoliétov estableció que la lámina C, cargada negativamente, perdía su carga bajo la acción de la luz. Este fenómeno, llamado por Stoliétov «*actinoeléctrico*», se conoce en la actualidad con el nombre de *efecto*

fotoeléctrico. Más adelante Stoliétov estableció las siguientes regularidades fundamentales que rigen el efecto fotoeléctrico: 1) el cuerpo pierde su carga únicamente cuando ésta es negativa; cuando es positiva no se produce descarga por efecto de la luz; 2) el efecto fotoeléctrico se produce principalmente por los rayos ultravioletas; 3) el efecto de descarga producido por los rayos es proporcional a sus energías; 4) este efecto se observa incluso cuando la iluminación dura muy poco tiempo, con la particularidad de que entre el momento en que se ilumina el cuerpo y el comienzo de la descarga no transcurre un tiempo apreciable.

Stoliétov estudió después el efecto fotoeléctrico colocando en el vacío la lámina que se iluminaba. Este mismo procedimiento fue utilizado por otros investigadores. El esquema del artificio de que se valió se muestra en la fig. 293. La lámina K se iluminaba con una radiación ultravioleta que entraba por la ventanilla de cuarzo O. La diferencia de potencial $V_1 - V_2$ que se creaba entre la lámina K y el segundo electrodo A se medía con el voltímetro V. Al iluminarse la lámina K, entre ésta y la A se producía una corriente que podía medirse con el galvanómetro G. Como en el recipiente existía un buen vacío, la corriente podía producirse exclusivamente gracias a las partículas cargadas que se desprendían de la lámina iluminada. Como quiera que el fenómeno se observaba lo mismo en láminas K hechas de cualquier metal, era natural suponer que las partículas arrancadas por la luz fueran electrones.

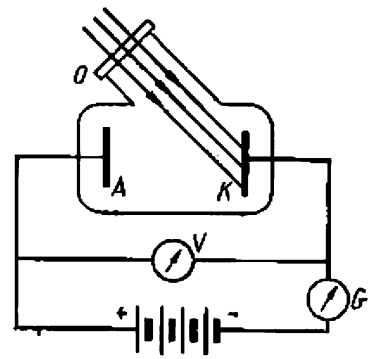

Fig. 293. Esquema del experimento para estudiar el efecto fotoeléctrico en el vacío.

La demostración directa de que la luz hace que se desprendan electrones de los cuerpos se debe a A. F. Ioffe, que utilizó para ello el método de la partícula suspendida entre las dos placas de un condensador (t. II, § 151). El esquema del experimento de Ioffe se muestra en la fig. 294. Dentro de un recipiente de vidrio C se encontraban dos electrodos E y D entre los cuales tenía lugar la descarga eléctrica, produciéndose una pulverización del metal de que estaban hechos los electrodos. A través de la llave de paso F las partículas podían hacerse llegar al espacio comprendido entre las placas a y b de un condensador. Este condensador se encontraba dentro de una caja B que lo protegía de las influencias externas. La caja B tenía dos ventanillas, una de cuarzo e, que servía para iluminar las partículas con rayos ultravioletas, y otra f, a través

de la cual se observaban dichas partículas al microscopio. La partícula, cargada por su rozamiento con el aire, se equilibraba dentro del condensador por medio de la correspondiente diferencia de potencial entre las placas a y b. Cuando la partícula se iluminaba con un flujo débil de rayos ultravioletas su carga cambiaba de tiempo en tiempo y, como resultado de esto, salía de su posición de equilibrio y comenzaba a moverse en dirección a la placa negativa del condensador. Esta circunstancia era señal de que la partícula había perdido su carga negativa. Aplicando una nueva diferencia de potencial entre las placas a y b del condensador se conseguía volver a equilibrar la partícula. Por el valor de las potencias equilibradoras se calculaba la variación experimentada por la carga de la partícula, la cual resultó ser igual a la carga e del electrón.

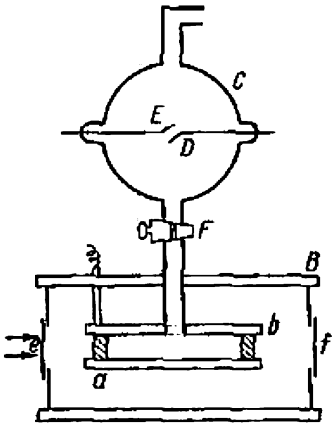

Fig. 294. Esquema del experimento de A. F. Ioffe.

Volviendo al esquema del experimento representado en la fig. 293, estudiemos el procedimiento para medir el número de electrones que se desprenden de la lámina iluminada y la velocidad de los mismos. La intensidad I de la corriente que surge entre los electrodos K y A, cuando la composición y la potencia de la radiación permanecen constantes, depende de la diferencia de potencial $V = V_1 - V_2$ que existe entre los electrodos. La variación de I en función de V, para el caso en que la lámina se ilumina con luz monocromática, se muestra en la fig. 294. Esta curva recibe el nombre de *característica de voltios-amperios*. En el caso que estudiamos esta característica se distingue por las dos peculiaridades siguientes: a) porque al aumentar la diferencia de potencial aceleradora V la corriente I llega a la saturación, y b) porque existe un valor de la diferencia de potencial *retardadora* (potencial o voltaje retardador) V_R llegando al cual cesa la corriente I.

Es evidente que la corriente de saturación I_S (t. II, § 172) se consigue cuando todos los electrones arrancados de la lámina K por la luz llegan al electrodo A. De acuerdo con los resultados de las observaciones de Stoliétov (tercera regularidad), la corriente de saturación es directamente proporcional a la potencia del flujo luminoso W que incide sobre la lámina. Como quiera que la corriente de saturación $I_S = en$, donde n es el número de electrones arrancados en la unidad de tiempo, tendremos que el *número de electrones arrancados en la unidad de tiempo será directamente proporcional a la potencia de la radiación incidente.*

La existencia de la corriente I cuando el potencial es retardador (la parte ab de la curva de la fig. 295) indica que los electrones que arranca del cuerpo la luz tienen una determinada velocidad inicial. Estos electrones dejan de llegar al electrodo A cuando el trabajo del campo eléctrico retardador eV_R se hace igual a su energía cinética inicial:

$$eV_R = \frac{mv^2}{2}. \qquad (1)$$

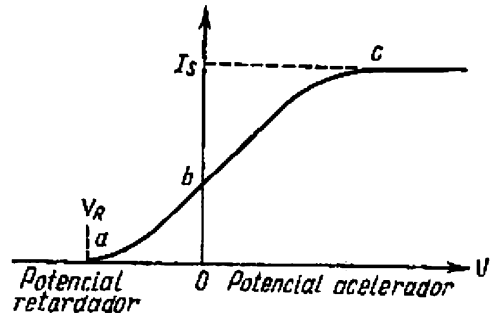

Fig. 295. Característica de voltios-amperios.

Tiene gran interés la variación de la velocidad v de los fotoelectrones en función de la frecuencia ν de la luz. Los experimentos proporcionan directamente la variación que experimenta el potencial retardador V_R en función de ν; la relación que existe entre la velocidad v y la frecuencia ν se puede hallar partiendo de la correlación (1) entre v y V_R. Numerosas mediciones han demostrado que V_R es una función lineal de la frecuencia ν:

$$V_R = k\nu - V_0, \qquad (2)$$

donde k y V_0 son constantes y k no depende de la clase de material. En la fig. 296 se reproducen los datos obtenidos por Millikan midiendo los potenciales retardadores aplicados a los electrones arrancados de la superficie del sodio por luz de distintas frecuencias. La frecuencia de la luz ν se toma sobre el eje de abscisas y el potencial retardador V_R sobre el eje de ordenadas. Los puntos obtenidos experimentalmente se encuentran exactamente en línea recta.

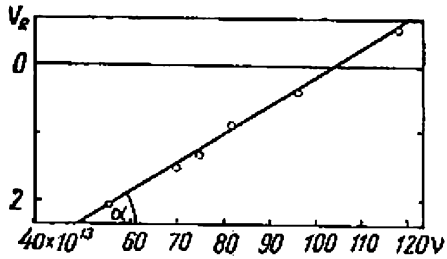

Fig. 296. Datos experimentales que demuestran que el potencial retardador es función lineal de la frecuencia.

Como el potencial retardador V_R está relacionado unívocamente con la velocidad de los electrones por la correlación (1), de la fórmula (2) tenemos que *la velocidad de los electrones arrancados al cuerpo por el efecto fotoeléctrico será tanto mayor cuanto mayor sea la frecuencia ν de la luz absorbida.*

La correlación (2) se puede escribir de otra forma si en lugar de V_R ponemos su valor por medio de $\frac{mv^2}{2}$ según (1); en este caso

tendremos que

$$\frac{mv^2}{2} = ekv - eV_0. \qquad (3)$$

De la igualdad (3) se deduce que *la energía cinética inicial de los fotoelectrones aumenta linealmente con la frecuencia* ν *de la luz.*

De las correlaciones (2) y (1) podemos sacar otra conclusión: para que los electrones puedan ser arrancados del cuerpo por la luz la frecuencia ν deberá satisfacer la desigualdad $\nu \geqslant \frac{V_0}{k}$. La magnitud $\nu_0 = \frac{V_0}{k}$ se llama *frecuencia umbral o umbral fotoeléctrico.* Solamente aquella luz cuya longitud de onda es menor que $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{ck}{V_0}$ puede producir efecto fotoeléctrico. λ_0 tiene valores diferentes para cuerpos distintos, con la particularidad de que para la mayoría de los cuerpos (véase la tabla XIII) λ_0 corresponde a la región ultravioleta; los metales alcalinos son los únicos para los cuales λ_0 cae en la región visible del espectro. Con esto se confirma la deducción hecha por Stoliétov de que el efecto fotoeléctrico se produce principalmente bajo la acción de los rayos ultravioletas. El valor de λ_0 depende mucho del grado de lisura de la superficie del cuerpo y de los gases absorbidos. Los datos de la tabla XIII se refieren a metales desgasificados.

Tabla XIII

Umbral fotoeléctrico rojo

Metal	Cs	Na	Zn	Ag	Pt
λ_0 en Å	6 600	5 000	3 720	2 600	1 962

Finalmente, los experimentos han confirmado magníficamente la afirmación de Stoliétov de que entre el momento en que se ilumina el cuerpo y el comienzo del efecto fotoeléctrico no transcurre un tiempo apreciable. Stoliétov determinó este hecho con una precisión de hasta una milésima de segundo. Los experimentos llevados a cabo últimamente indican que el tiempo que transcurre desde el comienzo de la iluminación hasta la aparición de la corriente fotoeléctrica no es mayor de 10^{-9} s.

La intensidad del efecto fotoeléctrico depende de la longitud de onda de la luz incidente. Cuando la potencia de la radiación es la misma, la intensidad de la corriente de saturación I_S es diferente para distintas longitudes de onda λ. En la fig. 297 se muestra la curva de la sensibilidad de una capa de plata óxido de cesio. El umbral fotoeléctrico de esta capa se encuentra en la región infrarroja, cerca de $\lambda_0 = 11\,000$ Å. Empezando por este valor, la curva de sensi-

bilidad se eleva rápidamente dando un máximo cerca de $\lambda = 8\,000$ Å; el segundo máximo se encuentra cerca de $\lambda = 3\,800$ Å.

Los máximos de sensibilidad que se observan están particularmente bien definidos cuando la superficie se ilumina con luz plano polarizada en la que el vector campo eléctrico E vibra paralelamente al plano de incidencia. Este tipo de fenómeno se conoce con el nombre de *efecto fotoeléctrico selectivo*. El efecto fotoeléctrico selectivo no se produce si el vector campo eléctrico de la onda incidente vibra perpendicularmente al plano de incidencia.

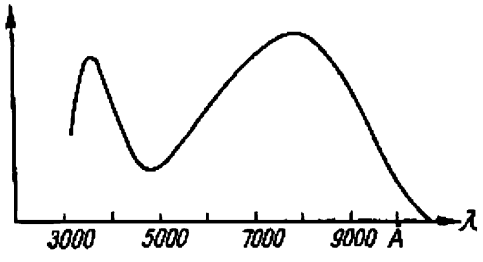

Fig. 297. Curva de la sensibilidad de la capa de plata óxido de cesio.

§ 333. Fórmula de Einstein y su comprobación experimental. Las leyes experimentales por que se rige el efecto fotoeléctrico están en contradicción con los postulados fundamentales de la teoría ondulatoria de la luz. Una onda luminosa electromagnética al caer sobre un cuerpo que contenga electrones deberá provocar en ellos vibraciones forzadas de amplitud proporcional a las amplitudes de las propias ondas luminosas. Si las fuerzas que sujetan a los electrones dentro del cuerpo no son lo suficientemente grandes, los electrones pueden escaparse al exterior con una velocidad que deberá depender de la amplitud de la luz incidente. Como quiera que la amplitud de las ondas luminosas determina la potencia del flujo luminoso, la velocidad de los electrones desprendidos debería aumentar con la intensidad de la luz incidente. Pero en realidad esto no ocurre: al aumentar la potencia de la luz incidente lo que aumenta es el número de electrones que se desprenden; la velocidad de los electrones depende *exclusivamente* de la frecuencia de la luz, con la particularidad, como ya hemos visto, de que para todas las sustancias la energía de los electrones desprendidos aumenta linealmente con la frecuencia. Esta dependencia es imposible de explicar desde el punto de vista ondulatorio a no ser que se recurra a alguna hipótesis artificial.

Einstein demostró en el año 1905 que todas las regularidades fundamentales del efecto fotoeléctrico se explican directamente si se admite que la luz es absorbida en las mismas porciones (cuantos) $\varepsilon = h\nu$ en que, según las ideas propuestas por Planck, es emitida. Efectivamente, al arrancar un electrón de un cuerpo sólido la energía de la luz se gasta: 1) en el trabajo necesario para arrancar el electrón (que llamaremos A) y 2) en comunicarle a dicho electrón una energía cinética $\frac{mv^2}{2}$. Si la porción de energía luminosa absorbida al desprenderse un electrón es igual a $h\nu$, de acuerdo con la

ley de la conservación de la energía tendremos que

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} + A. \tag{1}$$

Esta igualdad se conoce con el nombre de fórmula de Einstein. Expresando la energía cinética del electrón $\frac{mv^2}{2}$ por medio del trabajo del campo retardador eV_R [fórmula (1) del § 332], podemos escribir la correlación de Einstein (1) de la forma:

$$h\nu = eV_R + A. \tag{1a}$$

De esta última igualdad se deduce que

$$V_R = \frac{h}{e}\nu - \frac{A}{e}. \tag{2}$$

Esta correlación coincide con la igualdad experimental expresada por la fórmula (2) del § 332:

$$V_R = k\nu - V_0. \tag{3}$$

Por esta fórmula vemos que el hecho de que la energía cinética de los fotoelectrones sea función lineal de la frecuencia ν se deduce directamente de la hipótesis según la cual la absorción de la luz se realiza en porciones (cuantos) de energía $\varepsilon = h\nu$.

Con la misma naturalidad se explica la proporcionalidad que existe entre la corriente de saturación I_S y la potencia de la luz que incide. Al aumentar la potencia total del flujo luminoso W aumenta también el número de porciones de energía $\varepsilon = h\nu$ y por consiguiente, el número n de electrones arrancados en la unidad de tiempo. Como I_S es proporcional a n, está claro que la corriente de saturación I_S será proporcional a la potencia de la luz W.

La ley de Einstein (1) se puede someter a comprobación experimental. Comparando las fórmulas (2) y (3) obtenemos la dependencia siguiente entre la constante de Planck h y la constante empírica k:

$$h = ke, \tag{4}$$

donde e es la carga del electrón. Determinando k experimentalmente y aplicando el valor de la carga e del electrón que conocemos, podemos comprobar si efectivamente el producto de estas dos magnitudes coincide con la constante de Planck h. La veracidad de la correlación (4) se deducía ya de las primeras mediciones realizadas por Millikan, cuyos resultados se dan en la fig. 296. La constante k es igual a tg α, siendo α el ángulo que forma la recta (3) con el eje de abscisas. El valor de k hallado de esta forma coincidió, dentro de los límites de los errores de observación, con la relación h/e.

La igualdad (4) ha sido comprobada con mayor exactitud por toda una serie de autores, entre los que figuran P. I. Lukirski y

S. S. Prilezháev, quienes en lugar de un condensador plano, como habían utilizado todos los experimentadores comenzando por Stoliétov, emplearon un condensador esférico.

El esquema del experimento de Lukirski y Prilezháev se muestra en la fig. 298. En él S es una esfera de vidrio recubierta interiormente de plata que hace las veces de electrodo externo B del condensador esférico. De electrodo interno sirve la esferita K, que se hace del metal que se investiga. Esta esferita se ilumina a través

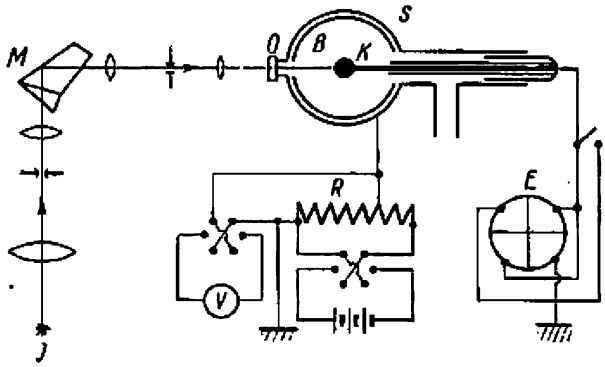

Fig. 298. Esquema del experimento de P. I. Lukirski y S. S. Prilezháev.

de la ventanilla de cuarzo O. Como fuente de luz se tomó un arco de mercurio J que producía un espectro de rayas. La luz procedente de esta fuente pasaba por el monocromador de cuarzo M, que servía para separar unas rayas espectrales determinadas. La esferita K se ponía en contacto con el electrómetro de cuadrantes E. Entre la esferita K y la esfera B se creaba una diferencia de potencial de distintas magnitudes y signos por medio del potenciómetro R; la diferencia de potencial se medía con el voltímetro V. Como el electrodo B rodeaba a la esferita K, todos los electrones que escapaban de ésta llegaban a la superficie del electrodo B aunque no existiera potencial acelerador. Como resultado, la corriente de saturación I_S se obtenía precisamente en el momento en que la diferencia de potencial V entre la esferita K y el electrodo B era igual a cero. Esta circunstancia permitía eliminar el papel desempeñado por el voltaje de contacto entre los electrodos, que dificultaba la medición del valor real del potencial retardador V_R. Otra ventaja del condensador esférico consiste en que con él la caída de la intensidad de la corriente al aumentar el campo retardador resulta más brusca, lo que permite hallar con mayor precisión el valor $V = V_R$ con el que $I = 0$. En la fig. 299 pueden verse las características de voltios-amperios obtenidas para el níquel. Las curvas se refieren a los casos en que una esferita de níquel K se iluminaba con luz de tres

longitudes de onda λ_1, λ_2 y λ_3 diferentes, de las cuales λ_1 es la que tenía menor longitud. La corriente de saturación se alcanza en las tres curvas con una misma diferencia de potencial $V = +0{,}8$ V. Esta magnitud representa el voltaje de contacto entre el electrodo de níquel K y el electrodo de plata B. Restando esta magnitud 0,8 V de todas las indicaciones del voltímetro se pueden obtener los valores efectivos de los potenciales retardadores.

Curvas análogas fueron obtenidas para el Al, Zn, Sn, Cd, Pb, Cu, Pt y Ag. Partiendo de los valores así medidos de los potenciales retardadores V_R, correspondientes a diferentes frecuencias de la

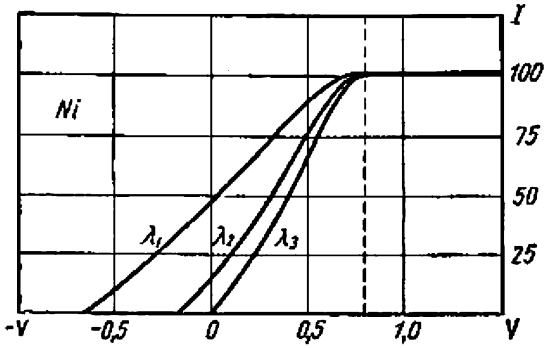

Fig. 299. Característica de voltios-amperios para el Ni.

luz, se hallaron los valores de la constante k, y basándose en la igualdad (4) fue calculada la constante de Planck h; el error en esta determinación no excedió de un 0,2%. Dentro de los límites de esta exactitud los valores de h obtenidos coincidieron con los hallados por otros procedimientos.

Con la fórmula de Einstein (1a) se puede determinar también el trabajo A de salida de un electrón del metal. Los valores del trabajo de salida hallados por esta fórmula ($2 \sim 6$ eV) concuerdan bien con las magnitudes que se obtienen basándose en la emisión termoiónica (t. II, § 172).

El hecho de que en las características de voltios-amperios las curvas presenten una caída relativamente suave (fig. 299) al aumentar el potencial retardador se explica porque no todos los electrones se desprenden del metal con la misma velocidad, igual a la determinada por la fórmula de Einstein (1). Una gran parte de los electrones sale del cuerpo con menos velocidad. Esto se debe a que la luz no sólo arranca electrones que se encuentran en la misma superficie del cuerpo, sino también electrones que se hallan a cierta profundidad. En este último caso los electrones pierden parte de su energía antes de llegar a la superficie del cuerpo. Este punto de vista ha sido confirmado por las observaciones del efecto fotoeléctrico producido en capas delgadas. Si se toma un metal en forma de película muy delgada (cuyo espesor sea del orden de $10^{-6} \sim 10^{-7}$ cm), los fotoelectrones que se producen tienen velocidades mucho más homogéneas.

§ 334. Propiedades corpusculares de la luz. En el párrafo anterior hemos hablado ya de la dificultad que surge cuando se intenta poner de acuerdo con la teoría ondulatoria de la luz la dependencia empírica que existe entre la velocidad de los fotoelectrones y la frecuencia ν. Aún es más notoria la insuficiencia de las hipótesis ondulatorias para explicar la naturaleza de la luz si se presta atención al hecho de que no existe un tiempo de retraso sensible desde que comienza la iluminación del cuerpo hasta el momento en que aparecen los primeros electrones. Porque el tiempo necesario para que un átomo pueda acumular la energía $\varepsilon = h\nu$, que hace falta para que se desprenda un electrón, puede ser bastante grande cuando la iluminación es pequeña. Efectivamente, cuando la energía es transportada por las ondas está repartida (si la amplitud es constante) con igual densidad a lo largo de todo el frente de onda. Si en el camino a recorrer por una onda electromagnética se encuentra un oscilador tendremos que, según se demuestra en electrodinámica, la energía que este oscilador absorbe es igual a la cantidad de energía transportada a través de un elemento de superficie de área $\Delta S = \lambda^2$, donde λ es la longitud de la onda. Partiendo de estos razonamientos, calculemos durante cuánto tiempo deberá caer sobre un átomo una radiación de potencia dada para que éste pueda acumular la energía suficiente y después emitir un electrón con la energía $h\nu$. Supongamos que u representa la densidad del flujo de energía luminosa, es decir, la cantidad de energía transportada a través de la unidad de superficie en la unidad de tiempo. Entonces, de acuerdo con lo dicho, el átomo absorberá durante el tiempo t una energía igual a $u\Delta St = u\lambda^2 t$. Para que a costa de esta energía pueda ser emitido un fotoelectrón, aquélla tendrá que ser igual a $\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$, es decir, deberá cumplirse la igualdad:

$$u\lambda^2 t = h\frac{c}{\lambda},$$

de donde hallamos que

$$t = \frac{hc}{\lambda^3 u}. \qquad (1)$$

Con luz violeta de longitud de onda $\lambda = 4\,000$ Å el efecto fotoeléctrico es fácil de observar cuando la densidad del flujo $u = 10^{-6}$ erg/cm^2·s. Poniendo estos valores de λ y de u en (1) y aplicando los valores conocidos de la constante de Planck $h \cong 6{,}6 \times 10^{-27}$ erg·s y de la velocidad de la luz en el vacío $c \cong 3 \cdot 10^{10}$ cm/s, obtenemos que:

$$t = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{(4 \cdot 10^{-5})^3\, 10^{-6}}\,\text{s} = 3 \cdot 10^3\,\text{s} = 50\ \text{min}.$$

Por lo tanto, en este caso para que el átomo pudiera emitir un fotoelectrón tendría que acumular energía durante 50 min. Según esto

el proceso se desarrollaría de la forma siguiente: al principio, durante bastante tiempo no aparecerían fotoelectrones; después, un enorme número de átomos emitiría electrones al mismo tiempo. En realidad este proceso se desarrolla de otra forma: los primeros fotoelectrones surgen prácticamente sin ningún retraso, en cuanto comienza la iluminación, pero el número de electrones emitidos durante un tiempo determinado tiene una energía total igual a la cantidad total de energía luminosa que dio lugar al proceso fotoeléctrico. Para poder mantener la idea del transporte de la energía luminosa por un frente de onda continuo habría que idear hipótesis artificiales sobre la existencia de un mecanismo cualquiera de transmisión de la energía de unos electrones a otros o suponer que la energía de los electrones no se debe a la luz que incide sobre los átomos, sino a fuentes intraatómicas cualesquiera. En el último caso el papel desempeñado por la luz quedaría reducido a poner en acción cierto «mecanismo de disparo» dentro del átomo. Estas hipótesis son inaceptables, puesto que la energía de los fotoelectrones no depende en absoluto de la naturaleza de la sustancia en que se produce el efecto fotoeléctrico, sino que viene determinada totalmente por la frecuencia de la luz que incide sobre ella.

Resumiendo podemos decir que el efecto fotoeléctrico se presenta como si la energía luminosa fuera transportada por partículas aisladas. Si una de estas partículas «cae» en un átomo, le transmite toda su energía. Una hipótesis como ésta es precisamente la que propuso Einstein. Este supuso que la luz es un flujo de partículas independientes. Estas partículas de luz se llamaron primeramente *cuantos de luz* y ahora se conocen con el nombre de *fotones*. La energía de los fotones es $\varepsilon = h\nu$. Por lo tanto, la energía de los fotones depende de la frecuencia de la luz y puede ser diferente. Tienen poca energía los fotones correspondientes a los rayos infrarrojos remotos (cuando λ es grande la frecuencia ν es pequeña), tienen mucha los correspondientes a los rayos X. A esto se debe que las propiedades corpusculares de la luz que se manifiestan débilmente en las radiaciones de onda larga sean las más notables en los rayos de longitudes de onda muy cortas (en los rayos X, en los γ de los elementos radiactivos, etc.). Partiendo de la correlación $\varepsilon = h\nu$ es fácil calcular que a los rayos infrarrojos de longitud de onda $\lambda = 10\ \mu$ les corresponden unos fotones cuya energía $\varepsilon \cong 2 \cdot 10^{-13}$ erg, a los rayos visibles ($\lambda = 5\,000$ Å) les corresponden fotones de energía $\varepsilon \cong 4 \cdot 10^{-12}$ erg y, finalmente, a los rayos X de longitud de onda igual a 0,1 Å, fotones de energía relativamente muy grande $\varepsilon \cong 2 \cdot 10^{-7}$ erg.

Según la teoría de la relatividad, la energía de las partículas que tienen una masa en reposo diferente de cero deberá aumentar hasta el infinito cuando su velocidad se aproxima a la de la luz. Como la energía de los fotones que se mueven con la velocidad de la luz es finita, es de suponer que dichos fotones tengan un masa en

reposo igual a cero. Esta deducción no tiene nada de paradójico, puesto que no existe ningún sistema de referencia con respecto al cual pueda estar en reposo el fotón.

Aplicando la correlación entre la energía y la cantidad de movimiento podemos hallar la expresión de la cantidad de movimiento P_Φ del fotón. Suponiendo que en la fórmula (7) del § 300 $m_0 = 0$, obtenemos que $p_\Phi = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c}$.

En definitiva tenemos que el fotón se caracteriza por las dos magnitudes siguientes:

1) por la energía

$$E_\Phi = \varepsilon = h\nu;$$

2) por la cantidad de movimiento (momentum)

$$p_\Phi = \frac{h\nu}{c}.$$

El hecho de que los fotones tengan cantidad de movimiento se manifiesta directamente en la existencia de la presión luminosa.

En el § 260, cuando describíamos el experimento de P. N. Liébedov para medir la presión luminosa, indicamos que el flujo luminoso debía tener una cantidad de movimiento por unidad de volumen igual a $k = \frac{w}{c}$, donde w es la densidad volumétrica de la energía luminosa y c la velocidad de la luz en el vacío. Esta correlación se deduce directamente de las propiedades de los fotones que hemos indicado. Efectivamente, si el número de fotones correspondiente a la unidad de volumen es igual a n_0, su energía total $w = n_0\varepsilon = n_0 h\nu$ y su cantidad de movimiento total en el flujo luminoso será:

$$k = n_0 p_\Phi = n_0 \frac{h\nu}{c}.$$

Comparando las expresiones de w y k obtenemos que

$$k = \frac{w}{c}.$$

Las propiedades corpusculares de la luz fueron confirmadas por numerosos experimentos, muchos de los cuales realizados por físicos soviéticos. Los primeros experimentos de A. F. Ioffe para observar el efecto fotoeléctrico en las partículas (§ 332) pusieron de manifiesto con toda evidencia que no existe un tiempo determinado de acumulación de la energía por los átomos. Las emisiones aisladas de electrones por las partículas se sucedían unas a otras con intervalos de tiempo casuales. También estaba sujeta a oscilaciones casuales la duración del intervalo entre el comienzo de la iluminación y la emisión del primer electrón. Este fenómeno estaba de acuerdo con la suposición de que la partícula se encontraba casualmente con un fotón. La veracidad de la hipótesis sobre los fotones fue demostrada

con mayor claridad aún en experimentos posteriores de A. F. Ioffe y N. I. Dobronrávov realizados con partículas sometidas a los rayos X. Como ya indicamos, los fotones de los rayos X transportan una energía extraordinariamente grande y por esto su empleo en los experimentos es preferible al de los rayos de luz visible.

El esquema del experimento de Ioffe y Dobronrávov se muestra en la fig. 300. En una placa gruesa de ebonita se hizo una cavidad, de la que se extrajo el aire a través del tubo R. Esta cavidad hizo las veces de tubo de rayos X en miniatura. El cátodo de este tubo era el extremo de un alambre fino de aluminio K, el cual se iluminaba con rayos ultravioletas a través de la ventanilla de cuarzo L; el anticátodo era una lámina delgada de aluminio A. Los fotoelectrones emitidos por el extremo del alambre K eran acelerados por el campo que se creaba entre el alambre K y la lámina A, cuya diferencia de potencial era de 12 000 V. Al chocar con la lámina A los electrones se frenaban y emitían rayos X. La absorción de la lámina era pequeña, es decir, los rayos pasaban prácticamente a través de ella. El flujo de radiación ultravioleta que recibía el alambre K era tan débil que solamente producía 1 000 fotoelectrones por segundo. Estos electrones, al chocar con la lámina A, hacían surgir un número igual de impulsos roentgen por segundo.

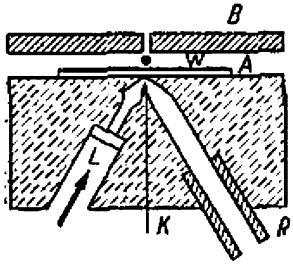

Fig. 300. Esquema del experimento de A. F. Ioffe y N. I. Dobronrávov.

La lámina de aluminio A formaba con otra lámina B, paralela a ella, un condensador plano en el cual se mantenía suspendida (a una distancia $d \cong 0{,}02$ cm del anticátodo A) una partícula de bismuto W, cuyo radio tenía aproximadamente $3 \cdot 10^{-5}$ cm.

La partícula salía a veces de su estado de equilibrio debido a la pérdida de un fotoelectrón bajo la influencia de los rayos X que incidían sobre ella. La pérdida del electrón ocurría, por término medio, una vez cada 30 min. Este resultado experimental está en perfecto acuerdo con la hipótesis corpuscular de la luz. En efecto, cada impulso de roentgen representa, desde el punto de vista corpuscular una partícula (fotón) que se escapa en una dirección cualquiera. Si la partícula W se ve bajo un ángulo sólido $\Delta\omega$ desde el sitio en que surgen los fotones, del número total n de fotones escapados solamente llegará a ella un número n' igual a

$$n' = n \frac{\Delta w}{4\pi}.$$

Suponiendo que la observación dura un tiempo t y que el número de fotones que surgen en la unidad de tiempo es igual a n_0, tendremos:

$$n' = n_0 t \frac{\Delta w}{4\pi},$$

de donde resulta que el intervalo medio de tiempo $\bar{\tau}$ entre dos impactos de los fotones en la partícula será igual a

$$\bar{\tau} = \frac{t}{n'} = \frac{4\pi}{n_0 \Delta\omega}. \qquad (2)$$

El ángulo sólido $\Delta\omega = \frac{\pi r^2}{d^2}$, donde r es el radio de la partícula y d la distancia a que se encuentra del sitio en que surgen los fotones (es decir, de la lámina de aluminio A). Poniendo este valor de $\Delta\omega$ en (2), hallamos que

$$\bar{\tau} = \frac{4d^2}{n_0 r^2}.$$

En nuestro caso $n_0 = 1\,000$, $r = 3 \cdot 10^{-5}$ cm y $d = 2 \cdot 10^{-2}$ cm, de donde

$$\bar{\tau} = \frac{16 \cdot 10^{-4}}{10^3 \cdot 9 \cdot 10^{-10}} \text{ s} \cong 1{,}8 \cdot 10^3 \text{s} = 30 \text{ min}.$$

Cuando se trata de un elemento pesado como el bismuto puede considerarse que cada fotón que incide sobre él es absorbido y da lugar a la formación de un fotoelectrón, de donde, de acuerdo totalmente con el experimento, resulta que, por término medio, debe surgir un electrón cada 30 min. La energía de cada fotoelectrón es igual a la de un fotón roentgen $\varepsilon = h\nu$.

Desde el punto de vista de la teoría ondulatoria los resultados de los experimentos de Ioffe y Dobronrávov son totalmente incomprensibles. Porque si la energía del fotón roentgen estuviera distribuida homogéneamente por un frente de onda esférico, la parte de esta energía que iría a caer sobre la partícula sería igual a $\frac{\Delta\omega}{4\pi} \cong$ $\cong 5 \cdot 10^{-7}$ y tendría que dividirse entre el gran número de electrones que entran en la composición de dicha partícula. De esta forma tendría que existir un tiempo de acumulación de energía enorme o todos los electrones, de una forma incomprensible, tendrían que ceder algunos veces su energía a un solo electrón.

Otros magníficos experimentos que confirman la teoría fotónica de la luz son los que se refieren a la observación de *las fluctuaciones de los flujos luminosos débiles.*

En el tomo I, § 76 vimos cómo la intermitancia de los procesos físicos conduce a la «pulsación» (fluctuación) de las magnitudes físicas. Así, el movimiento desordenado de los átomos determina las fluctuaciones de la presión que un gas ejerce sobre una partícula pequeña; la discrepancia casual del número medio de los electrones que llegan al ánodo da lugar a las fluctuaciones de las corrientes débiles en los tubos catódicos. Exactamente lo mismo la potencia de un flujo luminoso muy débil deberá presentar desviaciones intermitentes de su valor medio, debidas a que el flujo luminoso está formado por partículas luminosas independientes, es decir, por fotones.

Las fluctuaciones de los flujos luminosos débiles fueron descubiertas por método visual y estudiadas por S. I. Vavílov y un grupo de colaboradores suyos.

En el § 305 vimos que el ojo adaptado a la visión nocturna tiene un umbral constante de sensación visual, con la particularidad de que a este umbral le corresponde una potencia muy pequeña. En la región de la máxima sensibilidad del ojo esta potencia es del orden de $4 \cdot 10^{-10}$ erg·s^{-1}, lo que representa aproximadamente 100 fotones por segundo. Este es el número de fotones que inciden sobre la córnea del ojo. Debido a la reflexión y a la absorción que existe en el ojo, el número de fotones que llegan a la retina es aún menor. De esta forma al umbral de la sensación visual le corresponde un número relativamente pequeño de fotones, el cual deberá estar sujeto a fluctuaciones considerables. Si por término medio llegan al ojo 100 fotones por segundo y éste es el número que corresponde a su umbral de sensibilidad, es evidente que habrá algunos segundos en que este número será algo mayor que 100 (por ejemplo, 110) o algo menor (por ejemplo, 90). En este último caso el ojo no percibirá la luz. De aquí se deduce que cerca del umbral de la sensación visual deberá observarse una especie de «parpadeo», producido por las fluctuaciones del flujo luminoso. Este «parpadeo» fue efectivamente observado por Vavílov y sus discípulos.

De los experimentos se deduce con toda evidencia que la luz tiene propiedades corpusculares. Pero esto no significa un retorno a la antigua teoría de la «fluencia» (§ 250) ni una renuncia total de las hipótesis ondulatorias. Los fenómenos de la interferencia y de la difracción solamente se pueden explicar por medio de un proceso ondulatorio periódico. Como ya dijimos en el § 250, la luz tiene al mismo tiempo propiedades ondulatorias y corpusculares, lo que nos da un ejemplo magnífico de unidad dialéctica de contrarios.

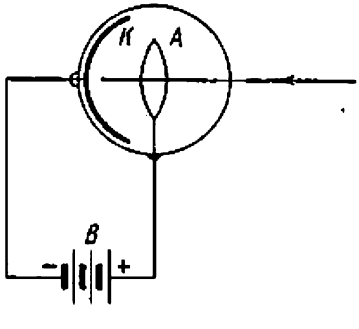

Fig. 301. Célula fotoeléctrica.

§ 335. Aplicaciones prácticas del efecto fotoeléctrico. En el § 305 indicamos la posibilidad de utilizar las *células fotoeléctricas* para registrar y medir los flujos luminosos. En la actualidad las células fotoeléctricas también se emplean mucho para otros fines, como son: la señalización luminosa, la televisión, el cine sonoro, etc. Un tipo muy simple de célula fotoeléctrica de vacío (tubo fotoeléctrico o fototubo) es el que se ve en la fig. 301. Consiste en una pequeña ampolla de vidrio, en la que se ha practicado el vacío, una de cuyas mitades está recubierta interiormente con una capa sensible a la luz.

De acuerdo con la región del espectro a que se dedica la célula fotoeléctrica, la capa sensible se hace de distintas sustancias: de plata, potasio, cesio, antimoniuro de cesio, etc. Esta capa sirve de cátodo. El ánodo se suele hacer en forma de anillo A. Entre el cátodo y el ánodo se crea una diferencia de potencial por medio de una batería B. Mientras no existe iluminación no se produce corriente en el circuito de la célula fotoeléctrica. Pero cuando llega luz al fotocátodo K, en el circuito KAB surge una corriente. La sensibilidad de los tubos fotoeléctricos de vacío alcanza hasta 10-15 μ A/lm. Entre la intensidad de la corriente (corriente de saturación) y la potencia de la iluminación existe una proporcionalidad rigurosa.

A veces el tubo fotoeléctrico se llena de un gas inerte a poca presión. Esto produce un aumento de la sensibilidad de la célula, puesto que cuando la diferencia de potencial entre el cátodo y el ánodo es suficiente, cada fotoelectrón puede ionizar átomos de gas y, por consiguiente, crear electrones complementarios. La sensibilidad de los fototubos de gas alcanza hasta 100 μ A/lm.

En la actualidad, además del efecto fotoeléctrico externo que hemos descrito, se utiliza mucho el llamado *efecto fotoeléctrico interno*. Este efecto consiste en que por la acción de la luz se liberan electrones dentro de un cristal o de un semiconductor.

Como se dijo en el t. II, § 171, en los semiconductores los electrones están repartidos en dos bandas, de las cuales la superior es la conductora. La conductividad del semiconductor aumenta cuando el número de electrones que hay en la banda superior se incrementa a costa de los que pasan de la banda inferior. El efecto fotoeléctrico interno hace que los electrones de la banda inferior pasen a la superior como resultado de la absorción de la luz. Si ΔW es la energía que hay que gastar para trasladar un electrón de la banda inferior a la banda superior conductora, el fenómeno del efecto fotoeléctrico interno empezará a producirse cuando la frecuencia de la luz $\nu > \nu_0$, donde ν_0 satisface la igualdad

$$\nu_0 = \frac{\Delta W}{h}.$$

Como resultado del efecto fotoeléctrico interno aumenta la conductividad de la sustancia, por esta razón las sustancias que ponen de manifiesto este efecto se llaman *fotorresistencias*. Muchos semiconductores son fotorresistencias típicas, entre ellos el selenio (véase el § 305). Las células fotoeléctricas de selenio tienen una sensibilidad bastante grande, que llega hasta varios centenares de microamperios por lumen.

Las propiedades de las fotorresistencias dependen mucho de la temperatura y de la existencia de impurezas y defectos en la red cristalina. La conductividad de las fotorresistencias no desaparece inmediatamente después de cesar la iluminación: se necesita cierto

tiempo para que los electrones sobrantes (a la temperatura dada) vuelvan a pasar de la banda de conductividad a la banda de valencia. En el caso, por ejemplo, de la blenda (ZnS) la fotoconductividad desaparece al cabo de varias decenas de segundos después de cesar la iluminación.

Son extraordinariamente interesantes las *células fotoeléctricas sólidas con capa de barrera* (llamadas también células *fotovoltaicas* o *fotónicas*). Como ejemplo de ellas puede servir la célula de cobre-óxido de cobre («kuprox») cuyo esquema se muestra en la fig. 302.

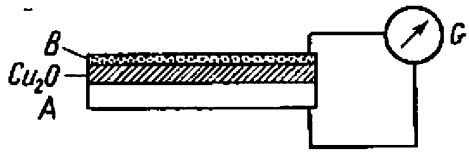

Fig. 302. Célula fotoeléctrica sólida de cobre-óxido de cobre.

Sobre la lámina de cobre A, que hace las veces de uno de los electrodos, se extiende una capa delgada de óxido cuproso Cu_2O. Esta capa se recubre a su vez con otra B de cualquier metal (por ejemplo, de oro) tan delgada, que sea transparente. Esta capa B sirve de segundo electrodo. Si los dos electrodos se unen formando un circuito eléctrico y se ilumina el Cu_2O a través del electrodo transparente, en el instrumento se produce una corriente eléctrica que va desde el cobre al óxido cuproso.

La acción de las células fotoeléctricas con capa de barrera se funda en la conductividad unilateral del contacto entre un semiconductor y un metal (véase el t. II, § 171). En el caso, por ejemplo, de un semiconductor fotónico los electrones que se liberan por el efecto fotoeléctrico interno en el contacto iluminado pasan sin dificultad del semiconductor al metal y, como consecuencia, el potencial entre ellos se iguala. Cuando el contacto no recibe iluminación esta igualación del potencial no se produce. De esta forma, cuando hay luz surge una fuerza electromotriz en el semiconductor. A esto se debe que las células fotoeléctricas con capa de barrera (fotovoltaicas) produzcan corriente en el circuito externo sin necesidad de conectar en él ninguna otra fuerza electromotriz complementaria. En el caso de la célula fotoeléctrica de cobre-óxido de cobre (kuprox) que se ve en la fig. 302, el efecto fotoeléctrico se produce en el límite entre el semiconductor y el metal transparente (célula de pared delantera). La capa limítrofe entre el metal y el óxido cuproso tiene propiedades rectificadoras, lo que hace que la corriente que se origina solamente pueda ir en una dirección.

En un principio análogo al efecto fotoeléctrico interno con capa de barrera se basan las «*baterías solares*» de silicio que se construyen

en la actualidad. Cuando sobre estas baterías incide la luz del sol se genera continuamente una corriente eléctrica; el rendimiento de estas baterías alcanza hasta un 6%. Las «baterías solares» de silicio se han utilizado en los satélites artificiales soviéticos («spútnik») y en los cohetes cósmicos.

§ 336. Difusión de los rayos X. Desde el punto de vista clásico los rayos X son ondas electromagnéticas capaces de provocar en los átomos vibraciones forzadas de los electrones. Por esto se podía esperar que la difusión de los rayos X estuviera sujeta a las mismas leyes que la difusión clásica de los rayos visibles. De estas leyes (§ 284) se deduce que: 1) con la difusión no varía la longitud de onda λ; 2) la indicatriz de la difusión viene determinada por la correlación:

$$I = I_0 (1 + \cos^2 \varphi), \tag{1}$$

donde φ es el ángulo comprendido entre las direcciones de los rayos primarios y difundidos. La comprobación experimental demuestra que la correlación (1) sólo se cumple correctamente por los rayos X cuyas longitudes de onda no son demasiado cortas; cuando sus longitudes de onda son cortas se observa una discrepancia con respecto a la correlación (1). También pudo llegarse a la conclusión (por la variación que experimenta el coeficiente de absorción) de que la longitud de onda de los rayos X (de onda corta) varía al producirse su difusión. Además, se observa una discrepancia sensible con respecto a la variación que podía esperarse del coeficiente k en función del número de electrones difundidos. El coeficiente de difusión k de los rayos X debería ser proporcional al número de electrones difusores n_e contenidos en la unidad de volumen de la sustancia. Como

$$n_e = Z n_0,$$

donde Z es el número de electrones que hay en un átomo y n_0 es el número de átomos que hay en la unidad de volumen, tenemos que

$$k \cong Z n_0. \tag{2}$$

El número de átomos que hay en la unidad de volumen se expresa, mediante la densidad de la sustancia ρ, su peso atómico A y el número de Avogadro N, por la correlación siguiente:

$$n_0 = \frac{N\rho}{A}.$$

Poniendo este valor de n_0 en (2), hallamos:

$$\frac{k}{\rho} \cong N \frac{Z}{A}. \tag{3}$$

Como quiera que para todos los átomos la relación Z/A es aproximadamente igual a 1/2 (véase el § 367), de la correlación (3) se deduce que k/ρ deberá ser aproximadamente constante para todas las sustancias y para todas las longitudes de onda. Esta última deducción no se cumple: la relación k/ρ aumenta considerablemente al aumentar la longitud de onda.

Estas discrepancias de la difusión de los rayos X con las regularidades que eran de esperar hicieron necesaria la continuación de las observaciones experimentales. En los años 1922—1923 A. Compton estudió valiéndose de un espectrógrafo de rayos X la composición espectral de los rayos X difusos. El esquema del experimento de

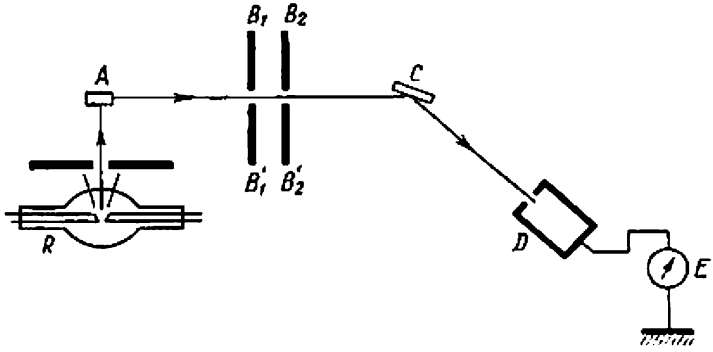

Fig. 303. Esquema del experimento de Compton.

Compton puede verse en la fig. 303, donde R es un tubo de rayos X, A un trozo de sustancia difusora, B_1B_1' y B_2B_2' un sistema de diafragmas que solamente dejan pasar un haz estrecho de rayos difusos. Este haz iba a caer después sobre el espectrógrafo de rayos X, al cual pertenecen el cristal C y la cámara de ionización D. Lo primero que se descubrió fue que *en la radiación difusa existían rayos de longitud de onda* λ, *igual a la de los rayos primarios, y rayos de longitud de onda* $\lambda' > \lambda$. De esta forma resultó que junto a la difusión clásica, en que no varía la longitud de onda, existe la difusión en que la longitud de onda está desplazada hacia el lado de las longitudes mayores. Este nuevo tipo de difusión recibió el nombre de *efecto Compton*.

Observaciones realizadas posteriormente pusieron de manifiesto que la difusión de Compton está sometida a las leyes siguientes: 1) esta difusión es intensa para las sustancias que tienen peso atómico pequeño y débil para las que tienen peso atómico grande, 2) al aumentar el ángulo de difusión aumenta la intensidad de la difusión de Compton (la intensidad de la difusión clásica disminuye al aumentar el ángulo de difusión), 3) el desplazamiento de la longitud de onda depende del ángulo de difusión, con la particularidad de que aumenta

al aumentar dicho ángulo, 4) a ángulos de difusión iguales les corresponde una misma magnitud del desplazamiento cualesquiera que sean las sustancias difusoras. Estas leyes se representan gráficamente en las fig. 304 y 305. En la fig. 304 se muestran los resultados obtenidos al observar la difusión de los rayos X en el grafito bajo diferentes ángulos. En la parte superior de la figura se representa el contorno de la llamada raya K_α del molibdeno, cuya longitud de onda $\lambda = 0{,}7126$ Å; con la luz de esta raya se iluminó un bloque dispersor de grafito. En la 304 *b*, *c*, *d* se muestra la composición espectral de los rayos difundidos por el grafito bajo ángulos de 45°, 90° y 135°. Como resultado puede verse que al aumentar el ángulo aumenta la intensidad de la componente desplazada *M* y la magnitud del desplazamiento; la intensidad de la componente no desplazada *P* disminuye al aumentar el ángulo. En la fig. 305 se representa la composición espectral de los rayos por distintas sustancias bajo un mismo ángulo. En este caso sirvió de raya primaria la K_α de la plata, cuya longitud de onda $\lambda = 0{,}5627$ Å. Para la sustancia más ligera (Be, de peso atómico 9) la raya *P*, cuya longitud de onda no varía, es muy débil, mientras que la raya *M*, desplazada hacia el lado de las longitudes de onda mayores, es intensa. Para el potasio (peso atómico 39) ambas rayas, *P* y *M*, se diferencian poco por sus intensidades, y para el cobre (peso atómico 63) la raya desplazada *M* es más débil que la raya de longitud de onda invariable *P*.

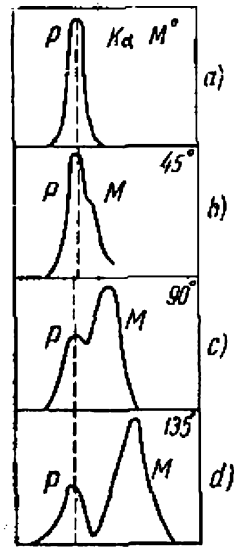

Fig. 304. Difusión de los rayos X en el grafito bajo ángulos distintos.

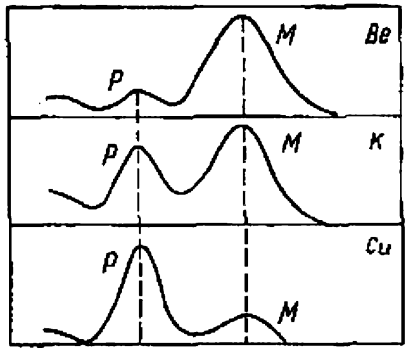

Fig. 305. Difusión de los rayos X en distintas sustancias.

El hecho de que la magnitud del desplazamiento no dependa de la naturaleza de la sustancia difusora demuestra que el mecanismo de la difusión de Compton no guarda relación con las propiedades individuales de los átomos. Efectivamente, el efecto Compton se puede explicar suponiendo que se realiza a costa de electrones que están tan débilmente ligados a los átomos que esta ligazón puede despreciarse. Esta suposición también está de acuerdo con el hecho de que los elementos ligeros producen

un desplazamiento de las rayas relativamente mayor que los elementos pesados. En los átomos ligeros todos los electrones están unidos débilmente, mientras que en los átomos pesados sólo están débilmente ligados los electrones externos. Por esto, en el caso de los elementos pesados el número relativo de electrones que producen el efecto Compton es menor que cuando se trata de elementos ligeros.

El efecto Compton puede explicarse cuantitativamente y en completo acuerdo con los datos experimentales aceptando el punto de vista expuesto en el § 334, es decir, el que supone que la luz es un flujo de fotones o partículas que tienen una energía $E_\Phi = h\nu$ y una cantidad de movimiento $P_\Phi = \frac{h\nu}{c}$. Cuando estas partículas (fotones) chocan con los electrones libres botan elásticamente en ellos, lo que da lugar a la aparición de rayos difusos. Como quiera que al chocar un fotón con un electrón una parte de la energía de aquél pasa a éste, la energía del fotón difuso E'_φ será menor que la que tenía antes: $E'_\Phi < E_\Phi$. La frecuencia ν' del fotón difuso está relacionada con su energía por la correlación $h\nu' = E'_\Phi$, de donde, de acuerdo con la desigualdad $E'_\Phi < E_\Phi$, se deduce que $\nu' < \nu$ o $\lambda' > \lambda$. De esta forma se obtiene directamente que la longitud de onda de los rayos difundidos durante el efecto Compton deberá ser mayor que la de los rayos primarios.

El cálculo realizado partiendo de la suposición de que el choque de un fotón con un electrón es elástico y cumple las leyes de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento (véase la letra pequeña), conduce al resultado siguiente:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\alpha \operatorname{sen}^2 \varphi/2, \qquad (4)$$

donde $\alpha = \frac{h}{m_0 c}$ y φ es el ángulo de difusión.

Como α se expresa únicamente por medio de constantes universales (la constante de Planck h, la masa en reposo m_0 del electrón y la velocidad de la luz c), se obtiene que, independientemente de la naturaleza de la sustancia difusora, la raya de la difusión de Compton estará desplazada con respecto a la primaria una magnitud igual (en angstrom) a:

$$\Delta\lambda = 0{,}0486 \operatorname{sen}^2 \varphi/2. \qquad (4a)$$

El valor máximo del desplazamiento (0,0486 Å) es el que alcanzan los rayos difundidos bajo un ángulo $\varphi = \pi$, es decir, en sentido contrario al haz de rayos primarios. Los datos experimentales confirman la fórmula (4a) con un alto grado de exactitud.

La hipótesis de que el efecto Compton se debe al choque elástico de un fotón con un electrón libre no sólo conduce al hecho de que debe aparecer un fotón de difusión con menor frecuencia. Al producirse el choque una parte de la energía del fotón se transmite al electrón y, por consiguiente, este último adquiere cierta cantidad

de movimiento. De esta forma, junto a los rayos difusos, que tienen desplazada la longitud de onda, aparecen electrones acelerados, llamados *electrones de retroceso*.

Si la energía del fotón primario es $E_\Phi = h\nu$ y la del fotón difuso $E'_\Phi = h\nu'$, tendremos que, de acuerdo con la ley de la conservación de la energía, la energía E_e adquirida por el electrón vendrá expresada por la igualdad:

$$E_e = E_\Phi - E'_\Phi = h(\nu - \nu').$$

De aquí hallamos que la razón de la energía del electrón de retroceso E_e a la energía del fotón primario $E_\Phi = h\nu$ será:

$$\frac{E_e}{h\nu} = \frac{\nu - \nu'}{\nu'} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda'} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}.$$

Poniendo aquí en lugar de $\Delta\lambda$ su valor según (4), obtenemos

$$\frac{E_e}{h\nu} = \frac{2\alpha \operatorname{sen}^2 \varphi/2}{\lambda + 2\alpha \operatorname{sen}^2 \varphi/2}. \qquad (5)$$

De la igualdad (5) se deduce que al variar el ángulo de difusión φ varía la energía de los electrones de retroceso y, por consiguiente, sus velocidades.

Aplicando la ley de la conservación de la cantidad de movimiento se puede hallar la expresión del ángulo ψ bajo el cual aparece el electrón de retroceso correspondiente al fotón difundido bajo el ángulo φ (véase la letra pequeña). En la fig. 306 se reproduce el diagrama polar de los fotones difusos $h\nu'$ y de los electrones de retroceso E_e. Las cifras iguales junto a las flechas corresponden respectivamente a un fotón difuso y al electrón de retroceso que aparece al mismo tiempo que él. Como puede verse, el fotón de frecuencia ν invariable «pasa hacia adelante»; a este fotón le corresponde $E_e = 0$, es decir, la carencia de electrón de retroceso. Los electrones de retroceso más rápidos también «pasan hacia adelante»; a ellos les corresponden fotones difundidos hacia atrás, que son los que presentan la mayor variación de frecuencia.

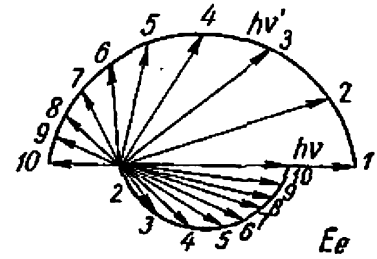

Fig. 306. Diagrama polar de los fotones difusos y de los electrones de retroceso.

Los experimentos confirman la existencia de los electrones de retroceso y su distribución según los ángulos y las energías de acuerdo con la teoría. D. V. Skobeltsín utilizó para estudiar los electrones de retroceso una cámara de Wilson (§ 370) situada en un campo magnético. El campo magnético desviaba los electrones de retroceso, los cuales dejaban huellas en forma de circunferencias por cuyos

radios se podía juzgar cuál era la velocidad de los electrones. Posteriormente el método de la cámara de Wilson fue tan perfeccionado que permitió comprobar el cumplimiento de las fórmulas teóricas en cada acto independiente de la difusión de un fotón en un electrón.

Al aumentar las longitudes de onda aumenta la frecuencia ν y, por consiguiente, la cantidad de movimiento de los fotones $P_\Phi = \frac{h\nu}{c}$. Al mismo tiempo disminuye la fracción de cantidad de movimiento y de energía que se transmite al electrón. Por esto las variaciones sensibles de longitud de onda, lo mismo que las grandes velocidades de los electrones de retroceso, pueden observarse únicamente cuando la radiación que se difunde tiene una longitud de onda muy pequeña (rayos X de onda corta). En los rayos visibles no se observa la difusión de Compton.

Tiene importancia destacar que la coincidencia de los datos experimentales relativos al efecto Compton con los teóricos no sirve solamente de comprobación a la teoría fotónica sino que es además una demostración del cumplimiento de las leyes de la conservación de la energía y de la conservación de la cantidad de movimiento en los procesos elementales aislados. En los años veinte del siglo en curso, las dificultades surgidas para poder explicar desde el punto de vista clásico los fenómenos elementales de la acción mutua entre la luz y la sustancia motivaron que una serie de físicos burgueses lanzaron la hipótesis de que cuando se trata de la interacción entre las partículas elementales las leyes de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento se cumplen solamente de manera estadística, es decir, como promedio de un gran número de actos elementales de interacción, pero no en cada acto aislado. Los experimentos realizados para observar estos actos aislados de difusión de fotones en electrones desmintieron esta hipótesis y confirmaron el cumplimiento exacto de las leyes antedichas en cada uno de los actos elementales.

Para deducir la correlación (4) supongamos que la interacción entre el fotón y el electrón se desarrolla de acuerdo con las leyes del choque elástico y escribamos la expresión de las leyes de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento. Como quiera que la velocidad de los electrones de retroceso es muy grande, hay que aplicar las fórmulas de la mecánica de la forma en que se escriben en la teoría de la relatividad (§ 300). Para la energía cinética y para el vector cantidad de movimiento del electrón tendremos:

$$E_e = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2, \tag{6}$$

$$P_e = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = mv, \tag{7}$$

donde $\beta = v/c$, c es la velocidad de la luz en el vacío, v es la velocidad del electrón, m_0 es la masa de reposo del electrón y m su masa a la velocidad v. Al elec-

trón en reposo hay que suponerle una energía igual a m_0c^2. Teniendo esto en cuenta, para la ley de la conservación de la energía tendremos:

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2. \tag{8}$$

La cantidad de movimiento del electrón en reposo será, según (7), igual a cero. Por esto, para la ley de la conservación de la cantidad de movimiento en forma vectorial tendremos:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}'_\Phi + m\mathbf{v}. \tag{9}$$

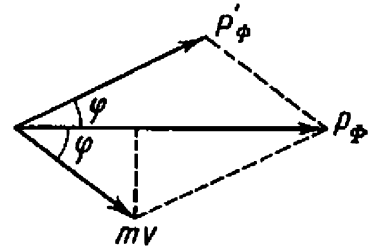

Fig. 307. Esquema para el cálculo de la frecuencia del fotón difuso.

Para pasar de la correlación vectorial (9) a la algebraica partiremos del hecho de que el vector $\mathbf{P}_\Phi$ es la diagonal del paralelogramo cuyos lados son los vectores $\mathbf{P}_{\Phi'}$ y $m\mathbf{v}$ (fig. 307). Los ángulos φ y ψ representan respectivamente los ángulos bajo los cuales tienen lugar la difusión del fotón y la aparición del electrón de retroceso. De acuerdo con la fig. 307 tenemos:

$$(mv)^2 = P_\Phi^2 + P'^2_\Phi - 2P_\Phi P'_\Phi \cos\varphi.$$

Poniendo aquí en lugar de P_Φ y P'_Φ sus valores $\frac{h\nu}{c}$ y $\frac{h\nu'}{c}$ y multiplicando los dos términos de la igualdad por c^2, hallamos:

$$m^2v^2c^2 = h^2\nu^2 - h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' \cos\varphi. \tag{10}$$

Por la ley de la conservación de la energía (8), tenemos:

$$mc^2 = h\nu - h\nu' + m_0c^2.$$

Elevando al cuadrado los dos términos de esta igualdad, obtenemos:

$$m^2c^4 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' + 2h(\nu - \nu')\, m_0c^2 + m_0^2c^4. \tag{11}$$

Restando de la igualdad (11) la igualdad (10), hallamos:

$$m^2c^4(1 - \beta^2) = -2h^2\nu\nu'(1 - \cos\varphi) + 2h(\nu - \nu')\, m_0c^2 + m_0^2c^4,$$

donde $\beta = v/c$. Aplicando la correlación entre la masa en reposo m_0 y la masa m:

$$m\sqrt{1 - \beta^2} = m_0,$$

podemos escribir la última igualdad de la forma:

$$2h(\nu - \nu')\, m_0c^2 = 2h^2\nu\nu'(1 - \cos\varphi)$$

o

$$\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi). \tag{12}$$

Sustituyendo en esta igualdad $1 - \cos\varphi$ por $2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi/2$ y teniendo en cuenta que $\frac{c}{\nu} = \lambda$ y $\frac{c}{\nu'} = \lambda'$, obtenemos:

$$\lambda' - \lambda = 2\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\varphi/2\ ^*), \tag{13}$$

*) Muchos autores presentan esta fórmula bajo el aspecto

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi),$$

La constante $\frac{h}{m_0c} = 0{,}02426$ Å suele llamarse longitud de onda Compton. (*N. del T.*)

donde $\alpha = \frac{h}{m_0 c}$. La igualdad (13) coincide con la fórmula (4) del texto fundamental.

Para determinar el ángulo ψ bajo el cual está dirigido el movimiento del electrón de retroceso volvamos a fijarnos en la fig. 307, de la que se deduce que

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{P'_\Phi \operatorname{sen}\varphi}{P_\Phi - P'_\Phi \cos\varphi}.$$

Poniendo en lugar de P_Φ y $P_{\Phi'}$, sus valores respectivos $\frac{h\nu}{c}$ y $\frac{h\nu'}{c}$, podemos escribir esta igualdad de la forma:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\nu' \operatorname{sen}\varphi}{\nu - \nu'\cos\varphi} = 2\frac{\operatorname{sen}\varphi/2\cos\varphi/2}{\nu/\nu' - \cos\varphi}. \qquad (14)$$

Por otra parte, basándonos en la igualdad (12) tenemos:

$$\frac{\nu}{\nu'} - \cos\varphi = 1 - \cos\varphi + \frac{2\alpha\nu}{c}\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2} = 2\left(1 - \frac{\alpha\nu}{c}\right)\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}.$$

Poniendo este valor de $\frac{\nu}{\nu'} - \cos\varphi$ en (14), hallamos:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha\nu}{c}\right)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}. \qquad (15)$$

La correlación (15) permite hallar el valor del ángulo ψ, es decir, la dirección que sigue el electrón de retroceso siempre que se conozca la dirección del fotón difuso (dada por φ). La energía del electrón de retroceso viene dada por la fórmula (5) del texto fundamental.

§ 337. **Fotoquímica.** Las reacciones químicas que se realizan bajo la influencia de la luz reciben el nombre de *fotoquímicas*. Un ejemplo de reacción fotoquímica es la descomposición del amoníaco NH_3 por la acción de la luz en nitrógeno e hidrógeno, o la del bromuro de plata AgBr en plata y bromo. Bajo la acción de la luz se producen reacciones que dan lugar a la formación de moléculas más complejas, por ejemplo, las moléculas de HCl partiendo de moléculas de hidrógeno y de cloro. Esta última reacción se desarrolla de una forma tan tumultuosa que va acompañada de una explosión. Existen también procesos fotoquímicos que consisten en la polimerización de la sustancia, es decir, en la formación de moléculas poliatómicas a base de átomos de la sustancia original (moléculas del tipo X_n). Es muy importante el papel que desempeñan las reacciones fotoquímicas en biología, por ejemplo, la descomposición del anhídrido carbónico por la acción de la luz en las partes verdes de la plantas, que fue estudiada por vez primera por K. A. Timiriázev.

Los procesos fotoquímicos se rigen por la siguiente ley cuantitativa: *la masa de sustancia que experimenta la reacción fotoquímica es proporcional a la cantidad de energía luminosa absorbida*. Llamando W a la potencia de la luz absorbida y t al tiempo que dura la ilu-

minación, esta ley puede escribirse de la forma:

$$m = kWt, \tag{1}$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad que depende de la naturaleza de la reacción fotoquímica que se desarrolla. Este coeficiente es numéricamente igual a la masa de sustancia que experimenta la reacción correspondiente a la cantidad de energía luminosa absorbida.

El proceso fotoquímico puede ir acompañado de reacciones secundarias debidas a la actividad química de los productos resultantes de la transformación fotoquímica. Pero la ley (1) se refiere exclusivamente al proceso fotoquímico primario.

El estudio de los procesos fotoquímicos primarios puso de manifiesto que estos procesos se desarrollan de acuerdo con la naturaleza fotónica de la luz: *a cada fotón absorbido $h\nu$ le corresponde la transformación de una molécula*. Esta ley fue comprobada por vez primera en la reacción fotoquímica de descomposición del bromuro de hidrógeno HBr bajo la acción de una luz monocromática. Las mediciones realizadas demostraron que a cada porción $h\nu$ de luz absorbida le correspondía una molécula descompuesta. De esta forma, la reacción se desarrolla de acuerdo con la ecuación:

$$2HBr + 2h\nu = H_2 + Br_2$$

Como para transformar una molécula se necesita realizar cierto trabajo A mínimo, la energía del fotón $h\nu$ deberá cumplir la condición:

$$h\nu \geqslant A, \tag{2}$$

de donde se deduce que el proceso fotoquímico tiene un límite de ondas largas. Si la frecuencia de la luz

$$\nu < \nu_0 = \frac{A}{h},$$

la reacción fotoquímica no se produce. La frecuenca ν_0 tiene un valor determinado para cada reacción fotoquímica. La mayoría de las reacciones fotoquímicas se desarrollan exclusivamente bajo la acción de los rayos ultravioletas. La condición (2) es necesaria para que se pueda realizar la reacción fotoquímica, pero no es suficiente; para que esto ocurra es necesario además que la luz de la longitud de onda dada sea absorbida por la molécula. Si la sustancia de que se trata es transparente a la luz de la longitud de onda dada, esta luz no puede producir la transformación química.

No obstante, la experiencia demuestra que en algunos casos se consigue realizar la reacción fotoquímica en la región de frecuencias ν para las cuales la sustancia es transparente, añadiendo para ello una segunda sustancia («sensibilizador») que absorbe la luz. Este

género de reacciones fotoquímicas se llaman *sensibilizadas*. El mecanismo de la reacción sensibilizada consiste en lo siguiente: la molécula del sensibilizador, al absorber un fotón, entra en un estado de excitación extraordinario en el que puede permanecer cierto tiempo. Si esta molécula excitada choca con otra de la sustancia original puede hacer que ocurra en ella la transformación. Como ejemplo citaremos el caso de la obtención del hidrógeno atómico, a partir de hidrógeno diatómico gaseoso H_2 por la acción que produce la iluminación con la raya del mercurio cuya longitud de onda $\lambda = 2\,537$ Å. El hidrógeno molecular no absorbe la luz de esta longitud de onda. Pero si a este hidrógeno molecular se le añade una pequeña cantidad de vapor de mercurio, la luz de longitud de onda $\lambda = 2\,537$ Å produce átomos de mercurio excitados Hg^*. Estos últimos al chocar con las moléculas de H_2 dan lugar a la formación de hidruro de mercurio e hidrógeno atómico. La reacción se desarrolla según el esquema:

$$Hg + h\nu = Hg^*;$$

$$Hg^* + H_2 = HgH + H$$

La generación del hidrógeno atómico se comprueba añadiendo oxígeno, lo que da lugar a la formación de peróxido de hidrógeno H_2O_2, cuya presencia se puede descubrir fácilmente.

La fotografía se basa en el proceso fotoquímico. De todos es conocido que el proceso fotográfico moderno se realiza por medio de una emulsión sensible a la luz, la cual se extiende formando una capa delgada sobre un vidrio (placa fotográfica) o sobre una película de celuloide (película fotográfica). La emulsión está formada por cristales microscópicos de bromuro de plata que se encuentran en suspensión en la gelatina.

El proceso fotoquímico primario consiste en que por la acción de la luz en la red cristalina del bromuro de plata se genera un electrón libre (efecto fotoeléctrico interno). Este electrón se une a un ion de Ag^+, lo que da lugar a la formación de un átomo neutro de plata. Los átomos neutros de plata no pueden mantenerse en la red cristalina, por lo que se juntan originando granitos muy pequeños de plata coloidal. Pohl, junto con un grupo de colaboradores, demostró experimentalmente la formación de los granitos de metal en las redes iónicas de las sales halógenas de los metales alcalinos y de la plata por la acción de la luz. Cuando la iluminación dura mucho tiempo el número de granitos puede resultar tan considerable que la emulsión se ennegrece notablemente. Si la iluminación no dura más de lo ordinario el número de granitos de plata que se separan es pequeño y la absorción de la luz que produce no es considerable. Por esto, bajo la influencia de la acción fotoquímica primaria se genera únicamente la llamada imagen *latente* (*invisible*). La hipótesis sobre

la naturaleza de la imagen fotográfica latente que acabamos de exponer fue desarrollada por P. P. Kravets y confirmada por los trabajos experimentales realizados por M. V. Savostiánova.

La placa fotográfica en que como resultado de la acción de la luz se forma la imagen latente se somete después a un proceso químico secundario que se llama revelado. Bajo la acción de los reactivos químicos (reveladores) correspondientes se consigue reducir la plata metálica en aquellos lugares en que había «gérmenes» formados por partículas de plata. Como resultado la plata metálica se revela principalmente en aquellos sitios que fueron sometidos a la acción de la luz, con lo que se consigue el negativo. Después de finalizar el revelado se eliminan los restos del bromuro de plata no descompuesto por medio de una disolución de hiposulfito ($Na_2S_2O_3$).

Un proceso fotoquímico es también el que sirve de base a la percepción visual. En el § 305 indicamos que la retina contiene dos tipos diferentes de elementos sensibles, llamados respectivamente bastoncillos y conos. Los primeros determinan la visión nocturna y los segundos la visión diurna ordinaria, capaz de distinguir los colores. El proceso mejor estudiado es el de la visión nocturna. Los extremos de los bastoncillos están impregnados en un pigmento especial llamado *púrpura visual* que puede descomponerse por la acción de la luz. Los productos de esta descomposición actúan químicamente sobre los bastoncillos, los cuales transmiten esta acción al cerebro en forma de excitación nerviosa. Cuando la acción de la luz es muy intensa la púrpura visual se descompone por completo y los bastoncillos dejan de percibir la luz. Al cesar la iluminación vuelve a generarse púrpura visual en el ojo y los bastoncillos recobran su sensibilidad luminosa (adoptación del ojo a las iluminaciones débiles).

La teoría de la visión diurna (en colores) aún no está suficientemente elaborada.

OCTAVA PARTE

FISICA ATOMICA

CAPITULO XXX

Estructura de los átomos y de las moléculas

§ 338. **Introducción.** En distintas partes de nuestro curso hemos tenido que utilizar en más de una ocasión la idea de la estructura atómica de la sustancia. La teoría atómica, cuyos gérmenes hay que buscarlos en las antiguas Grecia y Roma, ha sido durante el transcurso de toda la historia del desarrollo de la Física una teoría progresiva que ha seguido la dirección materialista científica. Ya a comienzos del siglo XVIII se demostró que muchas de las propiedades incomprensibles de la materia podían ser explicadas por la teoría atómica basándose en las leyes generales de la mecánica. La teoría atómica rechazó la necesidad de recurrir a diversos líquidos imponderables hipotéticos, como el calórico, o de atribuir a la materia determinadas «tendencias», como, por ejemplo, la formulada en la edad media del «temor al vacío». M. V. Lomonósov, que en su época fue el que dio un desarrollo más completo a la teoría átomo-cinética de la materia, demostró que los fenómenos térmicos y la tendencia de los gases a ocupar todo el volumen de que disponen se deben al movimiento de los átomos. El desarrollo ulterior de la Física y la Química confirmaron plenamente que la estructura de la materia es discontinua (discreta). No obstante, de esto no se deducía que los átomos fueran unos elementos «totalmente simples» e indivisibles de la materia. Pero muchos científicos creían que toda la diversidad del mundo real podía explicarse exclusivamente por la combinación de átomos-partículas invariables y, por consiguiente, veían en los

átomos la última «esencia» de la materia. Este punto de vista no era el resultado de experimentos, sino que tenía un carácter enteramente metafísico. Esta tendencia metafísica se conservó incluso después de haber sido establecido que los átomos tienen estructura compleja. Después del descubrimiento de los electrones se intentó ver la «esencia» de la materia en los portadores de cargas eléctricas. Al mismo tiempo los representantes del idealismo creían que la imposibilidad de ver en los átomos la última «sustancia» significa renunciar al materialismo en general. Estos puntos de vista erróneos son combatidos por el materialismo dialéctico, que afirma que el mundo existente objetivamente es inagotable en su diversidad y que nuestro conocimiento de él es siempre aproximado, aunque paulatinamente se hace más profundo y más exacto. V. I. Lenin escribía sobre esto: «La «esencia» de las cosas o la «sustancia» *también* son relativas; no expresan más que de la profundización del conocimiento que el hombre tiene de los objetos, y si esta profundización no fue ayer más allá del átomo y hoy no pasa del electrón o del éter, el materialismo dialéctico insiste empero en el carácter temporal, relativo, aproximado, de todos esos *jalones* del conocimiento de la naturaleza por la ciencia humana en progreso. El electrón es tan *inagotable* como el átomo, la naturaleza es infinita, pero *existe* infinitamente, y este reconocimiento — que es el único categórico, el único incondicional — de su *existencia* fuera de la conciencia y de las sensaciones del hombre es precisamente lo que distingue el materialismo dialéctico del agnosticismo relativista y del idealismo.»*)

Los descubrimientos científicos del siglo XX han confirmado totalmente las ideas de Lenin. Ahora conocemos toda una serie de partículas «elementales» diferentes y sabemos que son distintas por sus cualidades de las «partículas» de la mecánica clásica y que diversas «partículas» pueden transformarse unas en otras.

Los nuevos adelantos de la Física en el campo de la estructura de la materia fueron el resultado de un largo estudio de las propiedades objetivas de la naturaleza que nos rodea y de la generalización de numerosos hechos nuevamente establecidos. El descubrimiento de los electrones y de los iones colocó por primera vez sobre una sólida base empírica el problema de la estructura compleja de los átomos. Un gran número de hechos ha demostrado de manera indudable que los átomos representan de por sí un complicado sistema eléctrico. La teoría de Lorentz, admitiendo que dentro de los átomos existían electrones ligados elásticamente, pudo explicar, como ya hemos visto, un gran número de fenómenos relacionados con la propagación de la luz en los cuerpos. Sin embargo, el problema de los portadores de la carga positiva quedó sin resolver durante mucho

*) V. I. Lenin, *Materialismo y empiriocriticismo*, en español, Ediciones en Lenguas Extranjeras, Moscú 1948, pág. 300.

tiempo. Tampoco era conocido el verdadero carácter que tenía el movimiento de los electrones dentro de los átomos. A principios del siglo XX se lanzaron dos hipótesis sobre la estructura de los átomos.

La primera de estas hipótesis suponía que la carga positiva está repartida con una densidad volumétrica constante dentro de los límites de una esfera cuyas dimensiones son iguales a las de todo el átomo, es decir, con un radio del orden de 10^{-8} cm. Se admitía que los electrones negativos se encuentran sumergidos en esta esfera y que interaccionan con determinados volúmenes elementales de la misma según la ley de Coulomb. Si dentro de una de estas esferas estuviera sumergido un electrón, está claro que tendría que encontrarse en el centro de la esfera, y si experimentase pequeños desplazamientos debería volver al centro impulsado por una fuerza proporcional a la magnitud del desplazamiento. Si los electrones fueran varios, deberían situarse en los vórtices de una figura simétrica determinada, y al experimentar pequeños desplazamientos con respecto a estas posiciones de equilibrio también retornarían a ellas impulsados por fuerzas proporcionales a dichos desplazamientos. De esta forma se explicaba la existencia de las fuerzas cuasielásticas que supuso Lorentz en su teoría electrónica.

Pero este modelo tenía un carácter claramente artificial, puesto que en él se atribuía una naturaleza diferente a la cargas positivas y negativas: las cargas negativas existían como partículas aisladas, electrones, mientras que las cargas positivas se repartían dentro de los límites de unos volúmenes mucho mayores en los que la densidad de la carga era continua. En estas condiciones, para poder explicar por qué las cargas positivas no se separan por la acción de la fuerzas de repulsión de Coulomb había que admitir que a pesar de las leyes de la electrodinámica no existía acción mutua entre ellas o que además de las fuerzas de Coulomb existían otras capaces de compensarlas.

La segunda hipótesis atribuía al átomo una estructura análoga a la del sistema solar: en el centro de los átomos se encuentra un núcleo pesado con carga positiva alrededor del cual giran los electrones. Las dimensiones del núcleo son pequeñas en comparación con las de todo el átomo. Este modelo comenzó a llamarse *modelo nuclear del átomo.*

El modelo nuclear fue confirmado primeramente por los experimentos dedicados al estudio de la difusión de las partículas α emitidas por los cuerpos radiactivos al pasar a través de películas sólidas delgadas. Posteriormente el modelo nuclear del átomo permitió explicar el origen y la estructura de los espectros de rayas emitidos al iluminar vapores o gases monoatómicos a baja presión. Partiendo del modelo nuclear del átomo se logró explicar también un gran número de hechos relacionados con las propiedades de las moléculas y con la estructura de los espectros emitidos por ellas. De esta

forma, los problemas relativos a la estructura de los átomos resultaron estar íntimamente ligados con el desarrollo de nuestros conocimientos de la emisión y absorción de las rayas espectrales.

La etapa siguiente en el desarrollo de la Física atómica fue el estudio de las propiedades de los propios núcleos atómicos. Se esclareció que estaban formados por partículas más simples y se estudiaron detalladamente los procesos de transformación de los núcleos originados por la radiactividad natural y artifical.

En el desarrollo de la Física atómica desempeñó un papel de extraordinaria importancia D. I. Mendeléiev, descubriendo su ley periódica y siendo con ello el primero en plantear realmente el problema de la naturaleza única de todos los elementos químicos. Posteriormente el sistema periódico de Mendeléiev, sirvió de base para el desarrollo de nuestros conocimientos sobre la estructura de los átomos. Los numerosos trabajos de los físicos soviéticos D. S. Rozhdiéstvenski, L. I. Mandelshtam, S. I. Vavílov y de sus discípulos permitieron resolver toda una serie de problemas muy importantes relacionados con la estructura de los átomos y las moléculas y sus capas electrónicas. Los físicos soviéticos han hecho grandes descubrimientos en el campo del estudio de las propiedades de los núcleos atómicos y de su estructura. D. D. Ivanenko fue el primero en proponer la hipótesis de que los núcleos atómicos están formados por dos clases de partículas «pesadas», los protones y los neutrones. I. V. Kurchátov descubrió la llamada isomería nuclear. A. I. Alijánov, A. I. Alijanián, D. V. Skobeltsín y otros muchos físicos soviéticos obtuvieron resultados muy importantes al estudiar los rayos cósmicos y las condiciones en que se forman nuevos tipos de partículas. Como resultado de las investigaciones llevadas a cabo por los físicos soviéticos se lograron enormes éxitos en la utilización de la energía atómica liberada en las transformaciones nucleares.

La posibilidad de obtener por medio de los elementos pesados uranio y plutonio reacciones explosivas fue utilizada para crear la bomba atómica. La Unión Soviética realizó su primera explosión nuclear en 1949. Pero aun teniendo el arma atómica la URSS mantiene una lucha consecuente por su prohibición y por que la energía atómica se emplee exclusivamente en fines pacíficos.

En el año 1954 comenzó a funcionar en la Unión Soviética la primera central eléctrica del mundo a base de «combustible atómico».

En la actualidad funcionan en la URSS varias centrales eléctricas atómicas y se construyen otras nuevas. También fue construido y funciona con éxito evidente el poderoso rompehielos atómico «Lenin». El campo de la utilización pacífica de la energía atómica se ensancha continuamente.

§ 339. Modelo nuclear del átomo. El modelo nuclear del átomo fue directamente confirmado como resultado de las observaciones

llevadas a cabo por Rutherford sobre la difusión de las partículas α. Estas partículas son iones de helio que llevan una carga positiva doble, es decir, $+2e$, que son emitidas con gran velocidad por los átomos de los elementos radiactivos (véanse los §§ 370 y 371). Rutherford observó que las partículas α eran capaces de infiltrarse a través de láminas metálicas delgadas, pero que al hacer esto se desviaban de la dirección inicial que tenía su movimiento. Era natural admitir que estas desviaciones se debían a la repulsión de estas

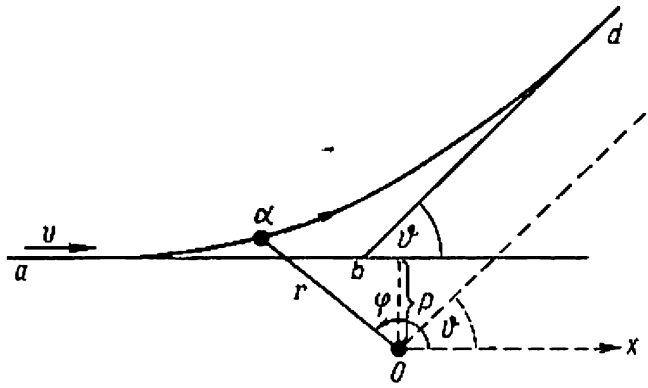

Fig. 308. Desviación de una partícula α por una carga positiva.

partículas por las cargas positivas del átomo. Las fuerzas que por parte de los electrones actúan sobre las partículas α no pueden desviar sensiblemente la dirección del movimiento de éstas, puesto que la masa de los electrones es demasiado pequeña.

Se puede demostrar que el resultado de la difusión de las partículas se debe en gran parte al volumen que ocupa la carga positiva del átomo. Unicamente cuando las dimensiones de la carga positiva del átomo son pequeñas las fuerzas de repulsión pueden ser tan grandes que den lugar a la desviación de la trayectoria de las partículas α formando ángulos considerables. Si la carga positiva del átomo ocupara un volumen considerable, cada partícula α que pasara cerca del átomo se desviaría un pequeño ángulo. En este caso la difusión de las partículas α sería insignificante.

Supongamos que una partícula α que se encuentra a gran distancia de un núcleo se mueve con una velocidad v dirigida a lo largo de una recta ab (fig. 308).

Llamemos p a la distancia mínima entre la recta ab y el centro O del átomo, en el cual se encuentra su carga positiva E. La magnitud p se llama «parámetro de choque». El cálculo correspondiente (véase la letra pequeña) demuestra que bajo la acción de las fuerzas de Columb (de interacción entre las partículas α y la carga E) la partícula α se mueve siguiendo una hipérbola. El ángulo θ en que se desvía

la trayectoria de la partícula α (ángulo formado por las dos asíntotas de la hipérbola) viene determinado por la igualdad:

$$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{Mv^2}{2eE}p, \qquad (1)$$

donde M es la masa de la partícula α. La masa del átomo se considera infinitamente grande en comparación con la masa de la partícula α. En la fórmula (1) puede verse que el ángulo de desviación θ será tanto mayor cuanto menor sea el «parámetro de choque» p. La forma de las trayectorias de las partículas α para distintos «parámetros de choque» se muestra en la fig. 309 *a*, *b* y *c*. Cuando p es pequeña el ángulo $\theta > \pi/2$, es decir, la partícula α puede resultar rechazada hacia atrás después de chocar con el átomo.

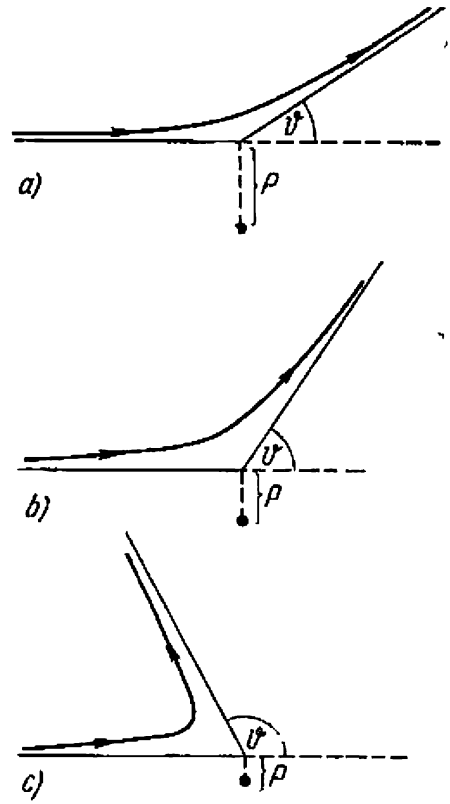

Fig. 309. Variación de la trayectoria de una partícula α en función del valor del «parámetro de choque» p.

Supongamos que a través de una hoja metálica pasa un haz paralelo de partículas α. Admitamos que en la unidad de tiempo pasan a través de la unidad de área de la sección transversal del haz n_0 partículas. Calculemos qué número de partículas se desvía, por unidad de tiempo, en ángulo que se encuentre entre dos valores dados, θ y $\theta + d\theta$. Supongamos que la desviación de ángulo θ corresponde a un «parámetro de choque» p y que la desviación de ángulo $\theta + d\theta$ corresponde a un «parámetro de choque» $p - dp$. Entonces, si la difusión se produce en un solo átomo A, se desviarán el ángulo dado todas aquellas partículas que pasen a través de la superficie de un anillo, trazado tomando como centro el del átomo A, que tenga un radio igual a p y una anchura igual a dp (fig. 310). El número de estas partículas será evidentemente igual a $n_0 dS$, siendo dS el área del anillo. Si en cada unidad de superficie de la hoja metálica hay N átomos, el número total de partículas α que se desviarán un ángulo θ, $\theta + d\theta$ en la unidad de

tiempo será igual a

$$dn = n_0 N\, dS. \qquad (2)$$

Esta correlación será justa si cada partícula α se desvía solamente una vez, cosa que suele ocurrir cuando la hoja metálica es muy delgada.

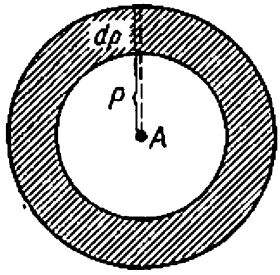

Fig. 310. Esquema para el cálculo de las partículas α desviadas.

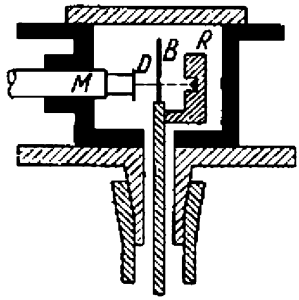

Fig. 311. Esquema del experimento para observar la difusión de las partículas α.

El área del anillo dS es igual a $2\pi p \mid dp \mid$, por lo tanto la expresión (2) toma la forma:

$$dn = 2\pi n_0 N p \mid dp \mid. \qquad (3)$$

Para hallar la expresión de $p \mid dp \mid$ aplicaremos la fórmula (1), por la que tenemos que

$$p^2 = \left(\frac{2eE}{Mv^2}\right)^2 \cot^2 \frac{\theta}{2}.$$

Diferenciando esta expresión, obtenemos

$$p\, dp = -\frac{1}{2}\left(\frac{2eE}{Mv^2}\right)^2 \frac{\cot \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}\, d\theta.$$

Poniendo esta expresión de $p\ dp$ en (3), hallamos:

$$dn = \pi n_0 N \left(\frac{2eE}{Mv^2}\right)^2 \frac{\cot \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

o

$$dn = n_0 N \left(\frac{eE}{Mv^2}\right)^2 \frac{2\pi \operatorname{sen} \theta\, d\theta}{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}}. \qquad (4)$$

Aplicando la fórmula (4) se pueden comparar los resultados de los experimentos con los de la teoría. Para observar la difusión de las partículas α se utiliza el esquema siguiente: un trocito de preparación radiactiva R (fig. 311) colocado dentro de una ampolla de plomo

emite un haz estrecho de partículas α que incide normalmente sobre una hoja metálica B. Las partículas α que pasan a través de dicha hoja se difunden en distintas direcciones. Estas partículas difusas se pueden observar gracias a la propiedad que tienen de producir centelleo en una pantalla fluorescente (concretamente de sulfuro de zinc, SZn). Cada partícula α se mueve con una energía tan grande que al chocar con la pantalla puede producir un destello perceptible por el ojo. Si la pantalla se observa al microscopio pueden apreciarse destellos aislados que permiten contar el número de partículas α que llegan a ella. La pantalla D, junto con el microscopio M, puede moverse describiendo un círculo cuyo centro se encuentra en el sitio en que está la hoja metálica difusora B. De esta manera se puede contar el número de partículas que se difunden formando distintos ángulos θ.

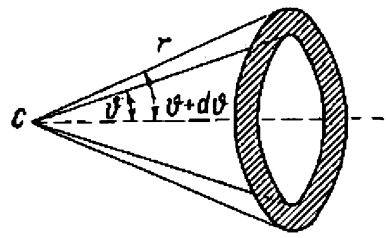

Fig. 312. Esquema para el cálculo del número de partículas α que llegan a la pantalla.

La fórmula (4) da el número dn de partículas que durante la unidad de tiempo experimentan una desviación comprendida entre los valores dados θ y $\theta + d\theta$. En otras palabras, dn es el número de partículas que pasan en la unidad de tiempo por el espacio comprendido entre dos conos cuyos ángulos de abertura son 2θ y $2(\theta + d\theta)$. Si tomamos como centro el vértice C de estos conos y trazamos una esfera de radio r, los conos cortarán a la superficie de esta esfera formando una zona esférica (rayada en la fig. 312) cuya área será igual a $2\pi r \operatorname{sen}\theta \times r d\theta = 2\pi r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$. Todas las dn partículas incidirán sobre esta superficie. Por consiguiente, sobre la unidad de superficie incidirá un número de partículas

$$dn' = \frac{dn}{2\pi r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta}.$$

Este es el número de impactos de partículas que durante la unidad de tiempo será registrado sobre la unidad de superficie de la pantalla D. Poniendo en la última expresión en lugar de dn su valor según (4), hallamos que

$$dn' = \frac{n_0 N}{r^2}\left(\frac{eE}{Mv^2}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}}. \qquad (5)$$

De la fórmula (5) se deduce que para unas condiciones dadas del experimento el producto $dn' \cdot \operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}$ deberá permanecer constante mientras varía el ángulo θ. Las observaciones confirmaron plenamente esta deducción teórica. En la tabla XIV se da el número de

destellos (centelleo) dn' obtenido con distintos ángulos θ (al ser difundidas las partículas α por un pan de oro) y el valor del producto $dn' \cdot \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}$.

Como puede verse en la tabla XIV, a pesar de que el centelleo aumentó varios millares de veces, el producto $dn' \cdot \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}$ se mantuvo prácticamente constante. Esto quiere decir que la acción mutua entre las partículas α y la carga positiva del átomo viene expresada por la ley de Coulomb.

Tabla XIV

θ^0	Número de destellos (centelleo)	$dn' \cdot \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}$
150	33,1	25,8
120	51,9	29,0
105	69,5	27,5
75	211	29,1
60	477	29,8
45	1 435	30,8
30	7 800	35,0
15	132 000	38,4

La fórmula (5) sirve también para hallar magnitud de la carga positiva del átomo E partiendo del número dn' de partículas α desviadas, puesto que todas las demás magnitudes que entran en dicha fórmula pueden medirse. Como los átomos en estado normal son neutros, la carga positiva E deberá ser un múltiplo entero del valor mínimo de la carga del electrón: $E = Z|e|$, donde Z es un número entero. Las mediciones realizadas por Rutherford y sus colaboradores demostraron que la magnitud Z es igual aproximadamente a la mitad del peso atómico.

El peso atómico de los elementos que ocupan los primeros puestos en el sistema periódico es casi exactamente igual al doble del número de orden que tienen en la tabla de Mendeléiev. Por ejemplo, el carbono se encuentra en sexto lugar y su peso atómico es igual a 12; el aluminio ocupa el puesto décimotercero y su peso atómico es 27; los elementos que se encuentran hacia la mitad y sobre todo los que se hallan al final del sistema periódico tienen pesos atómicos mayores que los previstos por esta correlación. No obstante, hablando en términos aproximados puede decirse que los pesos atómicos de todos los elementos son iguales al doble de su número de orden en el sistema periódico. Por esto, basándose en las mediciones realizadas por

Rutherford surgió la hipótesis de que la magnitud Z (*número de carga del elemento*) es igual al número de orden del elemento en la tabla de Mendeléiev. Posteriormente esta hipótesis quedó confirmada exactamente.

Conociendo la carga del átomo $E = Z|e|$, por la fórmula (1) podemos hallar el «parámetro de choque» p que corresponde a los distintos ángulos de desviación θ. De estos cálculos resulta que cuando se trata de elementos pesados, con los que θ alcanza valores de 150°, p es del orden de 10^{-13} cm. Esto significa que a una distancia, entre el centro de la partícula α y el del átomo, de orden de 10^{-13} cm las fuerzas de acción mutua aún cumplen la ley de Coulomb. De aquí se deduce a su vez que las dimensiones de la carga positiva del átomo no pueden ser mayores de 10^{-13} cm.

Como las dimensiones del átomo en su conjunto representan una magnitud del orden de 10^{-8} cm, los resultados de estos experimentos confirman indudablemente la realidad del modelo nuclear del átomo, es decir, la carga positiva del átomo se concentra en un volumen muy pequeño en comparación con el átomo.

Resumiendo las deducciones sacadas en este párrafo, tenemos: que en el centro del átomo se encuentra un pequeño núcleo cargado positivamente en el cual se halla concentrada casi toda la masa del átomo; la carga del núcleo $E = Z|e|$, siendo Z el número de orden del elemento en el sistema periódico de Mendeléiev. Alrededor del núcleo giran, en estado normal, Z electrones.

El átomo más simple, según este modelo, es el de hidrógeno. Este átomo tiene un solo electrón. El núcleo del átomo de hidrógeno es el más simple de todos los núcleos atómicos y se conoce con el nombre de *protón*. La carga de un protón es igual a $+e$. La masa de un protón constituye la $\frac{1835}{1836}$-ava parte de la masa del átomo de hidrógeno, mientras que la del electrón es igual a la $\frac{1}{1836}$-ava parte de la de dicho átomo. El elemento siguiente en el sistema periódico es el helio. Su átomo en estado normal contiene dos electrones. El núcleo del helio tiene una carga igual a $+2e$ y su masa es aproximadamente cuatro veces mayor que la de un protón. Las partículas α son núcleos de helio.

Sin embargo, conviene señalar que el modelo nuclear del átomo no está de acuerdo con las leyes de la electrodinámica clásica. Es el caso, que el electrón al girar alrededor del núcleo experimenta una aceleración y, por consiguiente (véase el § 331), debe emitir ondas electromagnéticas y, por lo tanto, perder energía. Como resultado de esto el movimiento del electrón será inestable y éste acabará cayendo en el núcleo. Pero como en realidad los átomos son formaciones bastante estables, se deduce que las leyes de la mecánica clásica, establecidas sobre la base de la observación de procesos macroscópicos, no

son aplicables a los procesos intraatómicos. El carácter de las leyes válidas para estos procesos pudo hallarse después de un largo estudio de las propiedades de los átomos y, en particular, después de estudiar la composición de sus espectros.

Para calcular el ángulo de desviación θ volvamos a la fig. 308 e introduzcamos las coordenadas polares r y φ para las partículas α. En estas condiciones la energía potencial W_p y la energía cinética W_c de las partículas α podrán escribirse de la forma

$$W_p = \frac{2eE}{r} \quad \text{y} \quad W_c = \frac{M}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

Para la energía total W obtenemos:

$$W = -\frac{2eE}{r} + \frac{M}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2). \tag{6}$$

Escribamos también la expresión del momento de la cantidad de movimiento de las partículas α:

$$P = Mr^2\dot{\varphi}. \tag{7}$$

Utilizando esta última correlación, efectuemos en la expresión de la energía total la sustitución de las derivadas. De acuerdo con (7) la derivada con respecto al tiempo del acimut φ será:

$$\dot{\varphi} = \frac{P}{Mr^2}. \tag{8}$$

La derivada del radio vector r con respecto al tiempo la representaremos de la forma siguiente:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{P}{Mr^2}\frac{dr}{d\varphi}. \tag{9}$$

Poniendo en (6) en lugar de $\dot{\varphi}$ y $\dot{r}$ sus valores según (8) y (9), obtenemos:

$$W = \frac{2eE}{r} + \frac{P^2}{2Mr^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{P^2}{2Mr^2}$$

o

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2MW}{P^2} - \frac{4MeE}{P^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}. \tag{10}$$

Designando $\frac{1}{r}$ por medio de ρ, tendremos que $\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$, y la fórmula (10) tomará el aspecto:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2MW}{P^2} - \frac{4MeE}{P}\rho - \rho^2.$$

Derivando esta expresión una vez más con respecto a φ, obtenemos

$$2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -\frac{4MeE}{P^2}\frac{d\rho}{d\varphi} - 2\rho\frac{d\rho}{d\varphi}.$$

Y como $\frac{d\rho}{d\varphi} \neq 0$, la última expresión conduce a la igualdad:

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = -\frac{2MeE}{P^2}. \tag{11}$$

Como sabemos por la mecánica, el momento de la cantidad de movimiento P de un sistema cerrado permanece constante, por lo tanto, la magnitud

$$C = -\frac{2MeE}{P^2} \tag{12}$$

será constante. Poniendo esta constante C en la expresión (11) obtenemos en definitiva la siguiente ecuación diferencial, que cumple el movimiento de la partícula α que estudiamos:

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = C.$$

La solución de esta ecuación diferencial, como puede comprobarse fácilmente haciendo la sustitución, será la función siguiente:

$$\rho = C + A\cos\varphi + B\,\text{sen}\,\varphi, \tag{13}$$

donde A y B son constantes. El valor de estas constantes se puede hallar de la manera siguiente: cuando $\varphi = \pi$ (fig. 308) la partícula α se encontrará a una distancia infinitamente grande a la izquierda del origen de coordenadas O y $\rho = \frac{1}{r} = 0$. De aquí, por (13), hallamos que $A = C$ y, por consiguiente, la expresión (13) toma el aspecto:

$$\rho = C(1 + \cos\varphi) + B\,\text{sen}\,\varphi. \tag{14}$$

Por otra parte, cuando $\varphi \to \pi$ la expresión $r\,\text{sen}\,\varphi$ tiende a un valor igual a la longitud del segmento p. De donde por (14) obtenemos:

$$\frac{1}{p} = \lim_{\varphi\to\pi} \frac{\rho}{\text{sen}\,\varphi} = \lim_{\varphi\to\pi} \left[\frac{C(1+\cos\varphi)}{\text{sen}\,\varphi} + B\right].$$

Pero como

$$\lim_{\varphi\to\pi} \frac{1+\cos\varphi}{\text{sen}\,\varphi} = 0,$$

podemos hallar el valor de B por la expresión anterior:

$$B = \frac{1}{p}.$$

Después de esto la expresión (14) toma la forma:

$$\rho = C(1+\cos\varphi) + \frac{1}{p}\,\text{sen}\,\varphi. \tag{15}$$

Esta expresión representa la ecuación de una hipérbola. Una de las asíntotas de esta hipérbola es la recta ab y la otra la recta bd. Hallemos ahora el ángulo θ entre estas asíntotas. En la fig. 308 puede verse que cuando la partícula α se aleja a una distancia infinitamente grande del punto O hacia la derecha, cuando $\rho = \frac{1}{r}$ se hace igual a cero, el ángulo φ tiende a un valor igual a θ. Por esto, cuando $\varphi = \theta$, aplicando la fórmula (15), obtenemos:

$$C(1+\cos\theta) + \frac{1}{p}\,\text{sen}\,\theta \quad \text{ó} \quad \frac{1}{Cp} = -\frac{1+\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = -\cot\frac{\theta}{2}.$$

Por esta última igualdad hallamos que el ángulo de desviación de la trayectoria de la partícula α viene determinado por la igualdad:

$$\cot\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{Cp}.$$

Poniendo aquí en lugar de C su valor según (12), hallamos:

$$\cot\frac{\theta}{2}\frac{p^2}{MeEp}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $P = Mpv$, siendo v el valor de la velocidad inicial de la partícula α, obtenemos:

$$\cot\frac{\theta}{2}=\frac{Mv^2}{2eE}p,$$

expresión que coincide con la fórmula (1) del texto fundamental.

§ 340. Leyes de los espectros atómicos. El modelo nuclear de los átomos fue nuevamente confirmado por los resultados del estudio de los espectros de rayas. Resultó que las leyes por que se rige la distribución de las rayas en los espectros pueden ser explicadas en gran medida si se admite que los electrones se mueven dentro de los átomos describiendo órbitas circulares o elípticas alrededor de un pesado núcleo cargado positivamente.

En la segunda mitad del siglo pasado quedó esclarecido que los espectros de rayas son emitidos por los átomos, mientras que los de bandas lo son por las moléculas. También se observó que las rayas de los espectros atómicos no se encuentran en desorden, sino que en muchos casos forman grupos determinados o, como suele decirse, *series*. Así, en las regiones visible y ultravioleta próxima del espectro del hidrógeno se encuentra una serie de rayas muy características. Esta serie lleva el nombre de Balmer en honor al físico suizo que descubrió que las longitudes de onda de las rayas de esta serie pueden representarse por medio de una fórmula sencilla:

$$\lambda=\lambda_0\frac{n^2}{n^2-4}, \qquad (1)$$

donde λ_0 es cierta constante y $n = 3, 4, 5, \ldots$, es decir, toma los valores de la serie continua de los números enteros. A la fórmula de Balmer se le puede dar una forma más sencilla si en vez de caracterizar las rayas espectrales por sus longitudes de onda se caracterizan por sus frecuencias o por magnitudes proporcionales a ellas llamadas *números de ondas*. Se entiende por número de ondas la cantidad de éstos que caben en 1 cm, es decir, la magnitud

$$\nu=\frac{10^8}{\lambda_v},$$

donde λ_0 es la longitud de onda expresada en angstrom y referida al vacío. En este caso la fórmula (1) toma el aspecto:

$$\nu = A - \frac{R}{n^2}, \qquad (2)$$

donde A y R son constantes y n sigue tomando, como antes, los valores de los números enteros. En la fórmula (2) se puede ver que a medida que aumenta n las rayas se encuentran más juntas entre sí, como si

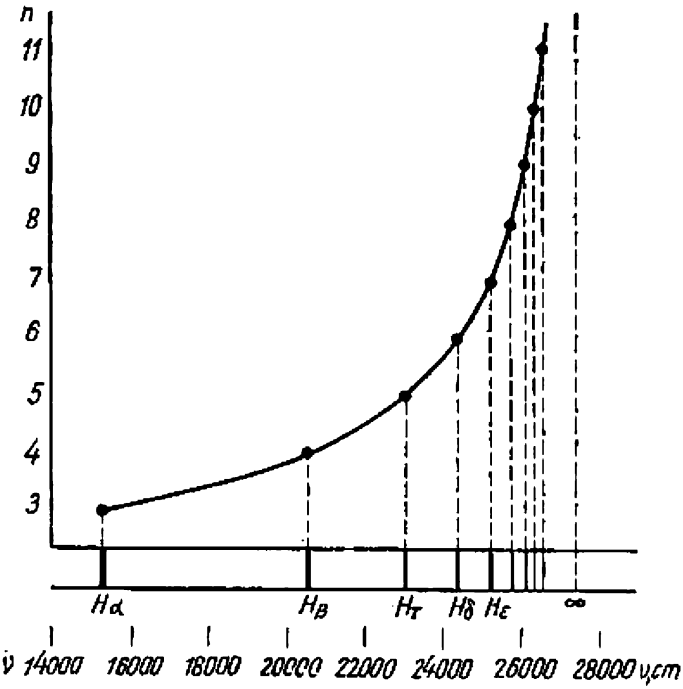

Fig. 313. Disposición de las rayas en el espectro del hidrógeno.

tendieran a un cierto límite que se encuentra junto al valor $\nu_\infty = A = 27\,419{,}4$ cm^{-1} o, expresado en longitudes de onda, junto a $\lambda_\infty = 3\,646{,}13$ Å. En la parte inferior de la fig. 313 se da la disposición de las rayas del hidrógeno en la escala de los números de ondas y en la parte superior de la misma la variación gráfica de ν en función de los números enteros n. Como puede verse se obtiene una curva suave que se aproxima asintóticamente a la recta ν_∞.

La perfecta coincidencia de las longitudes de onda calculadas por la fórmula (1) o (2) con las obtenidas en las observaciones puede comprobarse en la tabla XV, en la que se incluyen los valores correspondientes a las seis primeras rayas del hidrógeno.

Conviene prestar atención al hecho de que en la tabla XV las discrepancias que existen entre los valores calculados de las longitudes de onda y los observados se encuentran en la sexta cifra significativa y no se salen de los límites de los errores de observación, lo

Tabla XV

n	Símbolos de las rayas	λ en Å	
		calculada	observada
3	H_α	6 562,80	6 562,81
4	H_β	4 861,38	4 861,33
5	H_γ	4 340,51	4 340,47
6	H_δ	4 101,78	4 101,74
7	H_ε	3 970,11	3 970,07
8	H_ζ	3 889,09	3 889,06

que quiere decir que la fórmula de Balmer es una de las que expresan leyes físicas que se cumplen más exactamente. Su peculiaridad consiste en que las longitudes de onda de la serie sucesiva de rayas espectrales resulta ser función de los números enteros.

Posteriormente Rydberg advirtió que entre las constantes A y R de la fórmula (2) existe una relación simple y que se cumple exactamente:

$$A = \frac{R}{2^2}.$$

Por lo tanto, los números de ondas de las rayas de la serie de Balmer del hidrógeno vienen expresados por la fórmula siguiente (en la que hay una sola constante):

$$\nu = \frac{R}{2^2} - \frac{R}{n^2}, \qquad n = 3, 4, 5, \ldots \tag{3}$$

R se conoce con el nombre de *constante de Rydberg* y su valor es:

$$R = 109\,677{,}6 \text{ cm}^{-1}.$$

Más adelante Rydberg consiguió demostrar que las rayas espectrales forman series regulares no sólo en el espectro del hidrógeno, sino también en los de otros elementos, en primer lugar en los metales alcalinos.

Estudiando la disposición de las rayas en las series, Rydberg descubrió que las frecuencias (o los números de ondas) de las rayas se pueden representar en forma de diferencia entre dos funciones de los

números enteros n_1 y n_2:

$$\nu = T_1(n_1) - T_2(n_2). \qquad (4)$$

$T_1(n_1)$ tiene en cada serie un valor constante, mientras que $T_2(n_2)$ lo tiene variable. Las funciones $T_1(n_1)$ y $T_2(n_2)$ tomadas

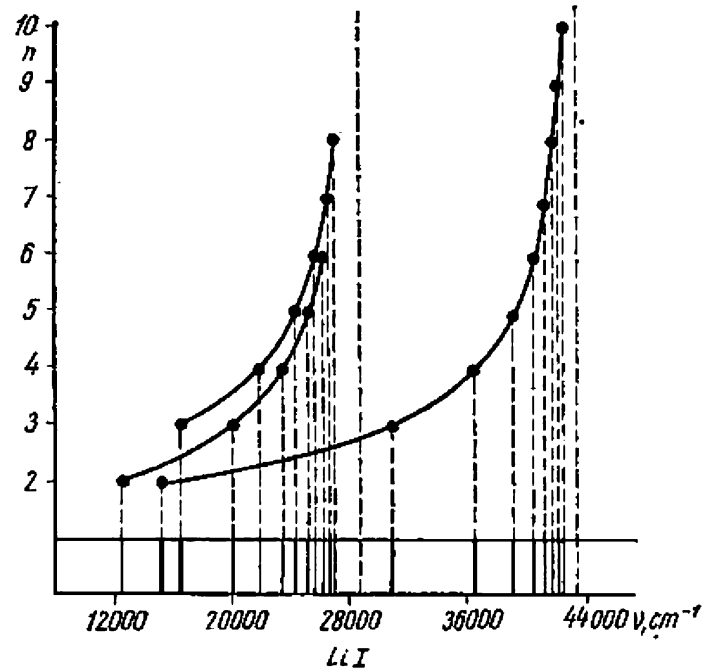

Fig. 314. Series del espectro del litio.

separadamente reciben el nombre de *términos espectrales*. La comparación con la fórmula (3) demuestra que para la serie de Balmer del hidrógeno

$$T_1(n_1) = \frac{R}{2^2}, \qquad T_2(n_2) = \frac{R}{n^2}.$$

En los espectros de los metales alcalinos hay algunas series que por su aspecto se parecen a la serie de Balmer; para convencerse de esto no hay más que echar una ojeada a las series del espectro del litio (fig. 314).

Basándose en este hecho Rydberg intentó dar a los términos espectrales de los distintos elementos una forma análoga a la que tienen para el hidrógeno y, concretamente, supuso que

$$T(n) = \frac{R}{(n+\alpha)^2}, \qquad (5)$$

siendo R la misma constante de antes, n número entero y α una corrección determinada que representa de por sí un quebrado propio. Esta correlación resulta aproximadamente constante para todas las rayas de una misma serie. Los términos pueden representarse más exactamente de la forma:

$$T(n) = \frac{R}{\left(n + \alpha + \frac{\beta}{n^2}\right)^2}, \qquad (5a)$$

donde β es una segunda corrección mucho más pequeña que α.

Cuando $n \to \infty$

$$T(n) \to \frac{R}{n^2},$$

es decir, a medida que aumenta el número entero n todos los términos se hacen cada vez más semejantes a los del hidrógeno.

Rydberg estableció que los metales alcalinos presentan tres series distintas (véase el espectro del litio en la fig. 314). Estas series reciben los nombres de: 1) principal, 2) difusa, y 3) definida (sharp). La serie principal comprende las rayas más brillantes y fáciles de observar: la primera raya de la serie principal es generalmente la más característica del espectro de cada elemento. Las rayas de la serie principal se pueden descubrir también en los espectros de absorción. El término variable de cada una de estas series puede representarse con bastante exactitud por una fórmula de la forma (5). En este caso la corrección α correspondiente al término variable de la serie principal se suele designar con la letra p, el de la difusa con la d y el de la definida con la s. Las rayas de las series difusa y definida tienen un mismo límite. Gracias a esto las fórmulas de las tres series toman las siguientes formas:

la serie principal $\nu = A - \frac{R}{(n+p)^2}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

la serie difusa $\nu = B - \frac{R}{(n+d)^2}$, $n = 3, 4, 5, \ldots$

la serie definida $\nu = B - \frac{R}{(n+s)^2}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

donde A es el límite de la serie principal y B el límite común de las series difusa y definida. Las correcciones s, p y d, por definición, son quebrados propios.

Rydberg descubrió después la correlación entre los límites de las series, demostrando que el límite de la serie principal

$$A = \frac{R}{(1+s)^2}, \qquad (6)$$

y que el límite común de las series difusa y definida

$$B = \frac{R}{(2+p)^2}.$$

Posteriormente se descubrió que los metales alcalinos presentan en la región infrarroja del espectro otra serie (serie de Bergmann), cuyo límite es $\frac{R}{(3+d)^2}$.

Introduzcamos una notación de los términos en la que el término $\frac{R}{(n+x)^2}$ se designe por medio de símbolo nX. Entonces las fórmulas de las series para los metales alcalinos tomarán el aspecto siguiente:

serie principal $\nu = 1S - nP$, $n = 2, 3, 4, \ldots$
serie definida $\nu = 2P - nS$, $n = 2, 3, 4, \ldots$
serie difusa $\nu = 2P - nD$, $n = 3, 4, 5, \ldots$
serie de Bergmann $\nu = 3D - nF$, $n = 4, 5, 6, \ldots$

En la realidad todas las rayas de los metales alcalinos son dobletes, siendo las del litio Li muy estrechas, las del sodio Na algo más anchas, y en general tanto más anchas cuanto mayor es el peso atómico del elemento. Más adelante nos detendremos a estudiar la naturaleza de estos dobletes.

En los espectros de los metales alcalinos se encuentran también rayas cuyos números de ondas vienen expresados por diferencias de términos diferentes de las que hemos señalado, por ejemplo:

$$\nu = 2S - nP, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$
$$\nu = 3P - nS, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

Resumiendo todo lo dicho anteriormente formulemos en forma general las leyes empíricas del modo siguiente: para caracterizar el espectro de cualquier elemento en lugar de emplear las longitudes de onda λ de sus rayas o sus números de ondas ν se pueden utilizar números menores de otras magnitudes, llamadas términos espectrales T, que son funciones de números enteros n.

Determinadas diferencias de términos dan de acuerdo con la igualdad (4) los números de ondas ν de las rayas espectrales que se observan.

§ 341. Naturaleza de los términos espectrales. Desde un principio estaba claro que los términos espectrales debían tener un sentido físico determinado y que la correlación (4) del § 340 debía estar relacionada con el mecanismo de la emisión de las rayas espectrales. Pero la verdadera naturaleza de estos términos no fue puesta en claro por Bohr hasta treinta y tantos años después de los trabajos de Rydberg. Al mismo tiempo Bohr demostró que la correlación de Rydberg (4) expresa una de las leyes principales de la Física, la ley a que está sometido el proceso de la radiación.

Bohr partió de la hipótesis propuesta por Planck (§ 331) de que los osciladores del cuerpo negro no emiten la energía continuamente, sino en porciones cuya magnitud ε depende de la frecuencia ν*) de

*) La letra ν se emplea indistintamente para designar la frecuencia y el número de ondas.

la radiación emitida.

$$\varepsilon = h\nu. \tag{1}$$

Bohr aplicó la hipótesis de Planck a los átomos de los vapores y gases luminiscentes: el acto elemental de la radiación consiste en la pérdida de una porción ε de energía en forma de luz monocromática de frecuencia ν, determinada por la igualdad (1).

Llamemos W_2 a la energía del átomo antes de emitir la luz y W_1 la que tiene después; entonces $\varepsilon = W_2 - W_1$, y teniendo en cuenta la igualdad (1):

$$W_2 - W_1 = h\nu,$$

o

$$\nu = \frac{W_2}{h} - \frac{W_1}{h}. \tag{2}$$

De la comparación de la fórmula (2) con la correlación de Rydberg

$$\nu = T_1 - T_2$$

se deduce que los términos de las series son proporcionales a los valores de la energía W_i del átomo con la exactitud de hasta una constante aditiva determinada. Y como la experiencia demuestra que cada átomo se caracteriza por una serie determinada de términos, Bohr supuso que cada átomo puede encontrarse únicamente en una serie discontinua determinada de estados estables que se caracterizan por tener unos valores perfectamente determinados de la energía W_i. Estos estados se llaman *estacionarios*. Cuando los átomos se encuentran en un estado estacionario no emiten radiación. La emisión se produce cuando el átomo pasa de un estado estacionario a otro. El postulado de las frecuencias de Bohr (2), sin ocuparse del mecanismo de la propia emisión, permite determinar la frecuencia con que emiten los átomos partiendo de las energías que tienen en los distintos estados estacionarios, es decir, permite determinar su espectro.

De esta forma, a cada término le corresponde un valor determinado de la energía del átomo. Supongamos que

$$T_i = -\frac{W_i}{h}, \text{*)} \tag{3}$$

en este caso el postulado de Bohr (2) conduce directamente a la correlación de Rydberg [(4) del § 340]. A la energía del átomo W_i de menor valor algebraico le corresponde el término de valor numérico mayor. Los valores de la energía se pueden representar gráficamente en forma de niveles, de manera que el nivel más profundo sea el que tiene menos energía (fig. 315); a este nivel le corresponden

*) Más adelante veremos que las energías del átomo son negativas (si se elige conveniente el valor nulo de la energía potencial). Por esta razón en el segundo término de la fórmula (3) se toma el signo menos.

derá el término mayor. La emisión de rayas se representará entonces por medio de flechas que unan entre sí aquellos dos niveles el paso entre los cuales determina la emisión de una raya determinada.

El átomo se encuentra normalmente en aquel estado estacionario que se caracteriza por tener el valor más pequeño de la energía. En otras palabras, el átomo se encuentra normalmente en el nivel inferior. Y mientras se encuentra en este estado no emite. Pero si por cualquier influjo energótico externo pasa el átomo a otro estado estacionario de mayor energía, es decir, si se eleva a un nivel superior, al volver al estado anterior emitirá una raya determinada cuya frecuencia viene dada por la fórmula (2). El nivel más profundo (inferior) de los metales alcalinos es el 1S (fig. 316) y el nivel energético más próximo a él es el 2P; a este último es al que puede pasar con más facilidad el átomo que se encuentra en el nivel normal 1S. Al paso de retorno desde el nivel 2P al 1S le corresponde la emisión de la primera raya de la serie principal $\nu = 1S - 2P$. De esta forma se explica el hecho de que esta raya sea la más característica de este espectro y la más fácil de excitar. Para excitar las rayas siguientes del espectro hay que comunicarle al átomo más energía, para poderlo pasar a niveles energéticos más elevados.

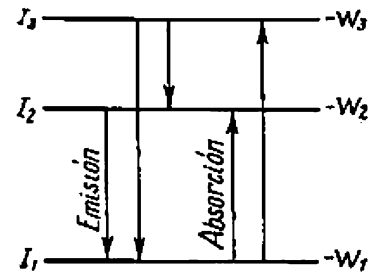

Fig. 315. Niveles de energía del átomo.

Para explicar cómo se forman en los espectros de los metales alcalinos las series que indicamos en el § 340 hay que admitir que en los átomos no son factibles todas las transiciones entre diferentes niveles de energía, sino únicamente algunas de ellas, es decir, en estos pasos o transiciones hay que establecer cierta limitación o *regla de selección*. Esta regla se reduce a que los términos S se «combinan» exclusivamente con los términos P, los términos P únicamente con los S y D, los D solamente con los P y F y así sucesivamente.

De acuerdo con la regla de selección el átomo solamente puede pasar al nivel normal 1S si se encuentra en uno de los niveles nP y al ocurrir esto emitirá, según el postulado de las frecuencias, las rayas

$$\nu = 1S - n\mathrm{P}, \quad n = 2, 3, 4 \ldots,$$

es decir, las rayas de la serie principal. El valor del término 1S da en este caso el límite de la serie principal. El átomo puede pasar al nivel 2P desde los niveles nD y desde los nS más elevados; en este caso se excluyen las rayas

$$\nu = 2\mathrm{P} - n\mathrm{D}, \quad n = 3, 4, \ldots,$$
$$\nu = 2\mathrm{P} - n\mathrm{S}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

es decir, las rayas de las series difusa y definida. El nivel 2P da el límite común de estas dos series. De esta forma el esquema de los niveles explica la comunidad de los límites de las series difusa y definida.

La emisión de luz se produce cuando el átomo pasa de un estado estacionario de mayor energía a otro estado estacionario de menor

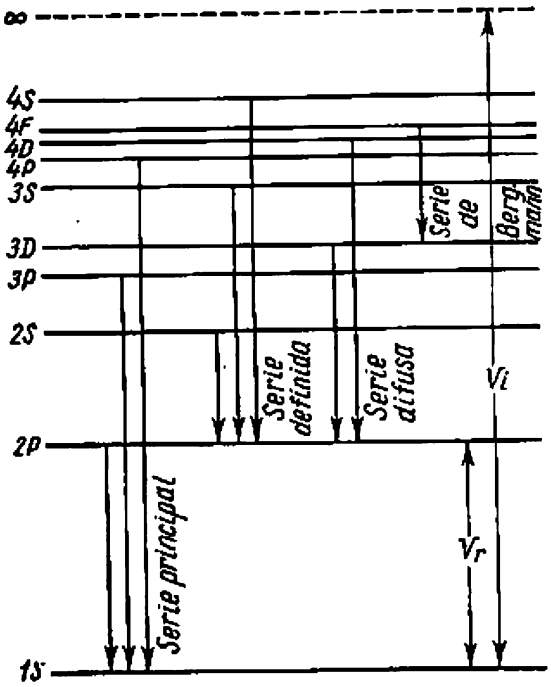

Fig. 316. Esquema de los niveles de los metales alcalinos.

energía; la absorción está relacionada con la transición contraria. Como el átomo normalmente se encuentra en el estado de menor energía, se deduce que este átomo puede absorber solamente luz de aquellas longitudes de onda que coinciden con las de las rayas espectrales que surgen cuando dicho átomo pasa de los niveles más altos al nivel normal, es decir, con las de las rayas de la serie principal. Esto, como dijimos antes, se confirma efectivamente en los experimentos.

La disposición de los niveles puede comprobarse por medio de experimentos directos. En primer lugar sirve para esto el experimento con choque electrónico cuyo esquema se muestra en la fig. 317. En el centro de un recipiente metálico de forma cilíndrica, del que se ha evacuado el aire, se encuentra un cátodo caliente K. Los

electrones que emite este cátodo se aceleran por medio de un campo creado entre el cátodo y el ánodo A. Este último tiene el aspecto de una rejilla también cilíndrica. La distancia entre el cátodo y el ánodo se toma tan pequeña que los electrones pueden recorrerla sin chocar con los átomos del vapor que se investiga (del cual está lleno el recipiente). Gracias a este artificio la energía de los electrones que llegan al ánodo será igual a eV, siendo V la diferencia de potencial entre el cátodo y el ánodo. Las paredes del recipiente se mantienen al mismo potencial que el ánodo. Con esto se consigue que los electrones que pasan por los orificios de la rejilla del ánodo puedan moverse después con velocidad constante en un espacio exento de campo. En este espacio es en el que ocurren los choques con los átomos del vapor. La luz que se produce al ocurrir esto se puede ver a través de una ventanilla que hay en la parte superior del recipiente.

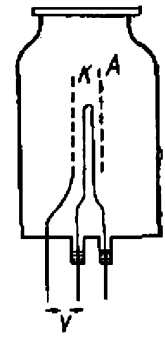

Fig. 317. Esquema del experimento con choque electrónico.

Mientras la energía del electrón eV es tan pequeña que no basta para hacer pasar el átomo desde su estado normal hasta el estado energético estacionario inmediato, el choque es elástico y no se observa luz alguna. Pero cuando la energía del electrón resulta prácticamente suficiente para hacer pasar el átomo al estado estacionario siguiente, al producirse un choque el electrón cede toda su energía al átomo (debido a que la masa del electrón es mucho más pequeña que la del átomo). De acuerdo con lo dicho anteriormente, el átomo, al regresar después del choque a su estado normal, emite esta misma energía $\Delta W = eV$ en forma de radiación cuya frecuencia es

$$\nu = \frac{\Delta W}{h} = \frac{eV}{h} \qquad (4)$$

o cuya longitud de onda es

$$\lambda = \frac{ch}{eV},$$

donde c es la velocidad de la luz. Poniendo en lugar de e, h y c sus valores numéricos y expresando λ en angstroms y V en voltios, obtenemos una correlación muy cómoda para calcular la longitud de onda de la raya emitida a partir de potencial acelerador:

$$\lambda = \frac{12\,340}{V}. \qquad (5)$$

De lo dicho se infiere que mientras la energía de los electrones excitadores va aumentando paulatinamente no se observa luz, hasta que por fin esta energía alcanza un valor determinado W suficiente para hacer que el átomo pase de su estado normal al estado

excitado más próximo. El valor del potencial acelerador V correspondiente a esta energía recibe el nombre de *crítico*. Cuando el potencial acelerador se hace igual a crítico comienza la emisión de una raya única cuya longitud de onda viene determinada por la fórmula (5). Esta raya y el potencial correspondiente suelen llamarse *de resonancia*. Si la energía de los electrones sigue aumentando aparecen una tras otra todas las rayas del espectro.

En los metales alcalinos, como puede verse en el esquema de los niveles de energía (fig. 316), la raya de resonancia es la primera línea de la serie principal $\nu = 1S - 2P$. En el caso del sodio será

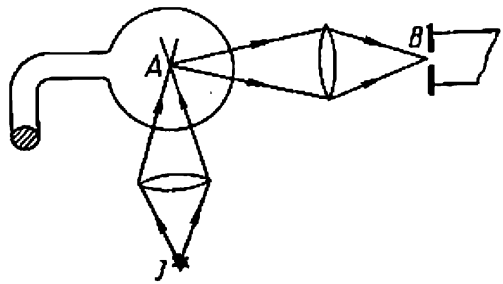

Fig. 318. Esquema del experimento sobre la fluorescencia del vapor de sodio.

una raya amarilla, es decir, la raya D, cuyo potencial de resonancia es igual a 2,1 *eV*. Efectivamente, cuando a través del vapor de sodio se hacen pasar electrones cuya energía es menor de 2,1 *eV* la luz no se observa, y cuando esta energía es igual a 2,1 *eV* aparece solamente una raya amarilla. Si la energía de los electrones que chocan sigue aumentando aparecen las demás rayas. Fenómenos análogos tienen lugar con los otros elementos.

El segundo grupo de experimentos que confirma el esquema de los niveles de energía es el relacionado con la *fluorescencia*, en particular con la llamada *fluorescencia resonante o de resonancia*. Como demostró por vez primera Wood, si el vapor de sodio se ilumina con luz cuya frecuencia coincide con la de la raya amarilla del sodio dicho vapor comienza a emitir luz constituida por esta misma raya amarilla $\nu = 1S - 2P$ (fluorescencia de resonancia). El esquema del experimento sobre la fluorescencia del vapor de sodio se representa en la fig. 318, donde A es un recipiente que contiene vapor de sodio a baja presión; J es una fuente de luz de sodio. La observación se hace en la dirección AB. El espectro de la fluorescencia se analiza por medio de un espectrógrafo. Basándose en la hipótesis de los niveles energéticos este fenómeno puede explicarse fácilmente por el hecho de que el átomo de sodio, al absorber la luz, pasa de su estado normal 1S al estado inmediato 2P ((fig. 319, *a*). Este átomo, al regresar a su estado normal 1S, es el que emite la

raya $\nu = 1S - 2P$, es decir, la misma que había absorbido. Cuando el vapor de sodio se ilumina con luz ultravioleta de frecuencia igual a la de la segunda raya de la serie principal del sodio $\nu = 1S - 3P$, también se observa *fluorescencia* del vapor, pero en este caso emite no sólo la misma raya que absorbe, sino también la raya amarilla $\nu = 1S - 2P$. Este hecho también es fácil de explicar: desde el nivel 3P el átomo puede pasar, no sólo directamente al nivel 1S (fig. 319, *b*) emitiendo la raya $\nu = 1S - 3P$, sino que además puede pasar a través de los estados intermedios, es decir, del 3P al 2S, del 2S al 2P y, finalmente, del 2P al 1S; al realizar este último paso emitirá la raya amarilla $\nu = 1S - 2P$. A los otros dos pasos les corresponde la emisión de las rayas $\nu = 2S - 3P$ y $\nu = 2P - 2S$, que se encuentran en la región infrarroja remota del espectro y que en los experimentos de Wood pasaron inadvertidas.

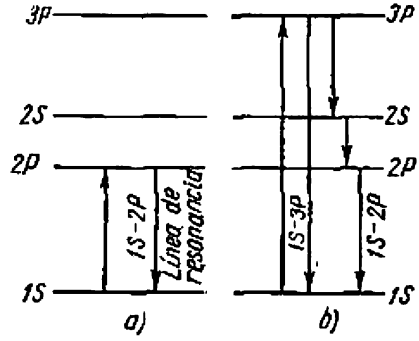

Fig. 319. Origen de la fluorescencia de los átomos.

Un esquema de niveles totalmente análogo permite estudiar todos los demás casos de fluorescencia de los vapores y gases monoatómicos. Experimentos de este tipo, con objeto de estudiar los espectros de fluorescencia de toda una serie de elementos (Hg, Sr, Pb), fueron realizados por A. N. Terenin.

§ 342. Estructura del átomo de hidrógeno y de los iones semejantes a él. La hipótesis de que el átomo puede encontrarse en una serie de estados estacionarios caracterizados por tener unos valores determinados de la energía W_i, como ya hemos visto, puede confirmarse directamente con experimentos. Pero estos estados son incompatibles con el punto de vista de la Electrodinámica clásica (§ 339). Por consiguiente, los procesos intraatómicos se rigen por otras leyes. El primer intento de descubrir estas leyes fue realizado por Bohr en el año 1912. Al hacerlo, Bohr renunció parcialmente a las leyes de la Física clásica. Posteriormente quedó completamente claro que los postulados de la Física clásica eran inaplicables a los procesos intraatómicos (§ 347) y que era necesario sustituirlos por los de la Mecánica cuántica (§ 361). Algunos filósofos y físicos burgueses hicieron de esto deducciones idealistas erróneas sobre la imposibilidad de dar una descripción objetiva general en el espacio y en el tiempo de los procesos intraatómicos. Pero en realidad solamente se trataba de ensanchar nuestros conocimientos, de descubrir nuevas leyes objetivas que eran desconocidas por

la Física clásica. La teoría inicial de Bohr tuvo una aplicación limitada debido a que solamente descubría de manera parcial las leyes verdaderas de los procesos intraatómicos. Con esta teoría pudieron explicarse únicamente las propiedades de los sistemas atómicos más simples, principalmente las del átomo de hidrógeno y las de los iones semejantes a él. Desde el punto de vista del modelo nuclear el átomo de hidrógeno consta de un núcleo, cuya carga $E = +e$, y de un electrón, de carga $-e$, que gira alrededor de aquél. Bohr supuso que de todos los movimientos mecánicamente posibles, del electrón alrededor del núcleo, *únicamente podían ser estacionarios aquellos en que el momento de la cantidad de movimiento p es igual a un múltiplo entero de la magnitud* $\hbar = h/2\pi$, *siendo h la constante de Planck*:

$$p = n\hbar. \qquad (1)$$

El número entero n, que puede tomar los valores 1, 2, 3, . . ., se llama *número cuántico*. Se dice que una energía está «cuantificada» cuando puede tener solamente una serie discontinua (discreta) de valores.

Cuando el electrón se encuentra en uno de los estados estacionarios de su movimiento, a pesar de las leyes de la Electrodinámica clásica, no emite radiación. La emisión de luz se produce exclusivamente cuando pasa de un estado estacionario (que tiene un valor de la energía W_k mayor) a otro estado estacionario (el valor de cuya energía W_i es menor); en este caso, de acuerdo con la fórmula (2) del § 341, el electrón emite luz monocromática de frecuencia

$$\nu_{ik} = \frac{W_k}{h} - \frac{W_i}{h}. \qquad (2)$$

Esta hipótesis se justifica con el hecho de que los valores numéricos de las frecuencias ν_{ik} a que conduce coinciden exactamente con los obtenidos experimentalmente, con la particularidad de que esta coincidencia no sólo se obtiene con el átomo de hidrógeno, sino también con todos los iones semejantes a él, es decir, con aquellos iones que han perdido todos los electrones menos uno.

Para poder estudiar al mismo tiempo el átomo de hidrógeno y los iones antedichos, supongamos que existe un sistema atómico consistente en un núcleo de carga $E = Ze$ y de un solo electrón. Para el hidrógeno $Z = 1$, para el helio ionizado una vez (He^+) $Z = 2$, para el litio doblemente ionizado (Li^{++}) $Z = 3$ y así sucesivamente. La masa del núcleo la consideraremos inicialmente como infinitamente grande en comparación con la masa m del electrón.

La fuerza de interación entre el núcleo y el electrón será la fuerza de Coulomb:

$$f = -\frac{Ze^2}{r^2},$$

donde r es la distancia que hay entre el núcleo y el electrón. Bajo la acción de esta fuerza el electrón describe alrededor del núcleo órbitas en forma de elipses de Kepler y, como un caso particular, en forma de circunferencia. Detengámonos primeramente en las órbitas circulares.

La energía potencial del electrón en el campo coulombiano del núcleo es igual a

$$W_p = -\frac{Ze^2}{r}.$$

La energía cinética

$$W_c = \frac{mv^2}{2}.$$

La energía total

$$W = W_p + W_c$$

será igual a

$$W = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{mv^2}{2}. \tag{3}$$

La fuerza de Coulomb $f = -\frac{Ze}{r^2}$ es una fuerza centrípeta numéricamente igual, cuando se trata de una órbita circular, a $\frac{mv}{r}$, de donde tenemos que

$$\frac{Ze^2}{r} = mv^2. \tag{4}$$

Aprovechando esta correlación podemos escribir la expresión de la energía total (3) de la forma:

$$W = -\frac{Ze^2}{2r}. \tag{5}$$

La condición cuántica de Bohr (1) da la posibilidad de calcular los radios de las órbitas estacionarias. Para una órbita circular el momento de la cantidad de movimiento del electrón es

$$p = mvr. \tag{6}$$

Por las correlaciones (4) y (6) hallamos que el radio de la órbita circular

$$r = \frac{p^2}{me^2Z}.$$

Poniendo aquí en lugar de p su valor según (1), hallamos:

$$r = n^2 \frac{\hbar^2}{me^2} \frac{1}{Z}. \tag{7}$$

La magnitud

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

representa el radio de la primera órbita circular del electrón (radio de Bohr), es decir, de la más próxima al núcleo del átomo de hidrógeno. Poniendo en lugar de $\hbar$, m y e sus respectivos valores, hallamos: $a_0 = 0{,}529 \cdot 10^{-8}$ cm. De aquí puede verse que las dimensiones del átomo de hidrógeno halladas basándose en la hipótesis de Bohr están de acuerdo con las dimensiones determinadas por la teoría cinética de los gases. Los radios de las demás órbitas del electrón en el átomo de hidrógeno y en los iones semejantes a él pueden expresarse por medio de a_0:

$$r = n^2 \frac{a_0}{Z}. \tag{7a}$$

Para la energía total W, basándonos en las correlaciones (5) y (7), tenemos:

$$W = -\frac{me^4Z^2}{2\hbar^2n^2}. \tag{8}$$

Introduciendo la constante

$$\mathrm{R} = \frac{me^4}{4\pi\hbar^3c}, \tag{9}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, tenemos que la energía total W toma la forma

$$W = -\frac{\mathrm{R}hcZ^2}{n^2}. \tag{8a}$$

Comparando la expresión (8a) con la fórmula (3) del § 341, que establece la relación entre los términos espectrales y las energías de los estados estacionarios, hallamos que

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{R}cZ^2}{n^2}$$

o, midiendo el término en números de ondas y llamándole ν, obtenemos:

$$\nu = \frac{\mathrm{R}Z^2}{n^2}. \tag{10a}$$

Cuando $Z = 1$ esta expresión coincide exactamente con el valor empírico obtenido para los términos del hidrógeno [véase la fórmula (3) del § 340]. La magnitud R coincide a su vez con la constante de Rydberg. Su valor numérico, determinado poniendo en la igualdad (9) los valores de la carga y de la masa del electrón, de la constante de Planck y de la velocidad de la luz, concuerda bien con el empírico.

En el caso general, un sistema atómico formado por el núcleo y un electrón, al pasar de un estado estacionario caracterizado por

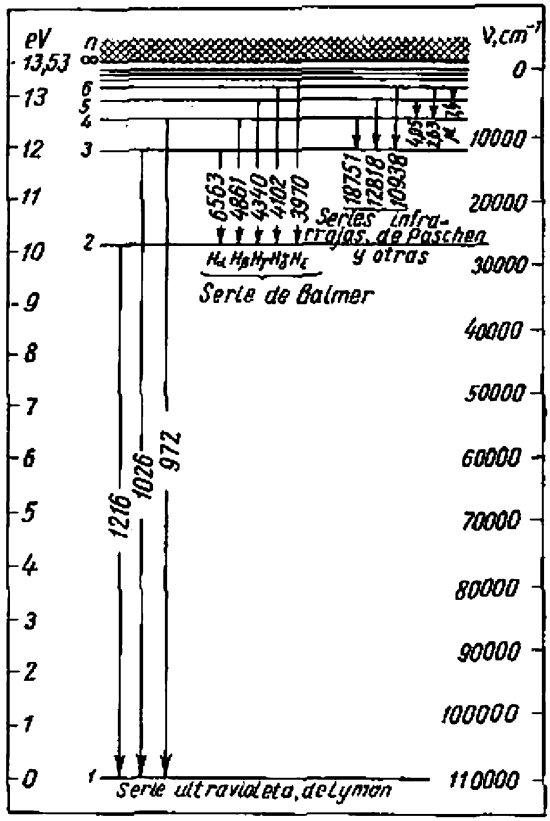

Fig. 320. Esquema de los niveles del hidrógeno.

un número cuántico n_k mayor a otro estado estacionario caracterizado por un número cuántico n_i menor, emite, según la regla de las frecuencias de Bohr, rayas de frecuencia

$$\nu_{ik} = \frac{W_k}{h} - \frac{W_i}{h} = \frac{me^4Z^2}{4\pi\hbar^3}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2}\right)$$

o, pasando a números de ondas:

$$\nu = RZ^2\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2}\right). \qquad (11)$$

Cuando $Z = 1$ y $n_i = 2$ esta fórmula coincide exactamonte con la fórmula de Balmer para el hidrógeno. De esta forma, la serie de Balmer es emitida cuando el átomo de hidrógeno pasa de los estados estacionarios altos al segundo (fig. 320). Cuando este

paso se realiza entre los estados estacionarios altos y el primero (normal), el átomo emite la serie de rayas

$$\nu = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Esta serie de rayas del hidrógeno, situada en la región ultravioleta remota, fue descubierta experimentalmente por Lyman después de haber sido predicha teóricamente por Bohr. La primera raya de esta serie se encuentra donde el valor de $\lambda = 1\,216$ Å.

Cuando la transición es al tercer estado estacionario, la serie emitida (que se encuentra en la región infrarroja del espectro) es:

$$\nu = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 4, 5, 6, \ldots,$$

y cuando dicha transición es al cuarto o al quinto estado estacionario son emitidas respectivamente las series infrarrojas remota y extrema:

$$\nu = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad \nu = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Los datos proporcionados por la observación de estas rayas se dan en la tabla XVI.

Tabla XVI

n	$R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$	$R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$	$R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right)$
4	18 751 Å	—	—
5	12 818,3 Å	4,052 μ	—
6	10 938,2 Å	2,63 μ	7,463 μ

De esta forma la fórmula generalizada de Balmer (11) abarca totalmente el espectro del hidrógeno atómico cuando $Z = 1$. Esta misma fórmula, cuando $Z = 2$, nos da el espectro del helio ionizado. En espectroscopia se suele designar con el número romano I el átomo neutro, con el número II el ion positivo ionizado una vez, con el doblemente ionizado, etc. Introduciendo estas designaciones obtenemos que la serie He II tendrá la forma:

$$\nu = 4R\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2}\right).$$

Cuando $n_i = 1$ y $n_k = n = 2, 3, 4, \ldots$ se obtiene la serie de rayas que se encuentra en la región ultravioleta extrema del espec-

tro:

$$\nu = 4R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Las longitudes de onda de las dos primeras rayas de esta serie son respectivamente $\lambda = 303{,}78$ y $\lambda = 256{,}55$ Å. Cuando $n_i = 2$ y $n_k = n = 3, 4, \ldots$ se obtiene la serie

$$\nu = 4R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

que también puede escribirse de la forma:

$$\nu = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\right),$$

de donde se deduce que cuando n es par se obtienen rayas que coinciden con las de la serie ultravioleta del hidrógeno y cuando $n = 3, 5, 7, \ldots$ se obtienen rayas que se encuentran entre las correspondientes del hidrógeno con longitudes de onda $\lambda = 1\,640{,}51$ Å, $\lambda = 1\,084{,}99$ Å, etc. Lo mismo ocurre con la serie

$$\nu = 4R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right) = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\right),$$

cuyas rayas coinciden alternativamente con las de la serie de Balmer del hidrógeno. Esta serie fue observada en los espectros de algunas estrellas y nebulosas antes de que Bohr diera a conocer su teoría; erróneamente se atribuía al hidrógeno. Posteriormente se obtuvo en los laboratorios durante la emisión de helio puro, con la particularidad de que las mediciones llevadas a cabo pusieron de manifiesto que las rayas del helio no coinciden exactamente con las del hidrógeno, cosa que puede apreciarse en la tabla XVII.

Tabla XVII

He II	6 560,13	5 411,55	4 859,34	4 541,61	4 338,69	4 199,85	4 100,00
H I	6 562,81	—	4 861,33	—	4 340,47	—	4 101,74

Esto mismo puede decirse de la serie $\nu = 4R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, cuya segunda raya tiene una longitud de onda $\lambda = 1\,215{,}180$ Å, mientras que la longitud de onda de la serie ultravioleta del hidrógeno $\lambda = 1\,215{,}683$ Å.

Si el valor numérico de la constante de Rydberg R se determina por los valores empíricos de las longitudes de onda de la serie de Balmer del hidrógeno y por las rayas del helio ionizado, se obtienen

dos valores algo distintos:

$$R_H = 109\,677{,}6\ cm^{-1} \quad y \quad R_{He} = 109\,722{,}3\ cm^{-1};$$

la relación entre ellos

$$\frac{R_H}{R_{He}} = 0{,}999593.$$

Esta relación se explica directamente por la teoría de Bohr. Efectivamente, en el cálculo de la energía expuesto anteriormente el núcleo se considera inmóvil, cosa que puede ser justa solamente en el caso en que su masa sea infinitamente grande con respecto a la masa del electrón que gira a su alrededor. En el caso contrario hay que tener en cuenta además el movimiento del núcleo alrededor del centro de gravedad común del núcleo y el electrón. El cálculo correspondiente demuestra que el movimiento del núcleo influye en el valor de la energía, y, por consiguiente, en el valor de la constante de Rydberg, para la que en este caso se obtiene la expresión

$$R = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{M}}, \qquad (12)$$

donde M es la masa del núcleo, m la masa del electrón y R_∞ el valor de la constante de Rydberg calculado suponiendo que el núcleo está inmóvil, es decir, de acuerdo con la fórmula (9). Aplicando estas correlaciones tenemos:

$$\frac{R_H}{R_{He}} = \frac{1 + \frac{m}{M_{He}}}{1 + \frac{m}{M_H}} = \frac{1 + \frac{1}{4 \cdot 1\,836}}{1 + \frac{1}{1\,836}} = 0{,}999596$$

lo que está en completo acuerdo con los experimentos.

Un desplazamiento análogo se observa en las rayas del isótopo del hidrógeno de peso atómico 2 (deuterio o hidrógeno pesado) con relación a las rayas del hidrógeno ordinario. En los primeros renglones de la tabla XVIII se incluyen las longitudes de onda de

Tabla XVIII

Designaciones	α	β	γ	δ
H^1	6 562,846	4 861,322	4 340,458	4 101,731
D^2	6 561,003	4 859,992	4 339,277	4 100,621
$\Delta\lambda_{obs}$	1,783	1,330	1,181	1,110
$\Delta\lambda_{calc}$	1,783	1,326	1,185	1,119

las cuatro primeras rayas de la serie de Balmer del hidrógeno ordinario (H^1) y de su isótopo pesado (deuterio, D^2); en el tercer renglón se dan las diferencias que hay entre ellas, y en el cuarto, estas mismas diferencias calculadas basándose en la correlación (12).

El hidrógeno pesado D^2 en condiciones naturales va mezclado con el hidrógeno ligero en una proporción aproximadamente igual a 1 : 5 000. Por esto, cuando se observa el espectro del hidrógeno natural las rayas del D^2 son demasiado débiles y únicamente se pueden descubrir cuando las exposiciones son largas. Para observar las rayas del D^2 se suele utilizar una mezcla de hidrógeno enriquecido artificialmente con su isótopo pesado por el método, por ejemplo, de la electrólisis del agua. Otro desplazamiento análogo se observa entre las rayas del deuterio (D^2) y del tritio (isótopo del hidrógeno con peso atómico 3, T^3).

La fórmula generalizada de Balmer (11) abarca también los espectros del Li III y del Be IV cuando $Z = 3, 4, \ldots$ Las rayas de estos espectros están desplazadas en la región ultravioleta remota del espectro. La frecuencia de las rayas de la serie principal del Li III, Be IV, B V, C VI, etc., viene expresada por la fórmula:

$$\nu = RZ^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right). \qquad (13)$$

La serie H I, He II, Li III, Be IV, B V y C VI se llama *isoelectrónica*, porque el número de electrones que giran alrededor del núcleo es el mismo para todos sus miembros. La constante de Rydberg es algo distinta para estos iones, debido a que la masa de sus núcleos es diferente; para el Li III y el Be IV la constante toma los valores $R_{Li} = 109\,728{,}6$ y $R_{Be} = 109\,730{,}5$. Como puede verse la diferencia entre estos valores de R es muy pequeña y en adelante consideraremos que coincide con R_∞. En este caso la fórmula (13) da para la frecuencia de las primeras rayas de la serie isoelectrónica el valor

$$\nu = RZ^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}RZ^2,$$

de donde obtenemos la correlación:

$$\sqrt{\frac{\nu}{R}} = \sqrt{\frac{3}{4}}Z. \qquad (14)$$

Una dependencia parecida se puede obtener al comparar entre sí otras rayas semejantes de la serie isoelectrónica, es decir, las rayas que surgen al producirse la transición entre niveles caracterizados por dos valores determinados de los números cuánticos n_k y n_i. De estas dependencias se deduce que *las raíces cuadradas de las frecuencias de las rayas análogas de la serie isoelectrónica aumentan pro-*

porcionalmente al número de carga Z. En la fig. 321, se representa gráficamente la variación de $\sqrt{\nu/R}$ en función de Z; esta variación viene representada por una línea recta. Esta correlación se conoce con el nombre de *ley de Moseley.*

El modelo del átomo de hidrógeno da también la posibilidad de determinar los potenciales críticos. Por ejemplo, para excitar la primera raya de la serie ultravioleta

$$\nu = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right), \quad \lambda = 1\,216\ \text{Å},$$

hay que hacer pasar el electrón del átomo de hidrógeno a la órbita de $n = 2$, para lo cual hace falta, según la fórmula (5) del § 341, un potencial acelerador

$$V_1 = \frac{12\,340}{1\,216} = 10{,}15\text{V}.$$

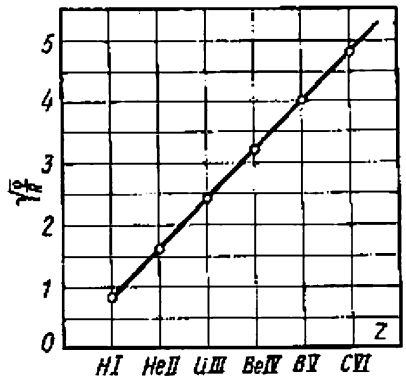

Fig. 321. Variación de la magnitud $\sqrt{\frac{\nu}{R}}$ en función del número de carga de los elementos de la serie isoelectrónica.

Para alejar el electrón desde su órbita normal, en el átomo de hidrógeno, hasta el infinito, es decir, para ionizar el átomo, hay que gastar un trabajo numéricamente igual a la energía de la órbita normal:

$$|W| = \frac{Rhc}{1^2} = 2{,}15 \cdot 10^{-11}\ \text{erg},$$

o expresándolo en electrón-voltios

$$|W| = 13{,}53\ \text{eV}.$$

El potencial correspondiente lleva el nombre de *potencial de ionización.* Como los términos son proporcionales a las energías, *el potencial de ionización se determina por el valor del término más profundo.* Los métodos que se utilizan para medir los potenciales de ionización fueron expuestos en el t. II, § 188.

La comprobación experimental de los potenciales críticos del hidrógeno tropieza con la dificultad de que el hidrógeno en condiciones normales es diatómico. Por lo tanto, hay que empezar por dividir la molécula en átomos y después excitarlos para que produzcan luz. Este experimento se puede hacer con hidrógeno disociado por una temperatura muy elevada. Los potenciales de excitación e ionización del hidrógeno obtenidos de esta forma coinciden totalmente con los teóricos.

La ionización del átomo puede ocurrir no sólo a costa de choques de electrones, sino también a costa de la absorción de la luz. Las rayas de absorción del hidrógeno atómico son las de la serie ultravioleta $\nu = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$. Cuando el átomo absorbe luz correspondiente a una de estas rayas, pasa de su estado normal a uno excitado, el cual será tanto más alto cuanto mayor sea la frecuencia de la raya. Si la frecuencia ν_i de la luz absorbida es mayor que la frecuencia ν_∞, límite de la serie $\frac{R}{1^2}$, el electrón será expulsado del átomo y el exceso de energía servirá para comunicarle velocidad. Este proceso de expulsión del electrón del átomo por la luz *recibe el nombre de fotoionización*; *a este proceso le corresponde un espectro de absorción continuo*, que se encuentra fuera de los límites de la serie ν_∞. De acuerdo con esto, la franja cuadriculada de la fig. 320, situada sobre el nivel $n = \infty$, representa la región continua de posibles energías del electrón.

De manera análoga el potencial de ionización de los iones He II, Li III, Be IV, B V y C VI, es decir, el trabajo necesario para quitarles el último electrón (puesto que los demás se consideran eliminados) viene expresado por el valor del término más profundo RZ^2 de cada uno de ellos.

§ 343. **Orbitas elípticas.** En el caso general el electrón que se mueve en el *campo coulombiano* de un núcleo describe una órbita en forma de *elipse*. En este caso la condición de Bohr (1) del § 342 es insuficiente para poder determinar entre todas las elipses posibles mecánicamente aquellas que corresponden a los estados estacionarios del átomo.

Las condiciones que deben cumplir los estados estacionarios fueron formuladas en forma general por Sommerfeld y se reducen a lo siguiente: si un sistema mecánico de i grados de libertad se define por las coordenadas generalizadas q_i y por los correspondientes impulsos generalizados

$$p_i = \frac{dW_c}{dq_i},$$

siendo W_c la energía cinética del sistema y $\dot{q}_i$ la derivada de las coordenadas con respecto al tiempo, únicamente serán estacionarios los estados de este sistema que cumplan las condiciones:

$$\oint p_i\, dq_i = n_i h, \qquad (1)$$

donde h es la constante de Planck y n_i es un *número cuántico* entero. Estas condiciones se llaman *condiciones cuánticas*.

La integral de las condiciones cuánticas (1) se extiende a todo el ciclo de los valores correspondientes a la variable q_i.

Los cálculos realizados basándose en las condiciones (1) solamente dan resultados de acuerdo con los experimentos cuando se trata de sistemas atómicos muy simples. En casos más complejos las condiciones (1) no están justificadas y los cálculos deben hacerse basándose en la Mecánica cuántica moderna. No obstante nos detendremos a estudiar la aplicación de las condiciones cuánticas (1), ya que históricamente desempeñaron un gran papel en el desarrollo de nuestros conocimientos del átomo.

En el caso de una órbita circular las condiciones (1) se reducen a la condición única de Bohr. Efectivamente, cuando se da el radio y el plano de la órbita el movimiento circular es un movimiento con un sólo grado de libertad, con la particularidad de que en calidad de coordenada única se puede tomar la acimutal φ, que varía entre los límites $\varphi = 0$ y $\varphi = 2\pi$. El impulso generalizado p_φ correspondiente a esta coordenada es el momento de la cantidad de movimiento del electrón, que conserva constante su valor $p_\varphi = p = \text{const}$ de donde la condición (1) se reduce a la igualdad:

$$\int_0^{2\pi} p \cdot d\varphi = nh \quad \text{ó} \quad 2\pi p = nh,$$

de donde obtenemos

$$p = n\left(\frac{h}{2\pi}\right) = n\hbar.$$

En el caso de una órbita elíptica el núcleo se encuentra en uno de los focos de la elipse.

Una órbita elíptica plana representa un movimiento de dos grados de libertad. Para definir este movimiento podemos emplear las coordenadas polares r y φ. Por esto, según las condiciones (1), serán estacionarias aquellas elipses en que se cumplen las igualdades

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi\, d\varphi = n_\varphi h \quad \text{y} \quad \oint p_r\, dr = n_r h. \tag{2}$$

Los números enteros n_φ y n_r se llaman *números cuánticos acimutales y radiales*.

La primera de las integrales (2), teniendo en cuenta que el momento de la cantidad de movimiento es constante ($p_\varphi = p$), da el mismo resultado que en el caso de la órbita circular:

$$p = n_\varphi\left(\frac{h}{2\pi}\right) = n_\varphi\hbar. \tag{3}$$

La segunda integral debe extenderse a todo el ciclo de valores de r, es decir, desde r_{min}, en el perihelio, hasta $r_{máx}$, en el afelio y, en sentido contrario, otra vez hasta r_{min} de vuelta al perihelio. Los cálculos correspondientes demuestran que como resultado de la segunda condición cuántica se establece cierta limitación en la excentricidad de la elipse ε, la cual debe cumplir la igualdad

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{n_r + n_\varphi}{n_\varphi}. \tag{4}$$

En definitiva, las condiciones cuánticas de Sommerfeld conducen a que serán estacionarias aquellas órbitas elípticas en que se cumplan las igualdades (3) y (4).

La suma de los números cuánticos radial y acimutal $n_r + n_\varphi$ suele llamarse *número cuántico principal* y designarse por medio de n, por lo tanto,

$$n_r + n_\varphi = n. \tag{5}$$

Teniendo esto en cuenta, la condición (4) toma la forma

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{n_\varphi^2}{n^2}. \tag{4a}$$

El cálculo correspondiente da la siguiente expresión para el semieje mayor a de las órbitas elípticas propias de los movimientos estacionarios del electrón:

$$a = n^2 \frac{\hbar^2}{me^2 Z}, \tag{6}$$

donde n es el número cuántico principal. Comparando esta expresión con la (7) del § 342, vemos: que los semiejes mayores de las elipses coinciden con los radios de las órbitas circulares correspondientes. En lugar del número cuántico único del movimiento circular ahora tenemos n, que es la suma de los números cuánticos acimutal y radial (número cuántico principal). El semieje menor b depende de ambos números cuánticos por separado. Efectivamente, teniendo en cuenta que

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2},$$

y poniendo en lugar de $1 - \varepsilon^2$ su valor según (4a), hallamos que

$$b = n_\varphi n \frac{\hbar^2}{me^2 Z}, \quad \frac{b}{a} = \frac{n_\varphi}{n}. \tag{7}$$

La expresión de la energía cuando el movimiento se realiza siguiendo las órbitas elípticas estacionarias resulta ser

$$W = -\frac{me^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2}. \tag{8}$$

De aquí vemos que W viene dada por la misma fórmula que la energía correspondiente al movimiento por órbitas circulares estacionarias, con la única diferencia de que en lugar del antiguo número cuántico figura ahora el número cuántico principal. De esta forma el hecho de que las órbitas sean excéntricas no varía el valor de la energía de los estados estacionarios, con lo cual siguen vigentes todas las conclusiones que sacamos al estudiar las órbitas circulares simples, referentes al espectro del hidrógeno y al de los iones semejantes a él. Pero cada valor posible de la energía W no corresponde a una sola órbita, sino a varias, que responden a diferentes momentos de la cantidad de movimiento del electrón, puesto que para cada número cuántico principal dado n el número cuántico acimutal puede tomar varios valores. Este género de estados se llama degenerado. Al valor del número cuántico acimutal $n_\varphi = 0$ le corresponde una línea recta que pasa por el núcleo; considerando que no es posible que el electrón tenga este movimiento, llegamos a la conclusión de que n_φ toma los valores de los números enteros comenzando por la unidad; entonces, de acuerdo con la igualdad $n = n_\varphi + n_r$, tenemos que para un número cuántico principal dado n los números cuánticos acimutal y radial serán:

$$n_\varphi = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ n_r = (n-1),\ (n-2),\ \ldots,\ 0. \qquad (9)$$

De aquí se deduce que *para cada número cuántico principal n dado pueden existir n órbitas geométricas distintas*; todas estas órbitas tendrán una misma energía W y un mismo semieje mayor a; de acuerdo con la igualdad (4) tendrán diferentes las excentricidades ε y, por consiguiente, los semiejes menores b.

A los valores $n_r = 0$; $n_\varphi = n$ les corresponde una órbita circular; a $n_r = n - 1$; $n_\varphi = 1$, la órbita elíptica más alargada.

En la fig. 322 se representan las órbitas correspondientes a $n = 3$. En este caso existen tres posibilidades:

a) $n_\varphi = 3$, $n_r = 0$, $a = b = \frac{9a_0}{Z}$ (circular);

b) $n_\varphi = 2$, $n_r = 1$, $a = \frac{9a_0}{Z}$, $b = \frac{2}{3}a$ (elíptica con excentricidad $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$);

c) $n_\varphi = 1$, $n_r = 2$, $a = \frac{9a_0}{Z}$, $b = \frac{1}{3}a$ (elíptica con excentricidad $\varepsilon = \frac{\sqrt{8}}{3}$).

El electrón conserva la misma energía al moverse por las diferentes órbitas elípticas de igual número cuántico principal mientras no existen fuerzas perturbadoras. En cuanto aparece una fuerza perturbadora exterior cualquiera, por ejemplo, un campo eléctrico

externo, las órbitas elípticas correspondientes a una misma energía, pero que tienen diferentes formas geométricas, experimentarán excitaciones distintas, lo cual deberá influir en el espectro de una manera determinada. Lo mismo ocurre en el caso en que la fuerza perturbadora es de origen intraatómico. Este tipo de fuerza existe en aquellos átomos en que alrededor del núcleo se mueve más de un

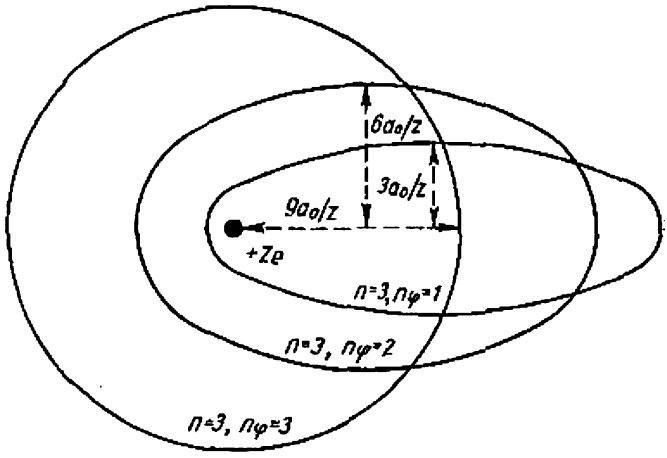

Fig. 322. Diferentes órbitas del electrón correspondientes al número cuántico principal $n = 3$.

electrón. En este caso las órbitas de distinta forma geométrica de cada electrón sufren perturbaciones diferentes causadas por los demás electrones. Como veremos más adelante, esta es la causa de que los metales alcalinos presenten distintas series.

Sommerfeld demostró que en el caso del hidrógeno y de los iones semejantes a él tampoco se puede considerar que las energías coinciden exactamente cuando el electrón se mueve por elipses distintas que tienen el mismo número cuántico principal. Esto se debe a que la masa del electrón, de acuerdo con el principio de la relatividad, depende de la velocidad; si m_0 es la masa del electrón en reposo y m la masa del mismo electrón moviéndose con una velocidad v, por el principio de la relatividad (§ 300) tenemos que

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

donde $\beta = \frac{v}{c}$ y c es la velocidad de la luz. Cuanto más alargada sea la elipse, tanto más se acercará al núcleo en su perihelio y tanto mayor será la velocidad del electrón en este punto; por consiguiente, tanto mayor será la influencia de la corrección debida a la variación de la masa en función de la velocidad. Esta corrección produce cierta variación de la energía.

Sommerfeld intentó explicar por medio de estas variaciones de la energía la llamada estructura fina de las rayas del hidrógeno y del helio ionizado. Ese

caso que cuando la observación se lleva a cabo con instrumentos de gran poder separador se puede descubrir que las rayas de estos elementos constan de varias componentes muy próximas entre sí. No obstante esta explicación no corresponde totalmente a la realidad.

§ 344. Cuantificación espacial; momentos magnéticos de los átomos. Bajo la influencia del campo coulombiano del núcleo el electrón se mueve por una órbita elíptica plana. Pero pueden existir perturbaciones de la órbita debidas, por ejemplo, a un campo magnético exterior que haga que ésta deje de ser plana. En este caso

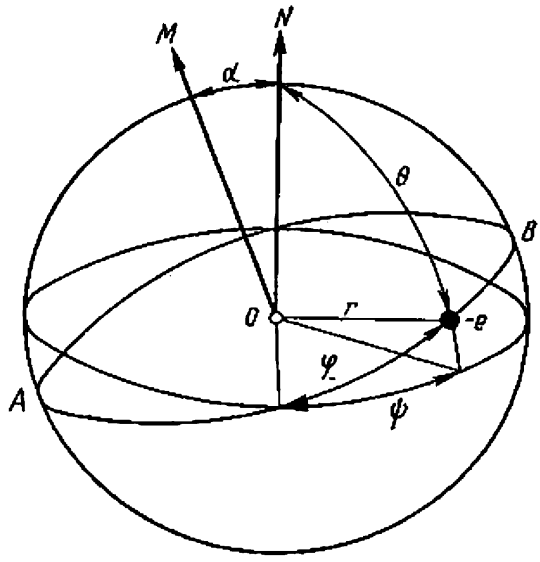

Fig. 323. Cuantificación espacial de las órbitas.

el movimiento del electrón tiene tres grados de libertad y sus órbitas estacionarias deben cumplir tres condiciones cuánticas (1) del § 343.

Estudiemos el caso más simple, en el que el campo magnético exterior es pequeño y, por lo tanto, también es pequeña la perturbación que produce en la órbita. En este caso la órbita sigue siendo la misma elipse de antes, pero se encuentra en un plano que forma un ángulo determinado con la *dirección preferente* externa, es decir, con la dirección del campo magnético exterior. Introduzcamos las coordenadas esféricas r, θ y ψ (fig. 323) y supongamos que ON es la dirección del campo magnético exterior y que OM es la normal a la órbita del electrón, que forma un ángulo α con ON. Introduzcamos además la coordenada acimutal φ tomada en el plano de la órbita. En estas condiciones, como quiera que examinamos un movimiento elíptico no perturbado, el momento de la cantidad de

movimiento p cumple la condición:

$$p = n_\varphi \hbar, \tag{1}$$

donde n_φ es el número cuántico acimutal al que nos referimos anteriormente. Por otra parte, en coordenadas esféricas deberán cumplirse las condiciones cuánticas siguientes:

$$\begin{aligned} \int p_r\, dr &= n_r h, \\ \int p_\theta\, d\theta &= n_\theta h, \\ \int p_\psi\, d\psi &= n_\psi h. \end{aligned} \tag{2}$$

Aquí p_ψ es el impulso generalizado correspondiente al acimut ψ tomado en el plano ecuatorial; es evidente que p_ψ representa la proyección del momento de la cantidad de movimiento p sobre la dirección ON del campo magnético exterior:

$$p_\psi = p \cos \alpha. \tag{3}$$

Como el momento de la cantidad de movimiento p es constante durante el movimiento, también será constante su proyección p_ψ sobre la dirección del campo magnético exterior, de donde la última de las condiciones cuánticas (2) da que

$$p_\psi = n_\psi \left(\frac{h}{2\pi}\right) = n_\psi \hbar. \tag{4}$$

Comparando las igualdades (1), (3) y (4), hallamos:

$$n_\psi = n_\varphi \cos \alpha.$$

Llamando m al número cuántico n_ψ (cosa generalmente admitida), obtenemos que

$$\cos \alpha = \frac{m}{n_\varphi}, \tag{5}$$

$$p_\psi = \frac{m}{n_\varphi} p. \tag{5a}$$

Como $|\cos \alpha| \leqslant 1$, cuando se da n_φ el número entero m puede tomar los valores siguientes:

$$m = n_\varphi \;\; n_\varphi - 1, \;\ldots,\; 0, \;\ldots,\; -n_\varphi. \tag{6}$$

De esta forma, cuando se da n_φ, el $\cos \alpha$ puede tomar $2n_\varphi + 1$ valores diferentes, correspondientes a los $2n_\varphi + 1$ valores diferentes de m, con lo cual el momento de la cantidad de movimiento p solamente podrá situarse de $2n_\varphi + 1$ maneras diferentes con respecto a la dirección preferente externa. En Mecánica cuántica se demuestra

que esta deducción que hemos obtenido para el caso de un campo exterior débil, en extinción, es también justa para el caso general de un campo de cualquier intensidad.

El vector momento de la cantidad de movimiento p puede adoptar únicamente aquellas posiciones que formen con la dirección preferente externa ángulos α con los cuales el valor numérico de su proyección $|p_\varphi|$ *sobre esta dirección sea un múltiplo de* $\hbar$, *es decir,*

$$p_\varphi = m\hbar, \tag{4a}$$

donde los valores posibles de m se determinan por la igualdad (6).

La fig. 324 corresponde a los casos en que $p = 1\hbar$, $2\hbar$, $3\hbar$. De acuerdo con lo expuesto, p puede situarse con respecto a la dirección

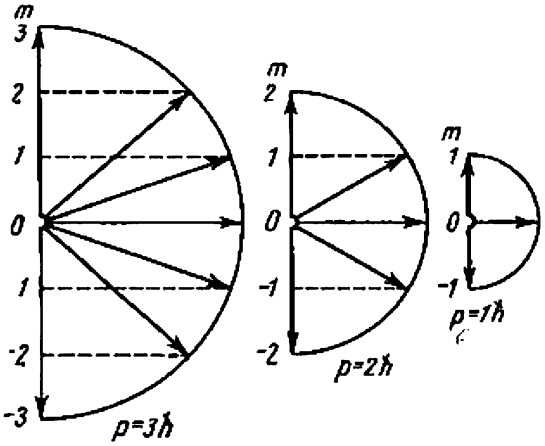

Fig. 324. Orientaciones posibles del momento p con respecto a la dirección preferente.

del campo magnético exterior: en el primer caso, de tres maneras diferentes; en el segundo, de cinco, y en el tercero, de siete. Sus proyecciones sobre la dirección del campo exterior tomarán respectivamente los valores de 0, $\pm\hbar$; 0, $\pm\hbar$, $\pm 2\hbar$ y 0, $\pm\hbar$, $\pm 2\hbar$, $\pm 3\hbar$.

Según la Electrodinámica clásica, el electrón en movimiento, a semejanza de la corriente, excita en el espacio que lo rodea un campo magnético igual al campo de un imán cuyo momento sea (t. II, § 201).

$$\mu = \frac{1}{c}\frac{e}{\tau}A,$$

donde A es la superficie comprendida dentro de la órbita del electrón y τ es el período de rotación.

Para la elipse

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\,d\varphi = \int_0^{\tau} \frac{p}{2m}\,dt = \frac{\tau}{2m}p,$$

de donde

$$\mu = \frac{e}{2mc} p; \tag{7}$$

como el momento magnético μ está dirigido a lo largo de la misma recta que el momento mecánico de la cantidad de movimiento $\mathbf{p}$, la igualdad (7) se puede escribir en forma vectorial:

$$\mu = \frac{1}{2c}\left(\frac{e}{m}\right)\cdot \mathbf{p}. \tag{7a}$$

Esta correlación entre el momento magnético y el mecánico del electrón, deducida para el caso en que éste se mueve por una órbita elíptica, tiene carácter general y se conserva en el caso de órbitas que no sean simples elipses.

Poniendo en (7) en lugar de su valor

$$p = n_\varphi \hbar,$$

obtenemos

$$\mu = n_\varphi \frac{\hbar}{2c}\frac{e}{m}. \tag{8}$$

De la igualdad (8) se deduce que el momento magnético del electrón cuando se mueve por sus órbitas estacionarias es múltiplo entero de una magnitud constante

$$\mu_0 = \frac{\hbar}{2c}\frac{e}{m} \tag{9}$$

que lleva el nombre de *magnetón de Bohr*. Poniendo en lugar de e, $\hbar$, c y m sus valores numéricos, hallamos:

$$\mu_0 = 0{,}918 \cdot 10^{-20} \text{ erg/Gs}.$$

Como quiera que el momento magnético del movimiento orbital del electrón es paralelo al momento mecánico, la regla de la cuantificación espacial se hace extensiva a él, es decir: el momento magnético μ solamente puede encontrarse en el campo magnético exterior formando determinados ángulos α con la dirección de dicho campo; la serie de valores de estos ángulos cumple la condición (5).

El hecho de la existencia de los momentos magnéticos en los átomos y el fenómeno de la cuantificación espacial fueron confirmados por los experimentos de Stern y Gerlach sobre la desviación que experimenta un haz atómico en un campo magnético exterior no homogéneo (t. II, § 201). Al atravesar el campo magnético no homogéneo el haz atómico se desvía cierta magnitud, la cual depende del momento magnético de los átomos μ y del ángulo α que forma μ con la dirección del vector inducción magnética $\mathbf{H}$. Si el ángulo α puede tomar varios valores diferentes, el haz se divide en el mismo

número de componentes. De esta forma, por el número de componentes en que se divide el haz se pueden determinar los valores posibles del ángulo α y por la magnitud de la desviación, la magnitud del momento magnético μ. Los experimentos de Stern y Gerlach confirmaron que el ángulo α toma una serie discreta de valores distintos, lo que está de acuerdo con las predicciones de la teoría. La magnitud del momento magnético de los átomos también resultó ser del orden del magnetón de Bohr. No obstante, en una serie de casos se obtuvieron discrepancias entre la teoría y los datos experimentales.

Un átomo caracterizado por un valor dado del número cuántico acimutal n_φ puede tener, según (6), $2n_\varphi + 1$ orientaciones diferentes con respecto al campo magnético exterior y, por consiguiente, un haz formado por átomos de este tipo debería dividirse en $2n_\varphi + 1$ componentes. Y como n_φ es un número entero, el haz debería dividirse en un número *impar* de componentes, independientemente del valor que tenga n_φ; entre estas componentes debería haber siempre una que correspondiera a los átomos no desviados ($m = 0$). Pero la realidad es que en toda una serie de casos el haz se divide en un número par de componentes, con la particularidad de que la componente media, sin desviar, no existe. Por ejemplo, el haz de átomos de plata se divide en dos haces; la distancia entre estos dos haces corresponde al valor del momento magnético μ de los átomos de plata, que es igual a un magnetón de Bohr μ_0. En otros casos los momentos magnéticos de los átomos resultan ser iguales a múltiplos o divisores del magnetón de Bohr μ_0. Estos resultados de los experimentos no pueden explicarse basándose en la hipótesis de que el momento magnético del átomo está determinado exclusivamente por el movimiento orbital de los electrones. Como veremos más adelante (§ 347), hay que admitir que cada electrón tiene además un momento magnético propio.

§ 345. Influencia de los campos magnéticos y eléctricos externos sobre el espectro. La existencia de los momentos magnéticos en los átomos y del fenómeno de la cuantificación espacial también se ve confirmada por la influencia que ejerce sobre el espectro un campo magnético externo. El campo magnético externo perturba las órbitas electrónicas en el átomo y da lugar a que cada estado estacionario de energía W adquiera una energía complementaria ΔW. Esta energía complementaria, como veremos más adelante, da lugar al desdoblamiento o multiplicación de las rayas espectrales en varias componentes.

Según expusimos en el § 344, el átomo que se caracteriza por un número cuántico n_φ tiene un momento magnético

$$\mu = n_\varphi \mu_0, \qquad (1)$$

donde $\mu_0 = \frac{h}{2c}\frac{e}{m}$ es el magnetón de Bohr. Cuando existe un campo magnético externo de intensidad **H** el vector momento magnético del átomo μ se orienta con respecto a **H** formando un ángulo α que cumple la condición siguiente:

$$\cos\alpha = \frac{n}{n_\varphi}, \text{ donde } m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n_\varphi. \qquad (2)$$

El número cuántico m se llama generalmente *número cuántico magnético*.

Un sistema cuyo momento magnético sea μ tendrá en el campo magnético externo **H** una energía (t II, § 201)

$$\Delta W = -\mu H \cos\alpha. \qquad (3)$$

Poniendo aquí en lugar de μ y cos α sus valores según (1) y (2) y suponiendo, como suele hacerse, que μ_0 es el valor *numérico* del magnetón de Bohr, obtenemos:

$$\Delta W = -m\mu_0 H. \qquad (3a)$$

Y como m puede tomar para un valor dado de n_φ los valores 0, ± 1, ± 2, . . ., $\pm n_\varphi$, de la fórmula (3a) se deduce que cada nivel inicial simple se desdobla bajo la influencia del campo magnético en $2n_\varphi + 1$ subniveles, los cuales se encuentran entre sí a una misma distancia $\Delta W_0 = \mu_0 H$. Cada uno de estos subniveles responde a una de las distintas orientaciones posibles de la órbita del electrón con respecto al campo magnético externo. Este desdoblamiento de los niveles hace que cada raya espectral se multiplique a su vez en varias componentes muy próximas entre sí. Efectivamente, supongamos que una raya cualquiera cuya frecuencia inicial sea ν_0 surge como resultado de la transición del átomo desde un estado de energía W_2 a otro estado de energía W_1, entonces

$$\nu_0 = \frac{W_2}{h} - \frac{W_1}{h}. \qquad (4)$$

Si existe un campo magnético externo cada una de estas energías W adquiere el valor complementario ΔW expresado por la fórmula (3a). Como resultado, en lugar de la frecuencia ν_0 será radiada la frecuencia $\nu_0 + \Delta\nu$, definida por la igualdad:

$$\nu_0 + \Delta\nu = \frac{W_2 + \Delta W_2}{h} - \frac{W_1 + \Delta W_1}{h}.$$

Comparando esta fórmula con la (4), hallamos:

$$\Delta\nu = \frac{\Delta W_2}{h} - \frac{\Delta W_1}{h}$$

o, poniendo en lugar de ΔW_1 y ΔW_2 sus valores según (3a):

$$\Delta\nu = (m_2 - m_1)\frac{\mu_0}{h}H.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\mu_0}{h} = \frac{1}{4\pi c}\frac{e}{m}$, podemos escribir la última fórmula de la forma:

$$\Delta\nu = \Delta m \frac{1}{4\pi c}\frac{e}{m}H, \tag{5}$$

donde Δm es la diferencia entre los números cuánticos magnéticos $m_2 - m_1$, y e es el valor numérico de la carga del electrón. Cada uno de los números cuánticos magnéticos m_1 y m_2 puede tener respectivamente los valores $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n_{\varphi 1}$ y $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, n_{\varphi 2}$ donde $n_{\varphi 1}$ y $n_{\varphi 2}$ son los números cuánticos acimutales que caracterizan a ambos estados estacionarios sin perturbar. Por esto Δm puede tomar una serie de valores diferentes. En la Mecánica cuántica se demuestra que de todos los valores formalmente posibles de la diferencia Δm solamente se realizan unos pocos: las transiciones entre los subniveles se rigen por una regla de selección según la cual m puede únicamente variar en ± 1 o permanecer invariable:

$$\Delta m = 0, \pm 1. \tag{6}$$

La regla de selección (6) conduce a que cuando una fuente luminosa se coloca en un campo magnético *las rayas espectrales se desdoblan en tres componentes;* de las cuales la de en medio ($\Delta m = 0$) permanece invariable y las dos de los extremos ($\Delta m = \pm 1$) son desplazadas según la fórmula (5) una magnitud

$$\Delta\nu = \pm \frac{1}{4\pi c}\frac{e}{m}H, \tag{5a}$$

o en la escala de longitudes de onda

$$\Delta\lambda = \pm \frac{1}{4\pi c^2}\frac{e}{m}\lambda^2 H. \tag{5b}$$

El desplazamiento de las rayas es proporcional a la intensidad del campo magnético H.
El factor

$$\frac{1}{4\pi c^2}\frac{e}{m} = 4{,}674 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}^{-1}\cdot\text{Gs}^{-1},$$

de donde se deduce que el desdoblamiento de las rayas espectrales es insignificante en los campos magnéticos prácticamente alcanzables. Para una raya de longitud de onda $\lambda = 5\,000$ Å sometida a un campo magnético $H = 20\,000$ Gs la separación de las componentes es aproximadamente igual a $\pm 0{,}23$ Å.

Las componentes en que se divide una raya espectral en presencia de un campo magnético están polarizadas. La teoría demuestra y la práctica confirma que cuando $\Delta m = 0$ la raya emitida está polarizada rectilíneamente, con las vibraciones del vector campo eléctrico a lo largo de la dirección del campo (la llamada componente π). Cuando $\Delta m = \pm 1$ las rayas emitidas están polarizadas circularmente, con las vibraciones del vector campo eléctrico en un plano perpendicular a **H** (componentes σ). Si la luz de la fuente se propaga en la dirección de las líneas de fuerza del campo magnético H la componente de frecuencia $\nu + \Delta\nu$ ($\Delta m = +1$) estará polarizada en el sentido de las agujas del reloj y la componente $\nu - \Delta\nu$ ($\Delta m = -1$) lo estará en el sentido contrario.* La componente de en medio, que no se desvía, desaparece cuando se mira a lo largo del campo, debido a que las ondas luminosas son transversales. En la fig. 325, que se refiere al caso particular en que $n_{\varphi 1} = 1$ y $n_{\varphi 2} = 2$, en la parte superior se muestra la formación de las componentes π y σ; cada una de estas componentes aparece en tres transiciones diferentes. En la parte inferior de la figura puede verse la raya espectral fuera del campo ($H = 0$) y su desdoblamiento cuando se mira a lo largo del campo (a) y transversalmente (b).

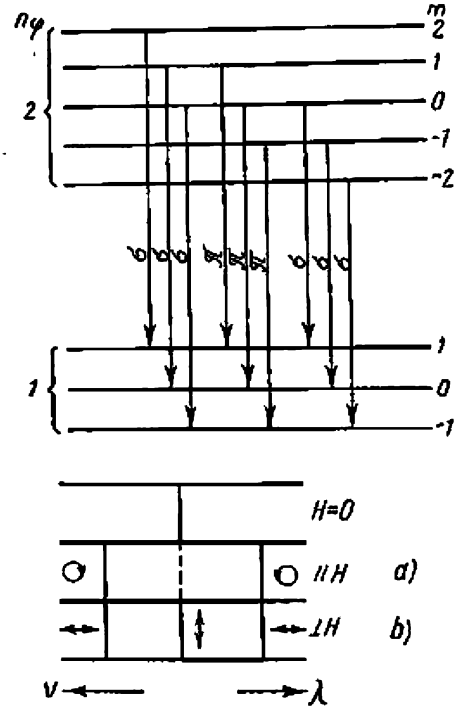

Fig. 325. Desdoblamiento de una raya espacial en presencia de un campo magnético.

El fenómeno del desboblamiento o multiplicación de las rayas espectrales en presencia de un campo magnético fue descubierto por Zeeman en el año 1895, antes de que apareciera la teoría cuántica de la estructura atómica, y recibió el nombre de *fenómeno o efecto Zeeman*. Un esquema para observar el fenómeno de Zeeman puede verse en la fig. 326, donde J es una fuente de luz situada entre los

*) Con la condición de que las vibraciones se observan en la dirección que siguen las líneas de fuerza del campo magnético. En otras palabras, en la componente $\nu + \Delta\nu$ las vibraciones circulares del vector campo eléctrico tienen lugar en la dirección del movimiento que sigue la cabeza del sacacorchos cuando su movimiento de avance coincide con la dirección del vector **H**.

polos de un electroimán y S_p es la ranura de un espectrógrafo; este último debe tener suficiente poder separador para que las componentes puedan verse separadas. Cuando se mira en dirección perpendicular a las líneas de fuerza del campo magnético H (como se ve en la fig. 326) las vibraciones circulares se proyectan en forma rectilínea, de manera que las rayas espectrales se desdoblan en tres componentes polarizadas rectilíneamente: la de en medio con las vibraciones del vector campo eléctrico a lo largo del campo H, y las de los extremos con las vibraciones perpendiculares a H (fig. 325, *b*). Cuando se observa la radiación que se propaga a lo largo de las líneas de fuerza del campo magnético H (dirección *Ja* en la fig. 326; para hacer posible la observación en esta dirección hay que taladrar el núcleo del electroimán) la componente de en medio desaparece, como ya dijimos, y las dos restantes están polarizadas circularmente: la desplazada hacia el lado violeta del espectro, en el sentido de las agujas del reloj, y la desplazada hacia el rojo, en sentido contrario.

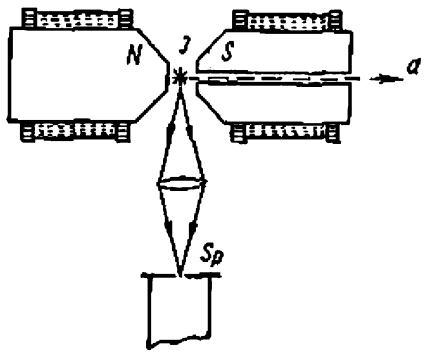

Fig. 326. Esquema para observar el efecto Zeeman.

Para el hidrógeno y los iones semejantes a él (si no se presta atención a las estructuras finas de sus rayas, § 348) la experiencia está de acuerdo con la teoría. Las rayas se desdoblan efectivamente en tres componentes polarizadas como se ha dicho antes; las distancias entre las rayas corresponden al momento magnético del átomo, determinado por la fórmula (1). Pero cuando se trata de otros elementos son muy pocos los casos en que las rayas espectrales se desdoblan en tres componentes situadas entre sí a la distancia prevista por (5a). En la mayoría de los casos las rayas se desdoblan en un número de componentes mayor y se encuentran a otras distancias entre sí. Este desdoblamiento se llama efecto de Zeeman «anómalo». La causa de este fenómeno será estudiada más adelante (§ 348).

El desdoblamiento de las rayas espectrales en presencia de un campo eléctrico externo fue descubierto en el año 1913 por Stark y se llama *efecto Stark*. La observación de este efecto presenta considerables dificultades experimentales, puesto que el vapor o el gas luminoso que se estudia tiene una conductividad eléctrica suficientemente grande y, por lo tanto, es difícil conseguir un campo eléctrico de gran intensidad E. Para salvar esta dificultad se suele observar la luz de un haz dirigido de átomos luminosos («rayos canales»). Para esto, en el cátodo K (fig. 327) se taladra una serie de canales estrechos a. Los iones positivos que se originan en el espacio com-

prendido entre el cátodo K y el ánodo A se aceleran en dirección al cátodo y parcialmente pasan a través de los orificios a. De la parte del tubo que se encuentra detrás del cátodo se extrae constantemente el gas por medio de una bomba, con lo que se consigue que el recorrido libre de las partículas que pasan por los canales a sea suficientemente grande y que se muevan rectilíneamente, formando un «rayo canal». Los átomos excitados que integran este rayo, al pasar a su estado normal emiten luz. En el camino a recorrer por el rayo se crea un campo eléctrico por medio de la lámina b. La intensidad de este campo se consigue hacerla llegar hasta 100 000 V/cm.

El efecto Stark no pudo ser explicado hasta la aparición de la teoría cuántica. La teoría electrónica clásica lleva a la conclusión de que las rayas espectrales no deben desdoblarse en presencia de un

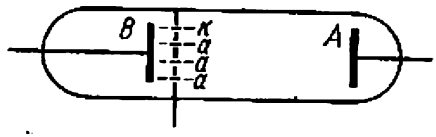

Fig. 327. Esquema para observar el efecto Stark.

campo eléctrico externo, sino que únicamente deben experimentar un desplazamiento muy débil proporcional al cuadrado de la intensidad del campo eléctrico E^2.

Desde el punto de vista de la teoría de Bohr la órbita del electrón experimenta una perturbación cuando se halla bajo la influencia del campo eléctrico. Esta perturbación tiene un carácter tal, que en primera aproximación el semieje mayor de la órbita elíptica permanece invariable, pero el centro de gravedad de dicha órbita realiza vibraciones armónicas elípticas en un plano perpendicular a la dirección del campo. Como resultado, cuando se trata del hidrógeno y de los iones semejantes a él, se obtiene un desdoblamiento de las rayas, con la particularidad de que algunas componentes están desplazadas, con relación a la posición inicial de la raya, una magnitud

$$\Delta\nu = \frac{3h}{4\pi Zem} E\,(n_1 k_1 - n_2 k_2). \qquad (7)$$

donde n_1 y n_2 son los números cuánticos principales de los dos niveles entre los que la transición da lugar a que se genere la raya primitiva. Las magnitudes k_1 y k_2 toman los valores de los números enteros positivos y negativos que cumplen la condición: $|k| < n$. Las componentes están polarizadas lo mismo que en el caso del efecto Zeeman. La separación es proporcional a la primera potencia de la intensidad del campo E.

Como puede verse por la fórmula (7), el desdoblamiento depende de los valores de los números cuánticos principales n_1 y n_2: cuanto

mayor es el valor de los números cuánticos principales n tanto mayor es el número de componentes en que se desdobla la raya y tanto mayor la distancia entre estas componentes. En este sentido el efecto Stark se diferencia esencialmente del fenómeno de Zeeman, en el que el desdoblamiento no depende del valor del número cuántico principal. La fórmula (7) se cumple bastante fielmente por las rayas del hidrógeno y del helio ionizado.

El efecto Stark cuadrático ($\sim E^2$) consiste en un desplazamiento de las rayas que se observa en las de algunos elementos; este efecto es mucho menor que el desdoblamiento determinado por la fórmula (7). Por ejemplo, las rayas amarillas del sodio no ponen de manifiesto el desdoblamiento en componentes aisladas, pero experimentan un débil desplazamiento proporcional a E^2.

El desdoblamiento magnético de los niveles energéticos puede observarse no sólo en los átomos libres, sino también en los átomos o iones que entran en la composición de los cuerpos sólidos. Poco tiempo después del descubrimiento del fenómeno Zeeman Becquerel observó que las franjas muy estrechas que se producen cuando la luz es absorbida por los cristales de las tierras raras se desdoblan en varias componentes si el cristal se coloca en un campo magnético externo.

En el año 1936 Gorter y Kronig prestaron atención al hecho de que a las transiciones entre las componentes del desdoblamiento de Zeeman en los campos del orden de 10^4 Gs les corresponden frecuencias que se encuentran en la región de las ondas cortas de la radio. Efectivamente, si se toman dos subniveles contiguos de un desdoblamiento de Zeeman normal [fórmula (5)] el paso entre ellos, cuando la intensidad del campo magnético $H = 10^4$ Gs, dará lugar a la radiación de ondas de frecuencia

$$\nu = 4{,}674 \cdot 10^{-5} \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1} = 14\,000 \text{ MHz}$$

a la que corresponde una longitud de onda $\lambda = 2{,}1$ cm, es decir, que se encuentra en la región de las ondas electromagnéticas de centímetros. Cuando la intensidad del campo magnético H sea menor, la longitud de onda será mayor, pero la teoría demuestra que en estas condiciones la probabilidad del paso entre los subniveles será muy pequeña. De esta forma, cuando un cristal se coloca en un campo magnético cuya intensidad sea del orden de 10^4 Gs debe absorber las ondas cortas de la radio correspondientes a las transiciones entre los subniveles energéticos que se originan a costa del desdoblamiento Zeeman de los niveles. Este fenómeno fue observado experimentalmente por E. K. Zavoyski en el año 1945. Recibió el nombre de *resonancia paramagnética*, puesto que tiene carácter de absorción resonante de ondas electromagnéticas de frecuencias determinadas y se observa en aquellos cuerpos en cuya composición entran partículas de propiedades paramagnéticas. Estas partículas pueden ser iones de Mn^{++}, Fe^{++}, Co^{++}, tierras raras, una serie de otros elementos, electrones en la zona de conductividad, «huecos» y los átomos de las impurezas de los semiconductores. La anchura de las rayas de absorción puede servir para formarse una idea de los campos perturbadores que existen en el cristal. El método de la resonancia paramagnética se utiliza mucho actualmente para estudiar las propiedades de los cuerpos sólidos.

§ 346. Espectros de los metales alcalinos. La semejanza de algunas series de los espectros de los metales alcalinos con la serie de Balmer del hidrógeno hace suponer que los espectros de estos

metales son emitidos cuando el electrón más exterior (*electrón de valencia*) pasa de una órbita a otra. El electrón exterior se mueve en el campo del núcleo y de los demás electrones o, como suele decirse, en el campo de la *región central del átomo*. Cuando las distancias son grandes el campo de la región central del átomo se aproxima bastante al campo de una carga puntual. De aquí, como señaló por primera vez D. S. Rozhdiéstvenski, se deduce que las órbitas alejadas de los átomos alcalinos deben ser semejantes a las del hidrógeno; esta conclusión se ve confirmada en realidad por el hecho empírico de que los términos «lejanos» de los metales alcalinos coinciden casi exactamente con los términos análogos del hidrógeno.

Cuanto más se aproxime la órbita del electrón a la región central del átomo, tanto más deformada estará en comparación con la del hidrógeno. Pero si el campo de la región central del átomo tiene simetría esférica las órbitas seguirán siendo planas y deberán cumplir las dos condiciones cuánticas

$$\oint p_\varphi \, d\varphi = n_\varphi h, \quad \oint p_r \, dr = n_r h.$$

Comparando los términos de los metales alcalinos con los del hidrógeno, Rozhdiéstvenski estableció que *el número de órbitas en estos metales es igual al número de órbitas posibles en el hidrógeno*. Pero en los metales alcalinos las órbitas que tienen un mismo número cuántico principal n pero distintos números cuánticos acimutales n_φ, es decir, distinta forma geométrica, tienen distintos grados de perturbación y, por consiguiente, se diferencian considerablemente entre sí por la energía que les corresponde, mientras que en el hidrógeno (§ 343) todas las órbitas de igual n tienen la misma energía. Si la energía del átomo de hidrógeno correspondiente a los distintos movimentos estacionarios del electrón se expresa por la fórmula

$$W = -\frac{Rhc}{n^2},$$

donde el número cuántico principal $n = n_r + n_\varphi$, la energía del átomo de un metal alcalino viene expresada por la fórmula de Rydberg:

$$W = -\frac{Rhc}{(n+\alpha)^2} = -\frac{Rhc}{n^{*2}}, \qquad (1)$$

donde α es una corrección negativa que depende del número cuántico acimutal n_φ y $n^* = n + \alpha$ es el llamado *número cuántico efectivo*, que puede ser hallado directamente por el valor numérico de la energía, el cual se determina a su vez por el valor numérico del término.

La corrección α tiene un valor absoluto tanto mayor cuanto más se aproxima la órbita del electrón a la región central del átomo.

Para las órbitas muy perturbadas la corrección α puede tener un valor numérico mayor que la unidad y el número cuántico verdadero n puede diferenciarse mucho del número cuántico efectivo n *.

Por el esquema de los términos de los metales alcalinos establecido empíricamente (§ 340) se puede ver que existen varios términos caracterizados por un mismo número entero, por ejemplo, los términos 4S, 4P, 4D y 4F. Después de lo dicho está claro que estos términos responden a los estados electrónicos que tienen un mismo número cuántico principal pero distintos números cuánticos acimutales n_φ. Los estados de los electrones en el átomo, correspondientes a los términos nS, nP, nD y nF, se designan con estos mismos símbolos pero con letras latinas minúsculas ns, np, nd y nf. Partiendo de la comparación de los términos de los metales alcalinos con los del hidrógeno, D. S. Rozhdiéstvenski demostró que los estados ns corresponden a $n_\varphi = 1$; los estados np, a $n_\varphi = 2$; etc. De aquí obtenemos el esquema de los estados posibles en el metal alcalino y, al mismo tiempo, el de los términos posibles (tabla XIX).

Tabla XIX

n \ n_φ	1	2	3	4
1	1s	—	—	—
2	2s	2p	—	—
3	3s	3p	3d	—
4	4s	4p	4d	4f

Este esquema está sólidamente confirmado por el hecho de que, según la Mecánica cuántica, solamente son posibles aquellas transiciones entre los estados del átomo en que el número cuántico n_φ varía en ± 1:

$$\Delta n_\varphi = \pm 1. \qquad (2)$$

La *regla de selección* (2) explica directamente el hecho empírico de que los términos nS combinen solamente con los términos nP, los términos nP con los nS y nD, etc. Estas combinaciones corresponden a la variación del número cuántico acimutal en ± 1. Todas las demás combinaciones están «prohibidas», puesto que a ellas les corresponden variaciones de n_φ de magnitudes mayores que la unidad o su permanencia invariable.

En una serie de órbitas que tienen el mismo número cuántico principal, como, por ejemplo, 4s, 4p, 4d y 4f, la órbita 4f representa de por sí una circunferencia y la 4s la elipse más alargada. De acuerdo

con esto, la órbita 4s es la más perturbada y la 4f la menos perturbada por los electrones que entran en la región central del átomo. De aquí se deduce que en la serie de términos 4S, 4P, 4D y 4F del metal alcalino el número cuántico efectivo n^* se diferencia menos del valor $n = 4$ en el término 4F y más en el término 4S.

Lo expuesto nos permite precisar el esquema de los niveles de los metales alcalinos y equipararlos con los distintos estados estacionarios del átomo. A cada número cuántico principal n le corresponden

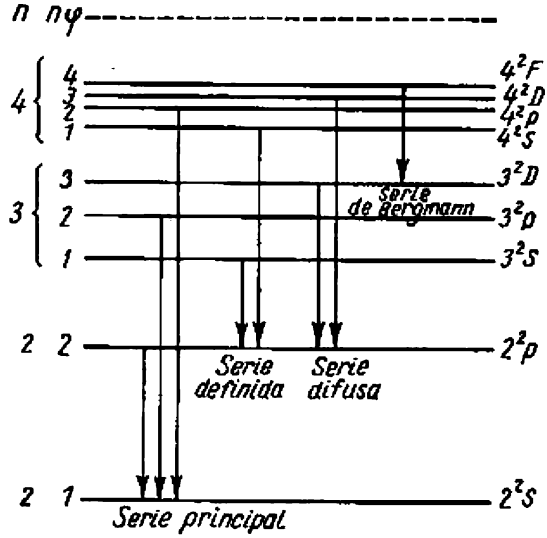

Fig. 328. Esquema de los niveles del litio.

n niveles diferentes cuyo número cuántico acimutal tendrá los valores $n_\varphi = 1, 2, \ldots, n$. Las transiciones solamente son posibles entre aquellos niveles para los que $\Delta n_\varphi = \pm 1$. En el § 340 indicamos que los números cuánticos efectivos $n^* = n + \alpha$ tienen para los términos S más profundos de todos los metales alcalinos un valor numérico que se encuentra entre 1 y 2. Ahora hemos dicho que los verdaderos números cuánticos principales de las órbitas muy perturbadas pueden ser considerablemente mayores que n^* y, por consiguiente pueden no coincidir con su parte entera. Más adelante veremos que para el término S más profundo del litio $n = 2$, para el término S más profundo del sodio $n = 3$ y así sucesivamonte. En la fig. 328 se da el esquema de los niveles del litio; junto a cada uno de ellos figuran los valores correspondientes de los números cuánticos principales (n) y acimutales (n_φ). Las flechas explican la formación de las distintas series de acuerdo con los materiales empíricos

que se citan en el § 340. La diferencia que existe entre la fig. 316 y ésta se debe a que en aquélla las cifras que hay junto a los términos (1S, 2P, etc.) significan la parte entera del número cuántico efectivo n^*, mientras que en ésta se entienden por n los valores de los verdaderos números cuánticos principales.

§ 347. Dificultades de la teoría de Bohr; hipótesis del spin del electrón. El material expuesto en los párrafos anteriores pone de manifiesto indudablemente la extraordinaria fecundidad de las ideas de Bohr. El concepto de los estados estacionarios y la regla de las frecuencias son parte integrante de las ideas fundamentales de la Física atómica moderna. No obstante, el desarrollo ulterior de la teoría de Bohr, como ya dijimos, encuentra dificultades considerables que en algunos casos tienen carácter de principio. De estas dificultades lógicas de principio señalaremos ante todo las siguientes: la regla de cuantificación (1) del § 343 no es unívoca, el resultado que se obtiene con ella depende de las coordenadas generalizadas que se elijan; la energía de los estados estacionarios resulta la misma, independientemente de las coordenadas generalizadas que se elijan pero las órbitas estacionarias tienen formas distintas. Además, la teoría de Bohr no es suficiente, puesto que solamente permite determinar la energía de los estados estacionarios y la frecuencia de las rayas emitidas, sin decirnos nada de su intensidad, polarización y coherencia.

Fuera de los límites de la teoría de Bohr queda también el fenómeno de la dispersión relacionado con la absorción de la luz. Finalmente, la teoría de Bohr encuentra grandes dificultades cuando se intenta explicar el carácter de doblete de los espectros de los metales alcalinos y el más complejo, llamado multiplete, de los espectros de los demás elementos.

Hemos visto que si se considera que el campo de la región central del átomo de los metales alcalinos tiene simetría esférica el número de órbitas estacionarias del electrón de valencia será el mismo que en el hidrógeno, pero esto no es suficiente para explicar el carácter de dobletes que tienen las rayas. De manera formal este carácter puede explicarse suponiendo que todos los términos, a excepción de los S, son dobles y que las transiciones entre ellos se regulan por cierta regla de selección complementaria. En los demás elementos, cuyas rayas representan grupos aún más complejos, hay que considerar que los niveles son triples, cuádruples, etc. Se intentó explicar esta compleja estructura de los espectros con la hipótesis de que las regiones centrales de los átomos no tienen simetría esférica. En este caso, cualquiera que sea la órbita, las condiciones cuánticas (1) del § 343 tienen que hacerse extensivas no sólo al radio vector r y al acimut φ, sino también a una tercera coordenada,

por ejemplo, a la latitud θ, de manera completamente análoga a como lo hicimos al estudiar el caso en que existe un campo perturbador externo. Esta tercera cuantificación espacial da como resultado que el plano de la órbita del electrón exterior puede orientarse únicamente formando una serie discontinua (discreta) de ángulos con la dirección del momento de la región central del átomo. Si el campo de la región central del átomo no es simétrico, las órbitas que tienen distintas orientaciones en el espacio experimentan distintos grados de deformación y, por consiguiente, los valores de la energía que les corresponden serán diferentes. Pero el carácter simétrico de las regiones centrales de los átomos de los metales alcalinos se ve confirmado por una serie de razonamientos sólidos: si el átomo de un metal alcalino pierde un electrón se asemeja a un gas inerte, cosa que se deduce por el hecho de la semejanza de los espectros de los iones de los metales alcalinos con los de los gases inertes correspondientes. Y las propiedades físico-químicas de los gases inertes ponen de manifiesto sin dejar lugar a dudas la extraordinaria simetría de sus capas electrónicas, las cuales carecen de todo momento eléctrico y magnético distinto de cero.

Tampoco son menores las dificultades que se encuentran cuando se intentan explicar los datos experimentales sobre los momentos magnéticos de los átomos. Como dijimos en el § 344, los momentos magnéticos de muchos átomos no son múltiplos enteros del magnetón de Bohr. Sin embargo la simple generalización de la teoría de Bohr a los átomos con varios electrones exige que sus momentos magnéticos sean múltiplos enteros del magnetón de Bohr.

Las dificultades relacionadas con las anomalías magnéticas de los átomos se consiguieron salvar hasta cierto punto basándose en la hipótesis de que los electrones tienen momentos mecánicos y magnéticos propios. *Según esta hipótesis cada electrón, además de su carga e y de su masa m, tiene un momento constante de la cantidad de movimiento* $\mathbf{p}_s$, numéricamente igual a $^1/_2\hbar$, y un momento magnético μ, también constante, numéricamente igual al magnetón de Bohr μ_0. El momento mecánico del electrón p_s se llama *espín o spin*.

El hecho de que el electrón tenga un momento mecánico de la cantidad de movimento y un momento magnético ligado a él se puede intentar explicar de forma gráfica admitiendo que el electrón gira constantemente alrededor de su propio eje. De aquí la denominación de espín del momento del electrón, de la palabra inglesa «spin» que significa movimento de rotación.

En el movimento orbital entre los valores numéricos de los momentos mecánico p y magnético del electrón μ existe la correlación simple

$$\frac{\mu}{p} = \frac{1}{2c}\frac{e}{m}.$$

Esta relación es *dos veces mayor* para los momentos mecánico y magnético propios del electrón:

$$\frac{\mu_0}{p_s} = \frac{1}{c}\frac{e}{m}.$$

Desde el punto de vista electrodinámico la hipótesis del electrón giratorio es contradictoria, porque para justificar los valores numéricos de los momentos p_s y μ_0 hay que admitir que la velocidad angular de los electrones es tan grande que la velocidad lineal de los puntos de su ecuador resulta mayor que la de la luz, cosa que está en contradicción con el principio de la relatividad.

La hipótesis del espín del electrón permite aclarar el carácter de doblete que tienen los espectros de los metales alcalinos. De manera formal este carácter de las rayas de los metales alcalinos puede explicarse suponiendo que todos los términos de estos elementos son dobles a excepción de los S. Este desdoblamiento de los términos se deduce de la hipótesis de que el electrón tiene momento espinorial. Como vimos en el § 346, en los átomos de los metales alcalinos, debido a la perturbación que sufre la órbita del electrón de valencia en el campo de la región central del átomo, a cada pareja de números cuánticos n, n_φ le corresponde un nivel energético determinado. Por la teoría de Bohr a esta pareja de números cuánticos n, n_φ le corresponde una órbita de dimensiones y forma determinadas del electrón de valencia. Al moverse por esta órbita el electrón tiene un momento orbital mecánico y otro magnético, es decir, excita un campo magnético (el momento magnético de la región central del átomo es igual a cero debido a su gran simetría). Al admitir la hipótesis de que el electrón tiene momento propio hay que tener en cuenta las posibles orientaciones de este momento $\mathbf{p}_s$ con relación al momento orbital $\mathbf{p}$. Como quiera que el electrón, además del momento mecánico $\mathbf{p}_s$ tiene el momento magnético propio μ_0 relacionado con aquél al moverse produce una energía complementaria $\Delta W'$ que depende de la orientación relativa que tengan los momentos $\mathbf{p}_s$ y $\mathbf{p}$. El momento propio del electrón $\mathbf{p}_s$ se puede orientar con respecto al momento orbital $\mathbf{p}$ *de dos formas únicamente*. A estas dos orientaciones posibles les corresponden dos valores de la energía complementaria $\Delta W'$ y, por consiguiente, el desdoblamiento de cada término en dos.

La hipótesis de que el electrón tiene momento magnético propio explica también la llamada estructura fina de las rayas del hidrógeno y de los iones semejantes a él. Esta estructura es análoga a la de los dobletes alcalinos, aunque mucho más estrecha.

Esta misma hipótesis justifica las anomalías, que se observan en los momentos magnéticos de los átomos, y el desdoblamiento de las rayas espectrales en más de tres componentes en presencia de un campo magnético. El momento magnético total del átomo μ es la

suma vectorial del momento magnético orbital μ_l y del momento magnético propio del electrón μ_0. Teniendo en cuenta las posibles orientaciones de estos dos momentos magnéticos se pueden calcular los valores del momento total $\mu = \mu_l + \mu_0$, los cuales concuerdan bien con los datos experimentales. El momento total $\mu = \mu_l + \mu_0$, en función de los ángulos entre μ_l y μ_0, puede tomar valores diferentes del magnetón de Bohr μ_0 o de sus múltiplos enteros. En presencia de un campo magnético exterior H el momento magnético total μ se orientará de varias maneras (véase el § 348), hecho que explica el efecto Zeeman «anómalo».

§ 348. **Modelo vectorial del átomo.** La explicación que hemos dado en el párrafo anterior del carácter de los dobletes de los metales alcalinos tiene el defecto siguiente: de ella se deduce que todos los términos deben ser dobles, mientras que en dichos metales los términos S son simples. Por lo tanto, para que esta explicación esté de acuerdo con los experimentos hay que admitir que solamente son dobles los términos P, D, F, etc., mientras que los S siguen siendo simples. Esta circunstancia puede aclararse suponiendo que entre los estados estacionarios del electrón exterior existen algunos para los que el momento orbital de la cantidad de movimento $p = 0$ y que precisamente a estos estados es a los que les corresponden los términos S.

En el § 343 supusimos que los estados en que $p = 0$ no existen, puesto que de lo contrario les correspondería el movimiento rectilíneo del electrón a través del núcleo. Pero ya advertimos que la representación gráfica del movimiento del electrón dentro del átomo, siguiendo órbitas determinadas, tiene un carácter simplemente aproximado, por consiguiente, hay que desechar los razonamientos que nos hicieron excluir del número de los estados estacionarios el que tiene $p = 0$.

Más adelante veremos (§ 365) que los valores absolutos de los momentos p tampoco son múltiplos enteros de $\hbar$, así, los momentos orbitales del electrón (que ahora designaremos por medio de p_l) tomarán los valores

$$p_l = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar, \text{ donde } l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1). \qquad (1)$$

Este nuevo número cuántico l sustituye al anterior número cuántico acimutal n_φ. Para un número cuántico principal n dado, este número l, lo mismo que antes el n_φ, toma n valores diferentes, pero comenzando por el cero y no por la unidad como ocurría con n_φ.

También hay que variar un poco el concepto inicial del momento propio del electrón p_s, para que esté de acuerdo con los datos experimentales. Concretamente hay que admitir que p_s tiene los siguien-

tes valores:

$$p_s = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar, \tag{2}$$

donde la magnitud s tiene un solo valor posible: $s = {}^1/_2$, mientras que ${}^1/_2\hbar$ toma la magnitud de la proyección p_{sz} del momento del electrón sobre la dirección preferente. Como quiera que esta proyección puede estar orientada de dos maneras: en el sentido de la dirección preferente y en el contrario, p_{sz} puede tomar los dos valores siguientes:

$$p_{sz} = m_s\hbar, \text{ donde } m_s = \pm 1/2. \tag{3}$$

En definitiva obtenemos que el estado del movimiento del electrón dentro del átomo puede caracterizarse por los tres números cuánticos siguientes:

1) por el número cuántico principal n que toma los valores 1, 2, 3, 4, . . .;

2) por el número cuántico secundario (orbital) l que para un valor dado de n toma los valores 0, 1, 2, . . ., $(n-1)$; y

3) por el número cuántico m_s que toma los valores $\pm{}^1/_2$.

Según la teoría de Bohr, el número cuántico principal n determina las dimensiones de la órbita y, en primera aproximación, su energía

$$W = -\frac{Rhc}{n^2}.$$

El número cuántico secundario l determina el momento orbital $\mathbf{p}_l$, y, por lo tanto, la forma de la órbita y su grado de perturbación en el campo de la región central del átomo. Y el número cuántico m_s determina la orientación del momento propio del electrón $\mathbf{p}_s$ con relación al momento orbital $\mathbf{p}_l$.

Para los estados s del electrón $l = 0$, por consiguiente, es también igual a cero el momento orbital $\mathbf{p}_l$. Gracias a esto desaparece la posibilidad de que el momento propio del electrón $\mathbf{p}_s$ tenga varias orientaciones y, lógicamente, la energía complementaria $\Delta W'$ relacionada con estas orientaciones será igual a cero. De esta forma se explica por qué los términos S sigan siendo simples, mientras que todos los demás se desdoblan.

En lugar de la tríada de números cuánticos n, l, m_s, que caracterizan el estado del movimiento del electrón en el átomo, se puede introducir otra: n, l, j, considerando que el momento total de la cantidad de movimiento del electrón es $\mathbf{p}_j$. Evidentemente este momento total $\mathbf{p}_j$ vendrá determinado por la suma geométrica del momento orbital $\mathbf{p}_l$ y del momento propio del electrón $\mathbf{p}_s$:

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{p}_l + \mathbf{p}_s. \tag{4}$$

Los momentos p_l y p_s pueden formar entre sí solamente aquellos ángulos para los cuales el momento total p_j toma los valores siguientes:

$$p_j = \sqrt{j(j+1)}\,\hbar, \text{ donde } j = |l + m_s|. \quad (5)$$

Como $m_s = \pm 1/2$, se deduce que para cualquier $l \neq 0$ el número cuántico j tomará dos valores $j = l \pm 1/2$; cuando $l = 0$, j toma un solo valor $j = 1/2$. Las dos posiciones mutuas de los vectores p_l, p_s y p_j que son posibles cuando $l \neq 0$ se muestran en la fig. 329 *a* y *b*.

El hecho de que los valores posibles de p_j se hallen por medio de una suma vectorial ha determinado que el modelo de átomo que estudiamos reciba el nombre *de vectorial*. En presencia de un campo magnético exterior el momento magnético del átomo μ puede orientarse de $2j + 1$ maneras, lo que está de acuerdo con las observaciones llevadas a cabo sobre el desdoblamiento de los haces atómicos en un campo magnético exterior no homogéneo y sobre el efecto Zeeman.

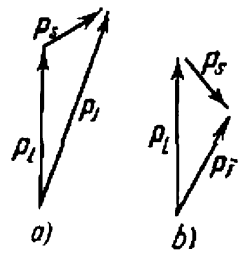

Fig. 329. Composición de los momentos orbital y espinorial del electrón.

El modelo vectorial del átomo puede ser generalizado al caso de átomos o iones con varios electrones de valencia. En este caso sus momentos orbitales p_{li} y espinoriales p_{si} se componen en momentos totales o resultantes. La energía total del átomo depende no sólo del valor de los propios momentos, sino también de sus orientaciones recíprocas.

Estudiemos el caso de dos electrones de valencia. Se entiende por átomos o iones con dos electrones de valencia aquellos en que *todos los electrones, excepto dos, forman capas completas para las que los momentos resultantes son iguales a cero*. El estado de estos átomos e iones viene determinado por el de los dos electrones más externos, es decir, por sus electrones de valencia. Representantes de este grupo son el helio y los iones semejantes a él (He I, Li II, Be III, ...) y los elementos alcalinotérreos Zn, Cd, Hg y los iones semejantes a ellos.

Para simplificar limitémonos al caso particular en que uno de los electrones de valencia se encuentra todo el tiempo en el estado 1s (en el caso general $n_1 s$), mientras que el otro se encuentra en cualquiera de los estados posibles, con cualquier valor del número cuántico principal n_2. En este caso para el primer electrón $l_1 = 0$; para el segundo l_2 toma cualquiera de los valores permitidos. Como quiera que $l_1 = 0$, el átomo en su conjunto se caracterizará por el número cuántico L, que coincide con el l_2 y el momento orbital total P_L coincidirá con el p_{l2}. Pero el momento espinorial resultante $P_S = p_{s1} + p_{s2}$ podrá tener dos valores, correspondientes a los dos del número cuántico S:

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{y} \quad S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

El primer caso se caracteriza por la compensación de los momentos espinoriales: el momento espinorial total del átomo $P_S = 0$. A este estado le corresponden los *términos simples* (singuletes), para los que el valor del número cuántico J coincide con L (véase la parte central de la tabla XX). En el segundo caso el momento espinorial total es distinto de cero y se caracteriza por el valor del

Tabla XX

electrón 1°	electrón 2°	L	$S=0$ (singuletes)		$S=1$ (tripletes)	
			J	símbolo	J	símbolo
1s	1s	0	0	$^1S_0$	1	$^3S_1$
1s	2p	1	1	$^1P_1$	0 1 2	$^3P_0$ $^3P_1$ $^3P_2$
1s	3d	2	2	$^1D_2$	1 2 3	$^3D_1$ $^3D_2$ $^3D_3$
1s	4f	3	3	$^1F_3$	2 3 4	$^3F_2$ $^3F_3$ $^3F_4$

número cuántico $S = 1$. Ahora los valores numéricos del momento total P_J vienen determinados por el número cuántico J, que toma los valores

$$J = L+S,\quad L+S-1,\quad \ldots,\quad |L-S|.$$

Por esto, cuando $S = 1$ a cada L (a excepción de $L = 0$) le corresponden tres valores posibles de J y, por consiguiente, la aparición de *términos triples* (*tripletes*) (parte derecha de la tabla XX).

El grado de desdoblamiento del término se suele designar por su multiplicidad. La multiplicidad del término se indica por medio de un superíndice que se escribe en la parte superior izquierda del símbolo del término. En la parte inferior derecha de dicho símbolo se escribe un subíndice que corresponde al valor del número cuántico J. Para dar la característica completa del átomo, delante del símbolo del término se escriben los símbolos de los electrones. Por ejemplo, el estado triplete P del átomo que se caracteriza por tener $J = 1$ y que aparece cuando uno de los electrones se encuentra en el estado 1s y el otro en el estado 2p, se escribe así: 1s 2p $^3P_1$.

De esta forma resulta que un átomo con dos electrones de valencia tiene dos series de términos: una serie de términos simples y otra de términos triples. El espectro del helio presenta efectivamente dos series de términos tan distintos que hace tiempo se pensó que el helio era una mezcla de dos elementos diferentes a los cuales se atribuyó los nombres de *parahelio* y *ortohelio*. Las rayas del parahelio eran las simples y las del ortohelio, las triples.

En el caso que estudiamos uno de los electrones de valencia se encuentra todo el tiempo en la órbita de $l_1 = 0$, de manera que los estados estacionarios del átomo se diferencian entre sí únicamente por los diversos estados del movimiento del segundo electrón. *La emisión de las rayas se produce cuando este segundo electrón pasa de un estado a otro.* Al ocurrir esto se cumple la regla de selección:

$$\Delta L = \pm 1.$$

Al mismo tiempo se cumplen también las reglas de selección para J y S, por las cuales

$$\Delta J = 0,\quad \pm 1,\quad \text{y}\quad \Delta S = 0.$$

Estas tres reglas permiten comprender la estructura de las series de tripletes.

En la fig. 330 puede verse el esquema de los niveles del helio. En él se indica cómo surgen algunas rayas espectrales. La separación de los niveles triples es insignificante en el helio.

El estado más profundo del átomo de helio es el estado sencillo 1s 1s $^1S_0$. Normalmente el átomo de helio se encuentra en este estado. El estado siguiente es el 1s 2s $^3S_1$. A este estado le corresponde un nivel que se encuentra mucho más alto. Para hacer que el átomo de helio pase de su estado normal 1s 1s $^1S_0$

al estado 1s 2s $^3S_1$ hay que gastar un trabajo de 19,77 eV. En el esquema falta el estado 1s 1s $^3S_1$, a pesar de que este estado es posible según la tabla XX. Como veremos más adelante este hecho tiene una gran importancia para la teoría de los átomos.

Los estados desde los cuales el átomo no puede pasar al más profundo se llaman *metaestables*. En la fig. 330 puede verse que el helio tiene dos estados metaestables, el 1s 2s $^3S_1$ y el 1s 2s $^1S_0$, desde los cuales está prohibido el paso al estado normal 1s 1s $^1S_0$ por la regla de selección del número cuántico L. Al estado metaestable 1s 2s $^1S_0$ le corresponde un potencial de excitación de 20,55 eV. Para sacar el átomo de un estado metaestable hay que hacerle pasar

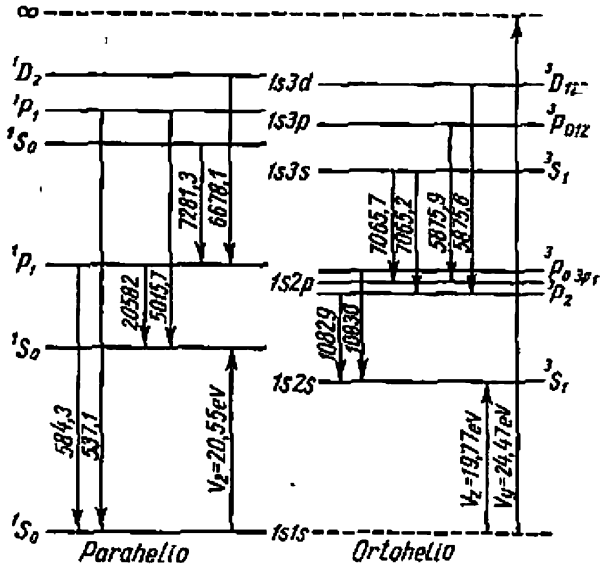

Fig. 330. Esquema de los niveles del helio (He I).

a uno de los estados no metaestables superiores por medio de cualquier influjo exterior, por ejemplo, del choque con un electrón. El átomo también puede pasar a su estado normal cuando choca con otro átomo y le transmite directamente la energía de excitación. Estos choques en los que la energía se transmite directamente de un átomo a otro se llaman *choques de segunda clase*.

La situación extraordinariamente profunda del nivel normal del helio explica el hecho de que su raya de resonancia 1s 1s $^1S_0$—1s 2p $^1P_1$ se encuentra en la región ultravioleta remota; su longitud de onda es $\lambda = 584{,}328$ Å.

Esta disposición tan alejada de las series del helio justifica su considerable transparencia en la región de las longitudes de onda cortas.

§ 349. Sistema periódico de Mendeléiev *). Es sabido que D. I. Mendeléiev creó en 1869 su sistema de los elementos como

*) En la actualidad el sistema periódico ha sido completado con una serie de elementos nuevos. Los elementos de $Z = 43{,}85$ y 87, carentes de isótopos estables, se llaman en la literatura contemporánea Tecnecio (Tc), Astato (At) y Francio (Fr). Todos ellos fueron vaticinados por Mendeléiev, que los designó con los nombres de ekamanganeso (EMn), ekayodo (EI) y ekacesio (ECs).

resultado de un largo y profundo estudio de sus propiedades químicas y físicas. Demostró que si los elementos se colocan en el orden de sus pesos atómicos sus propiedades físicas y químicas se repiten periódicamente (salvo un pequeño número de excepciones): Ahora sabemos que el orden de los elementos en la tabla de Mendelóiev no es el de los pesos atómicos sino *el de sus números de carga Z*. Pero estos dos órdenes casi coinciden entre sí.

La periodicidad descubierta por Mendeléiev tiene un carácter complejo. En la fig. 331 se representa el sistema periódico escrito de una forma diferente a como se hace en los libros de Química, pero que es más cómoda para nuestros fines. Los elementos pertenecientes a un mismo período figuran en un mismo renglón. Los elementos análogos están unidos entre sí con líneas. Como puede verse, el primer período comprende dos elementos solamente, el hidrógeno y el helio; los períodos segundo y tercero constan de ocho elementos; el cuarto y el quinto, de 18 y el sexto de 32 elementos. El último período se interrumpe naturalmente en el elemento 92, el uranio. En la actualidad se han obtenido artificialmente 12 elementos «transuránicos» más, cuyos números de carga $Z = 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103$ y 104 (véase el § 380).

La semejanza físico-química de los átomos que pertenecen a una misma columna del sistema de Mendeléiev se extiende a sus espectros atómicos. Ya hemos dicho que todos los metales alcalinos tienen espectros completamente semejantes; también son semejantes los espectros de todos los metales alcalinotérreos, y así sucesivamente. Al avanzar a lo largo de cada uno de los períodos de la tabla de Mendeléiev se van encontrando espectros cada vez más complejos.

Según Bohr la periodicidad de las propiedades de los elementos obedece a que los electrones están situados en sus átomos formando capas determinadas.

Todos los electrones que forman una misma capa tienen igual número cuántico principal. Cada período de la tabla se inicia cuando los electrones comienzan a ocupar una nueva capa. Las propiedades físico-químicas, de los elementos vienen determinadas por el número y la disposición de sus electrones más externos, es decir, de los de valencia. Por esto, la periodicidad al ocupar las nuevas capas conduce a la periodicidad de las propiedades de los átomos.

De esta forma, *la periodicidad de las propiedades de los elementos descubierta por Mendeléiev refleja la periodicidad con que están distribuidos los electrones en los átomos*. Esta hipótesis ha sido confirmada por la estructura de los espectros ópticos y de rayos X.

Para establecer una relación más concreta entre la tabla de Mendeléiev y la distribución de los electrones por capas dentro del átomo hay que aclarar cuál es la cantidad máxima de electrones que puede haber en cada capa. Este problema se puede resolver basándose en el *principio de exclusión de Pauli*. Este principio surgió inicial-

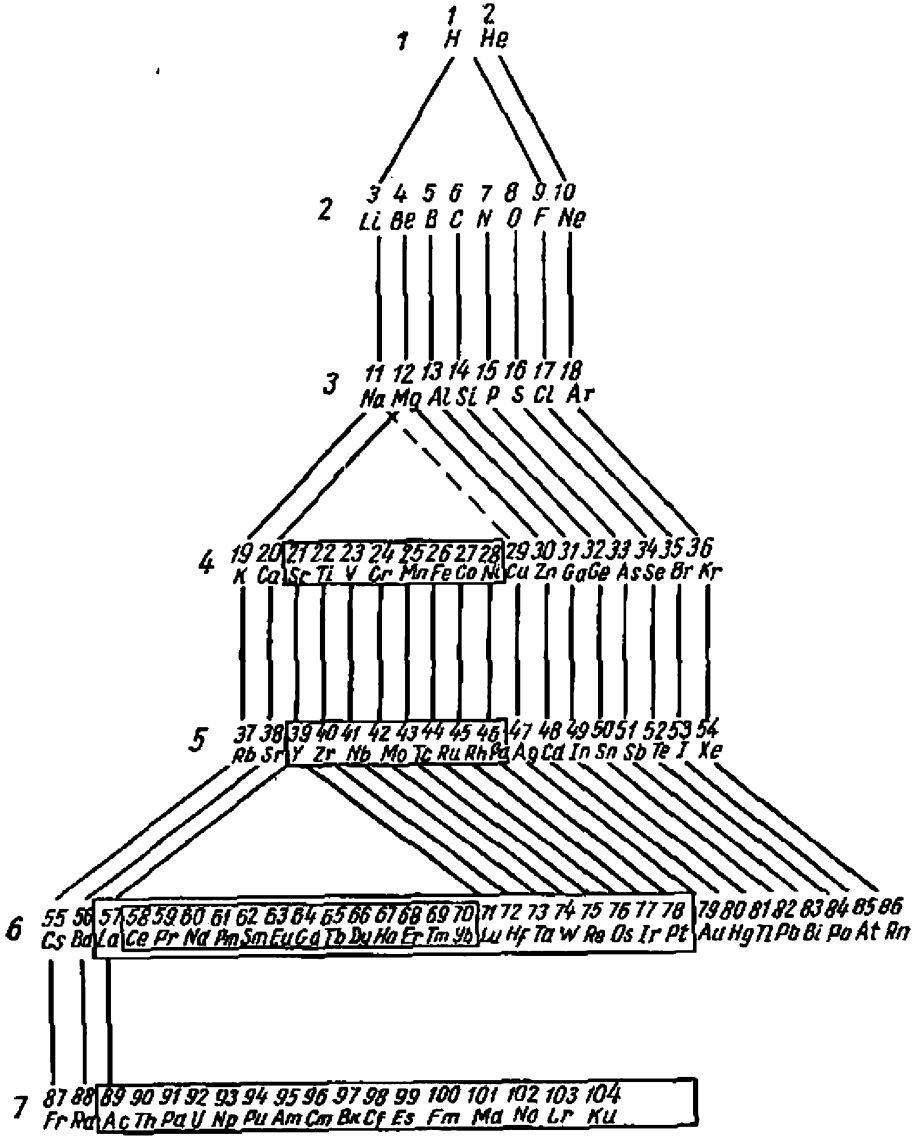

Fig. 331. Sistema periódico de Mendelóiev.

mente como resultado del análisis de los esquemas de los términos espectrales y después fue confirmado por los razonamientos de la Mecánica cuántica. En el § 348 advertimos cómo en el átomo de helio, de los dos estados más profundos posibles, 1s, $1s^1S_0$ y 1s $1s^3S_1$, solamente se realiza el estado simple 1s $1s^1S_0$. El estado triple 1s $1s^3S_0$ no existe. Pero resulta que en otros átomos de dos o más electrones de valencia tampoco se cumple una parte de los estados formalmente posibles. Pauli demostró que este hecho se puede explicar si se admite que en un átomo *no puede haber dos o más electrones que estén caracterizados por números cuánticos iguales.*

En el § 348 expusimos que el electrón se caracteriza dentro del átomo por los números cuánticos n, l y j. Recordemos que n es el número cuántico principal, que determina las dimensiones de la órbita del electrón (en el modelo de Bohr el semieje mayor de la órbita elíptica); $l = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ es el número cuántico secundario, que determina el momento orbital del electrón $\mathbf{p}_l$ y $j = |l \pm 1/2|$ es el número cuántico que determina el momento total del electrón $\mathbf{p}_j$. Además hay que tener en cuenta las diversas orientaciones que puede tener el momento $\mathbf{p}_j$ con respecto a la dirección preferente exterior.

Estas orientaciones vienen determinadas por los valores que pueden tener las proyecciones del momento $\mathbf{p}_j$ sobre dicha dirección preferente, los cuales son:

$$p_{jz} = m_j h, \quad \text{donde} \quad m_j = \pm j, \pm(j-1), \ldots, 0 \qquad (1)$$

Según el principio de Pauli, para caracterizar un electrón dentro del átomo hay que tener en cuenta el conjunto de los cuatro números cuánticos n, l, j y m_j. Por lo tanto, en definitiva, tenemos que *en un átomo no puede haber varios electrones que tengan los cuatro números cuánticos n, l, j y m_j iguales.*

En primer lugar demostraremos que el principio de Pauli explica el hecho de que el helio no tenga el estado 1s 1s $^3S_1$. En este caso los dos electrones 1s y 1s tienen tres números cuánticos iguales: $n_1 = n_2 = 1$; $l_1 = l_2 = 0$ y $j_1 = j_2 = 1/2$. Por consiguiente, deberán tener diferentes sus cuartos números cuánticos m_{j1} y m_{j2}. Como cada uno de estos números cuánticos puede tomar solamente dos valores, es decir, $\pm 1/2$, de acuerdo con el principio de Pauli únicamente es posible el estado en que uno de los números m_j es igual a $+1/2$ y otro igual a $-1/2$. Pero en este caso los momentos $\mathbf{p}_{j1}$ y $\mathbf{p}_{j2}$ respectivos de ambos electrones estarán dirigidos en sentidos opuestos (antiparalelos) y el momento total $\mathbf{P}_j$ será igual a cero, a lo que corresponde el estado simple del átomo $^1S_0$ ($J = 0$). El estado $^3S_1$ ($J = 1$) podría producirse si los momentos $\mathbf{p}_{j1}$ y $\mathbf{p}_{j2}$ tuvieran direcciones paralelas, en este caso $m_{j1} = m_{j2}$, pero esto es imposible, puesto que está en contradicción con el principio de Pauli.

Ahora, basándonos también en el principio de Pauli, calculemos qué número de electrones puede haber en un átomo que tengan iguales: a) n, l y j; b) n y l; y c) n. Tenemos que:

a) como según (1) el número cuántico m_j toma $2j + 1$ valores diferentes, el número máximo de electrones que pueden tener igual la triada de números cuánticos n, l y j será igual a $2j + 1$;

b) como el número cuántico j tiene para cada valor dado de l dos valores, $j = |l \pm 1/2|$, el número máximo de electrones que pueden tener iguales los números cuánticos n y l (estos electrones se llaman *equivalentes*) será igual a $2(2l + 1)$; y

c) como para cada valor dado de n el número cuántico l toma los valores de 0, 1, 2, . . ., $(n - 1)$, el número máximo de electrones Z_n que pueden tener igual el número cuántico n vendrá expresado por la suma:

$$z_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1).$$

Esta suma es fácil de calcular tomando en consideración que representa la suma de n miembros de una progresión aritmética cuyo primer miembro es 2 y el último $2(2n - 1)$. De donde tenemos que:

$$Z_n = \frac{2+2(2n-1)}{2} n = 2n^2.$$

De esta forma obtenemos que *en un átomo no puede haber más de* $2n^2$ *electrones que tengan el mismo número cuántico principal* n.

La tabla XXI da el número Z_n máximo de electrones que pueden tener en un átomo el mismo número cuántico principal n y su distribución por los estados que tienen igual l (caso *b*).

Tabla XXI

n \ l	0 s	1 p	2 d	3 f	4 g	Z_n
1	2	—	—	—	—	2
2	2	6	—	—	—	8
3	2	6	10	—	—	18
4	2	6	10	14	—	32
5	2	6	10	14	18	50

En la tabla XXI vemos que el número máximo de electrones que puede haber en la capa de número cuántico $n = 1$ es igual a 2; el número máximo de electrones que puede haber en la capa de $n = 2$ es igual a 8; en las capas de $n = 3$ y $n = 4$ pueden encontrarse respectivamente 18 y 32 electrones. Estas conclusiones confirman

la relación que existe entre la tabla de Mendeléiev y la disposición de los electrones por capas dentro de los átomos: los períodos de la tabla de Mendeléiev comprenden 2, 8, 18 y 32 elementos. Queda por aclarar la cuestión de por qué en la tabla de Mendeléiev hay dos períodos de 8 y dos de 18 elementos. Esto se explica porque en la tabla XXI se indican solamente *los números máximos de electrones que pueda haber* en las capas, pero el último electrón de cada átomo *se sitúa en aquel estado (entre los posibles) a que le corresponde menos energía*. El valor de esta energía no sólo depende del número cuántico principal n, sino también del número cuántico secundario l. Por esto el orden energético de los niveles puede no coincidir con el orden de los sitios que puede haber en las capas. El estudio de los espectros atómicos, sobre todo de los espectros de las series isoelectrónicas, da la posibilidad de analizar con todo detalle la constitución de las capas electrónicas y, por lo tanto, de poner de manifiesto el sentido físico de la ley periódica de Mendeléiev.

§ 350. Constitución de las capas electrónicas. El primer período de la tabla de Mendeléiev comprende solamente dos elementos (H, He) cosa que está de acuerdo con el número máximo de electrones que puede haber en la capa cuyo número cuántico $n = 1$. Con el litio empieza el segundo período. Para estudiar cómo ocupan los electrones la capa de $n = 2$ observemos los espectros del litio y de los iones semejantes a él. El carácter simple del espectro del litio hace suponer que dos de sus tres electrones se encuentran cerca del núcleo, mientras que el tercero se mueve por una órbita más alejada a la que corresponde un valor más elevado del número cuántico principal n. Concretamente, suponemos que los dos electrones «internos» tienen $n = 1$ y que el tercer electrón (de valencia) cuando está en estado normal tiene $n = 2$. El estudio de los espectros del Li I, Be II, B III, C IV, . . . confirma directamente esta suposición. Los espectros del Be II, B III y C IV están desplazados, con respecto al del Li I, hacia la región ultravioleta, debido a las grandes cargas de sus núcleos. Su completa semejanza con el espectro del litio es indicio de que tienen los tres electrones dispuestos exactamente lo mismo que los del átomo de litio neutro.

Para el hidrógeno y los iones semejantes a él los términos, expresados en números de ondas, tienen la forma:

$$T = \frac{RZ^2}{n^2},$$

donde Z es el número de carga.

En los metales alcalinos teníamos en cuenta la perturbación de la órbita del electrón externo introduciendo en lugar del número cuántico principal n el número cuántico efectivo n^*. Por lo tanto, los términos del Li I y de los iones semejantes a él Be II, B III,

C IV, . . . deberán estar representados por la fórmula:

$$T = \frac{R\,(Z-2)^2}{n^{*2}}. \qquad (1a)$$

(Para el Li $Z = 3$, de manera que la fórmula (1a) corresponde a la (1) del § 346).

Pero se puede seguir otro camino, introduciendo en la fórmula (1) una corrección de otro tipo, que tiene un sentido físico más determinado. Concretamente, como quiera que el electrón se mueve en el campo del núcleo, que está deformado por el de los demás electrones, la corrección puede referirse a la carga de dicho núcleo introduciendo en lugar de la carga verdadera $+Ze$ la carga efectiva

$$Z_{ef}e = +(Z-a)\,e,$$

donde a es una corrección que se llama magnitud del apantallamiento. Entonces los términos toman la forma:

$$T = \frac{R}{n^2}(Z-a)^2, \qquad (2)$$

donde n es el número cuántico verdadero. La comparación de los términos de la serie isoelectrónica pone de manifiesto que la corrección a se conserva aproximadamente constante para los términos de dicha serie.

A la correlación (2) se le puede dar la forma

$$\sqrt{\frac{T}{R}} = \frac{1}{n}(Z-a), \qquad (3)$$

análoga a la fórmula de Moseley del § 342. *La raíz cuadrada del valor numérico de los términos es una función lineal del número de carga Z.* Representando gráficamente las variaciones de $\sqrt{T/R}$ en función de Z obtenemos una recta cuya inclinación depende del valor del número cuántico principal n y que corta al eje Z en un punto cuya ordenada da la magnitud del apantallamiento a. De esta forma la correlación (3) permite hallar directamente el valor del número cuántico n.

En la fig. 332 se da la variación de $\sqrt{T/R}$ en función de Z para los términos S, P, D y F de la serie isoelectrónica del Li I, Be II, B III, . . . Las líneas de trazo punteado se refieren a los términos «del hidrógeno»

$$\sqrt{\frac{T}{R}} = \frac{Z}{2}, \quad \sqrt{\frac{T}{R}} = \frac{Z}{3} \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{T}{R}} = \frac{Z}{4}.$$

Como puede verse la dependencia de Z se expresa en los tres grupos de términos por medio de rectas, lo que quiere decir que

la corrección a es constante. Las rectas correspondientes a los términos S y P del primer grupo son paralelas a la recta $\sqrt{T/R} = Z/2$; la recta correspondiente al término D del segundo grupo es paralela a la recta $\sqrt{T/R} = Z/3$ y la correspondiente al término F del tercer grupo es paralela a la $\sqrt{T/R} = Z/4$. De aquí se deduce directamente que los números cuánticos principales de los estados S y P más profundos del litio y de los iones semejantes a él son iguales a $n = 2$;

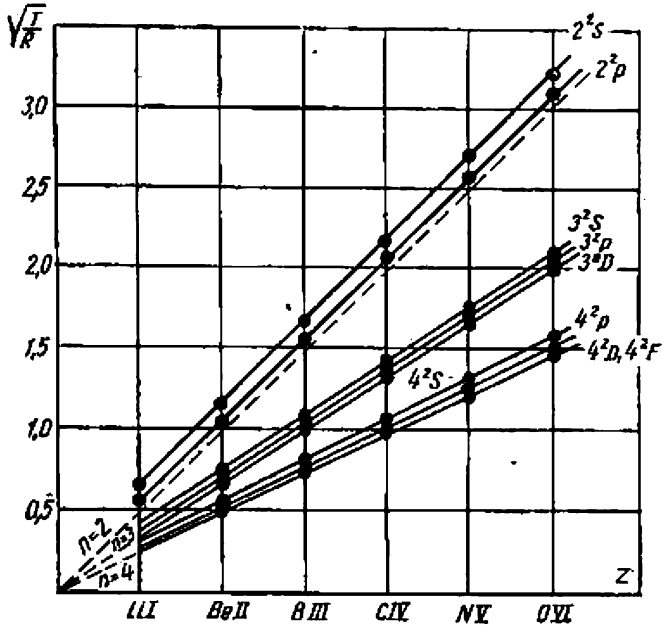

Fig. 332. Diagrama de Mosoley para la serie isoelectrónica Li I, Be II, B III, ...

el número cuántico principal del estado D más profundo es $n = 3$, y el del estado F más profundo es igual a 4. Vemos, pues, que los estados que puede tener el electrón de valencia del átomo de litio son: 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, etc. Al estado 2s le corresponde el nivel más profundo; el electrón de valencia se encuentra normalmente en este nivel. De esta forma se confirma directamente que a partir del litio comienza a constituirse la capa L (de número cuántico $n = 2$) * y al mismo tiempo empieza un nuevo período de la tabla de Mendeléiev.

El análisis de los espectros de los elementos que siguen al litio demuestra que en ellos se va ocupando uniformemente la capa L,

*) Como veremos en el § 351 las capas de $n = 1, 2, 3, \ldots$ se designan con las letras K, L, M, ... (*Nota del T.*)

que se acaba de completar en el neón ($Z = 10$). En esta capa ya no quedan sitios libres, o como se suele decir, la capa *está completa*. El hecho de que la capa L del neón esté completa explica la propiedad de este cuerpo de ser químicamente inerte y su semejanza con el helio, que tiene completa la capa K ($n = 1$).

El undécimo electrón del sodio ya no encuentra sitio libre en la capa L ($n = 2$) y comienza a ocupar la capa M ($n = 3$). A esto se debe el que a partir del sodio comience un nuevo período (el tercero) de la tabla de Mendeléiev. El hecho de que el sodio tenga un solo electrón de valencia en una capa sin completar es el que determina la semejanza de sus propiedades físico-químicas con las del litio. La ubicación del electrón de valencia del sodio en la capa M ($n = 3$) también se ve confirmada por el estudio de los diagramas de Moseley para los términos S, P y D más profundos del sodio y de los iones semejantes a él (Mg II, Al III, etc.). Las rectas correspondientes a estos términos son paralelas a la $\sqrt{T/R} = Z/3$, de donde se deduce que a todos estos términos les corresponde efectivamente el valor del número cuántico $n = 3$.

En los elementos que siguen en orden al sodio se va ocupando sucesivamente la capa de número cuántico $n = 3$ con electrones que se encuentran en los estados s y p. En el argón ($Z = 18$) ocho electrones con número cuántico $n = 3$ forman un grupo simétrico que determina la semejanza de sus propiedades físico-químicas con las del neón. Esto mismo hace que se destaque el tercer período (que abarca desde Na hasta el Ar), que contiene ocho elementos lo mismo que el segundo. El elemento decimonoveno (potasio) es análogo a los metales alcalinos; con él comienza un nuevo período, el cuarto.

No obstante los ocho electrones del átomo de argón no ocupan por completo todos los sitios que puede tener la capa M ($n = 3$), ya que en ella, de acuerdo con la tabla XXI, pueden encontrarse 18 electrones. En la capa M del argón quedan «libres» los sitios correspondientes a los diez electrones 3d. A pesar de esto, el electrón 19 del potasio no se ubica normalmente en el estado 3d, cosa que se deduce tanto de su espectro como de los espectros de los iones semejantes a él. Aquí el orden de los sitios previsto por la tabla XXI no coincide por primera vez con el orden determinado por razones energéticas. La órbita 4s (elíptica muy alargada y penetrante) está mucho más perturbada que la 3d (circular) y resulta más profunda energéticamente. A esto se debe el que normalmente el electrón 19 del potasio se encuentre en el estado 4s, lo que justifica la semejanza del potasio con el sodio y el comienzo de un nuevo período (cuarto) de la tabla de Mendeléiev.

No obstante, el hecho de haber quedado incompleta la capa M en el potasio se deja sentir en los elementos que le siguen. En la fig. 333 se reproduce el diagrama de Moseley para los términos $4s^2S$, $4p^2P$, $3d^2D$, $4d^2D$ y $4f^2F$ de la serie isoelectrónica K^+I, Ca II, Sc III,

Ti IV, . . . Como puede verse, la recta correspondiente a los términos $3d^2D$ corta a la recta $4s^2S$ entre $Z = 20$ y $Z = 21$. De aquí se deduce que el término normal más profundo del K I y Ca II es el $4s^2S$, y el del Sc III es el término $3d^2D$, de donde se infiere a la vez que el electrón 19 del Sc III se debe encontrar normalmente no en el estado 4s, como en el Ca II, sino en el estado 3d. De la misma manera se puede establecer que en el siguiente ion (Ti IV) no es

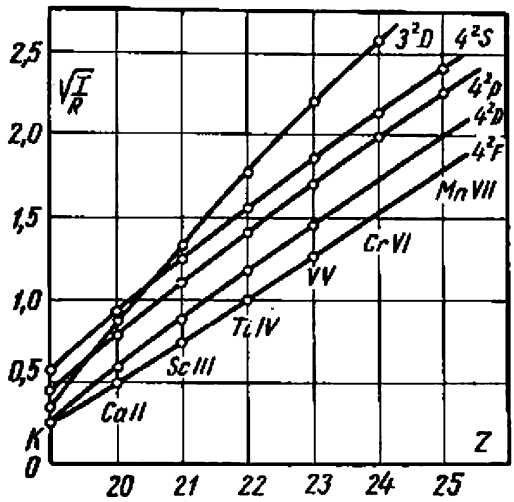

Fig. 333. Diagrama de Moseley para la serie isoelectrónica K I, Ca II, Sc III, ...

sólo el electrón 19 el que se encuentra en el estado 3d, sino también el 20. El orden de ocupación de las capas, infringido por el potasio, queda así restablecido.

Según la tabla XXI, para completar el estado 3d se necesitan 10 electrones. El primer elemento en que están ocupados todos los estados 3d es el cobre; con lo que este elemento tiene completa toda la capa M ($n = 3$); el electrón vigésimo noveno del cobre se encuentra en el estado 4s, cosa que determina cierta semejanza entre este elemento y los metales alcalinos. De esta forma a partir del cobre comienza a ocuparse «normalmente» la capa N ($n = 4$). Los ocho elementos que van desde el escandio hasta el níquel, en los cuales se va acabando de constituir la capa de $n = 3$, forman un grupo especial de elementos de transición, que en el sistema periódico (fig. 331) se resalta con un cuadro. Prosiguiendo, desde el cobre hasta el kriptón se siguen ocupando «normalmente» los estados 4s y 4p. El kriptón, con ocho electrones en la capa de $n = 4$ resulta ser semejante al Ne y al Ar, que también tienen ocho electrones en sus capas más externas. A esto se debe que con el kriptón se acabe

el cuarto período, que comprende 18 elementos en total (desde el K hasta el Kr).

Con el elemento 37 (rubidio), que sigue en orden al kriptón, se inicia la ocupación de la capa O ($n = 5$), aunque en la N quedan aún 24 sitios «libres», 10 en los estados 4d y 14 en los 4f. Aquí, lo mismo que en el caso del potasio, los estados correspondientes a la órbita elíptica alargada 5s resultan ser más profundos que todos los estados con $n = 4$ que aún siguen sin completar. La capa N ($n = 4$) se continúa completando a partir del itrio ($Z = 39$), con el que comienza un grupo de elementos en los cuales se va ocupando el estado d. Los estados 4f siguen sin completar hasta el elemento 58 (cerio). Con este elemento se inicia la ocupación de esta capa. La subcapa 4f comprende 14 elementos que forman un grupo muy particular, llamado de las *tierras raras o lantanidos*. Las tierras raras se parecen mucho entre sí por sus propiedades físico-químicas y no tienen análogos entre los elementos anteriores a ellas. Otro grupo de elementos, en los cuales se completa la subcapa 5f, empieza en el torio ($Z = 90$).

En la tabla XXII se da un esquema de cómo se van ocupando las capas por los electrones. Este esquema está confrontado con los períodos del sistema de Mendeléiev. En la tabla XXII puede verse que cada período (excepto el primero) se inicia con un metal alcalino, con un solo electrón de valencia, y finaliza con un gas inerte, con ocho electrones de valencia que forman una capa completa. Los períodos segundo y tercero, en que los estados s y p se completan normalmente, abarcan de acuerdo con esto 8 elementos cada uno. Los períodos cuarto y quinto, en los cuales se «incluyen» grupos de elementos en los que las subcapas d se van completando, abarcan 18 elementos. Finalmente, el último período completo, el sexto, comprende 32 elementos, puesto que en él aparece otro grupo, de 14 elementos, en los que se va completando la subcapa f. De esta forma, toda la compleja periodicidad descubierta por Mendeléiev se explica perfectamente por la disposición de los electrones formando grupos caracterizados por tener números cuánticos determinados.

§ 351. Espectros de rayos X. Los espectros de rayos X pueden ser de dos tipos: continuos y de rayas. Los primeros son emitidos por los electrones al ser frenados por el choque con el anticátodo (§ 331). Los segundos, lo mismo que los espectros ópticos de rayas, están formados por rayas espectrales distintas bien definidas. El carácter de los espectros continuos no depende del material de que está hecho el anticátodo. Por el contrario, la estructura de los espectros de rayas depende de dicho material. *Cada material tiene su espectro de rayas de rayos X característico.* Estos espectros se producen como resultado de que una parte de los electrones del haz, al chocar, ceden su energía a los átomos del anticátodo. Estos átomos exci-

Tabla XXII

Período	Z	Elemento	Capas																	
			K	L		M			N				O				P			Q
			1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f	5s	5p	5d	5f	6s	6p	6d	7s
I	1	H	1																	
	2	He	2																	
II	3	Li	2	1																
	4-9	Be—F	se van completando las subcapas 2s y 2p																	
	10	Ne	2	2	6															
III	11	Na	2	2	6	1														
	12-17	Mg—Cl	se van completando las subcapas 3s y 3p																	
	18	Ar	2	2	6	2	6													
IV	19	K	2	2	6	2	6	—	1											
	20	Ca	2	2	6	2	6	—	2											
	21	Sc	2	2	6	2	6	1	2											
	22-28	Ti—Ni	se va completando la subcapa 3d																	
	29	Cu	2	2	6	2	6	10	1											
	30-35	Zn—Br	se van completando las subcapas 4s y 4p																	
	36	Kr	2	2	6	2	6	10	2	6										
V	37	Rb	2	2	6	2	6	10	2	6	—	—	1							
	38	Sr	2	2	6	2	6	10	2	6	—	—	2							
	39	Y	2	2	6	2	6	10	2	6	1	—	2							
	40-46	Zr—Pb	se va completando la subcapa 4d																	

V	47	Ag	2	2	6	2	6	10	2	6	10	—	1									
	48-53	Cd—I	se van completando las subcapas 5s y 5p																			
	54	Xe	2	2	6	2	6	10	2	6	10	—	2	6								
VI	55	Cs	2	2	6	2	6	10	2	6	10	—	2	6	—	—	1					
	56	Ba	2	2	6	2	6	10	2	6	10	—	2	6	—	—	2					
	57	La	2	2	6	2	6	10	2	6	10	—	2	6	1	—	2					
	58	Ce	2	2	6	2	6	10	2	6	10	1	2	6	1	—	2					
	59-71	Pr—Lu	se va completando la subcapa 4f																			
	72	Hf	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	2	—	2					
	73-78	Ta—Pt	se va completando la subcapa 5d																			
	79	Au	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	—	1					
	80-85	Hg—At	se van completando las subcapas 6s y 6p																			
	86	Rn	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	—	2	6				
VII	87	Fr	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	—	2	6	—	1		
	88	Ra	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	—	2	6	—	2		
	89	Ac	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	—	2	6	1	2		
	90	Th	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	1	2	6	1	2		
	91-	Pa-	se va completando la subcapa 5f																			

tados, cuando vuelven a su estado normal, emiten una radiación cuya frecuencia $\nu = \frac{W_2 - W_1}{h}$, donde W_2, es la energía del estado excitado y W_1 la de uno de sus estados más profundos.

Los rayos X se caracterizan por tener una longitud de onda pequeña (del orden de 1 Å) y, por consiguiente, una gran frecuencia ν. Por esto las rayas de los espectros de rayos X deben producirse a costa de la transición de un electrón entre dos estados que tengan una gran diferencia de energías W. Las mayores energías las tienen los electrones internos de los átomos pesados. Efectivamente, veamos lo que ocurre en un átomo cualquiera cuyo número de carga Z sea grande y que tenga sus capas electrónicas internas completas. La influencia que ejercen los electrones externos sobre cualquiera de los electrones de una de las capas es pequeña, puesto que debido a su disposición simétrica las acciones de los distintos electrones se compensan entre sí. Por esta razón los electrones internos se encuentran principalmente bajo la influencia exclusiva del campo del núcleo atómico, cuya carga es $+Ze$, y la de los electrones que se encuentran más cerca de dicho núcleo. Por consiguiente, su energía

$$W = -\frac{Rhc}{n^2}(Z-a)^2, \qquad (1)$$

donde n es el número cuántico principal (para los electrones más internos $n = 1$) y a es una corrección debida a la existencia de electrones más profundos y a la perturbación que producen los demás electrones (a es pequeña en comparación con Z). Cuando los átomos son pesados su número de carga Z es grande y el valor numérico de la energía W también lo es. La diferencia de energías entre los estados contiguos también es grande y, por lo tanto, las rayas espectrales deberán tener grandes frecuencias, es decir, pequeñas longitudes de onda. De aquí se deduce la suposición de que *los espectros de rayos X son emitidos durante las transiciones de los electrones más internos de los átomos*, mientras que los espectros ópticos lo son durante las transiciones de los electrones más externos.

Pero entre los mecanismos de emisión de los espectros de rayos X y ópticos hay una gran diferencia debida a que todas las capas internas de los átomos pesados están ocupadas. Para excitar un espectro óptico hay que hacer pasar un electrón externo desde su estado normal a uno de los estados contiguos excitados (véanse los experimentos en que los espectros se excitan por medio de un choque electrónico § 341). Pero el electrón interno (por ejemplo, el que se encuentra en el estado de $n = 1$) de un átomo pesado no se puede hacer pasar a la capa contigua (por ejemplo, a la de $n = 2$), puesto que en ella todos los puestos están ocupados. Cuando se trata de un electrón interno hay que pasarlo a una de las capas más externas o lanzarlo fuera de los límites del átomo. Esto último es lo que ocurre generalmente.

Como resultado el proceso de emisión del espectro de rayos X se desarrolla del modo siguiente: una intensa acción exterior (por ejemplo, el choque con un electrón rápido) expulsa a uno de los electrones internos fuera de los límites del átomo y este último se ioniza. En una de las capas internas del ion recién originado queda un sitio libre. Este sitio puede ser ocupado por un electrón de una capa contigua. De esta forma se producen las transiciones entre las capas internas contiguas, lo que da lugar a la emisión de las rayas del espectro de rayos X.

Esta suposición se justifica con toda una serie de hechos, en primer lugar, por la estructura de los espectros de absorción de rayos

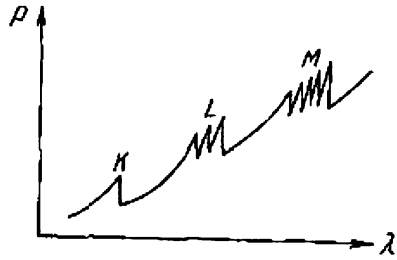

Fig. 334. Espectro de absorción de rayos X.

X. Los espectros ópticos de absorción producidos por los vapores y gases monoatómicos constan de rayas aisladas que coinciden con las rayas de emisión de la serie principal del elemento que se estudia. Estos espectros se producen por el paso de un electrón de valencia desde su estado normal a uno de los estados excitados, como consecuencia de la acción de la luz incidente. Los espectros de absorción de los rayos X no se parecen a los de emisión de estos mismos rayos. Estos espectros de absorción están formados por varias bandas con un borde de onda larga nítido. En la fig. 334 se han tomado sobre el eje de ordenadas los coeficientes de absorción de los rayos X y sobre el de abscisas las longitudes de onda. Como puede verse existen varias bandas de absorción. Estas bandas se suelen designar con las letras K, L, M, N, . . . La banda K es simple, las demás tienen una estructura compleja. Las bandas de absorción de los rayos X son análogas a las regiones de absorción continua que hay más allá de los límites de la serie principal de los espectros ópticos. Cada banda corresponde a un proceso de fotoionización, es decir, de expulsión de un electrón de una de las capas internas del átomo por una radiación. La banda K se produce cuando el electrón se expulsa de la capa de $n = 1$ más profunda, por esto a ella le corresponde la mayor frecuencia (o la menor longitud de onda). La banda L se produce cuando el electrón se expulsa de la capa de $n = 2$, y así

sucesivamente. El borde nítido de cada banda corresponde al comienzo del proceso de fotoionización, es decir, a la frecuencia ν única con que el electrón puede ser expulsado de una capa determinada sin comunicarle energía cinética complementaria. Las demás regiones de las bandas (con frecuencias mayores) corresponden a la expulsión del electrón cediéndole energía cinética.

Estudiemos ahora el espectro de emisión de rayos X. Aplicando la expresión de la energía de los electrones (1) obtenemos que cuando un electrón pasa de una de las capas internas a otra deberá ser emitida una raya cuya frecuencia (expresada en números de ondas) será:

$$\nu = \frac{W_2}{hc} - \frac{W_1}{hc} = \frac{R}{n_1^2}(Z - a_1)^2 - \frac{R}{n_2^2}(Z - a_2)^2. \qquad (2)$$

En radioscopia se usan las siguientes denominaciones: los términos correspondientes a $n = 1$ se llaman términos K, los correspondientes a $n = 2$, términos L, los a $n = 3$, términos M, etc. La serie de rayas que se produce por el paso al nivel K desde uno de los niveles más altos recibe el nombre de serie K; su primera raya se designa por medio de K_α. La serie que se produce por el paso al nivel L se llama serie L y así sucesivamente. Las letras K, L, M, N, . . . sirven también para designar las capas electrónicas de los átomos: la letra K designa la capa de $n = 1$, la L la capa de $n = 2$, etc. Como la configuración de las capas internas de todos los átomos pesados es la misma, la corrección a de la fórmula (1) será igual para todos los elementos. Por esto de la correlación (2) se deduce que *todos los átomos pesados tienen espectros de rayos X de estructura semejante*, si bien al aumentar sus pesos atómicos los espectros se desplazan hacia la región de las frecuencias mayores, debido a que Z aumenta. La complicación de los espectros de rayos X de los elementos pesados con respecto a los de los elementos más ligeros se debe únicamente a la aparición de niveles más altos. De acuerdo con la tabla XXII, la capa M ($n = 3$) se completa por vez primera en el cobre ($Z = 29$), la capa N ($n = 4$), en el lutecio ($Z = 71$).

Los términos de los espectros de rayos X se pueden escribir, de acuerdo con la fórmula (1), de la forma:

$$T_{(n)} = \frac{R(Z-a)^2}{n^2}.$$

Y como la corrección a no depende prácticamente de Z, los términos de los espectros de rayos X cumplen la ley de Moseley:

$$\sqrt{\frac{T}{R}} = \frac{1}{n}(Z - a), \qquad (3)$$

es decir, *la raíz cuadrada de los términos de rayos X es una función lineal del número de carga Z*. Desde el punto de vista histórico la ley de Moseley se estableció primeramente para los términos de rayos

X. Su extensión a los términos ópticos fue posible después de que el desarrollo de la espectrografía en el vacío permitió investigar los espectros de una serie de iones isoelectrónicos.

En la fig. 335 se reproduce un diagrama de Moseley en el que sobre el eje de abscisas se toman los valores de los números de carga Z y sobre el eje de ordenadas los valores de $\sqrt{\nu/R}$. En este diagrama se representan gráficamente los términos K, L y M; cuando se trata de elementos pesados todos los diagramas son (con alto grado de exactitud) líneas rectas. En la rectitud solamente se observan discrepancias cuando se trata de átomos ligeros en que las capas correspondientes no están completas aún. La corrección a tiene para los términos K un valor próximo a la unidad y para los términos L otro, aproximadamente igual a 8. Las rectas de Moseley no ponen de manifiesto ninguna de las huellas de la periodicidad expresada en la tabla de Mendeléiev. Por lo tanto, esto confirma una vez más la hipótesis de que los electrones internos forman en todos los átomos capas iguales y que la periodicidad solamente se manifiesta en aquellas propiedades físicas que dependen de los electrones externos. Como ilustración de lo expuesto, en la fig. 336 se comparan dos diagramas: el diagrama *1*, que da los potenciales de ionización de los átomos, es decir, el trabajo necesario para arrancarles el electrón más externo, y el diagrama *2*, que expresa la ley de Moseley (3) para los términos K. El primero ofrece máximos muy bruscos en los sitios en que se termina cada uno de los períodos de la tabla de Mendeléiev (en los gases inertes), mientras que el segundo representa una línea recta en la región que abarca todos los valores de Z.

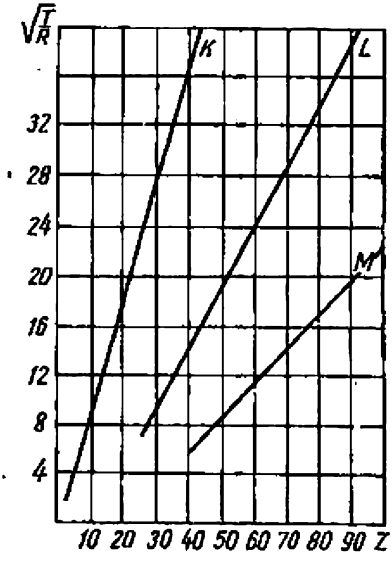

Fig. 335. Diagrama de Moseley para los términos de rayos X.

El esquema que estudiamos en el § 348 da la posibilidad de establecer la estructura de los espectros de rayos X. Cada uno de los términos del espectro de rayos X corresponde al estado de una capa *de la que ha sido expulsado un electrón*. El esquema vectorial permite hallar el número de estados energéticos distintos que pueden producirse al ser expulsado un electrón de una capa completa. La capa completa se caracteriza por tener los momentos resultantes $\mathbf{P}_L$, $\mathbf{P}_S$ y $\mathbf{P}_J$ iguales a cero. Si de una capa completa se separa un electrón, caracterizado por tener unos valores determinados de los momentos $\mathbf{p}_l$, $\mathbf{p}_s$ y $\mathbf{p}_j$, la configuración de los electrones que quedan en la capa vendrá caracterizada por los momentos $\mathbf{P}'_L$, $\mathbf{P}'_S$ y $\mathbf{P}'_J$, cuyos valores numéricos coincidirán con los de los

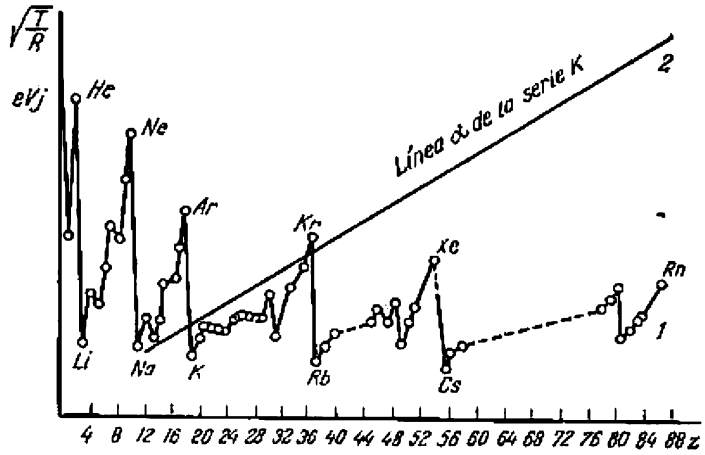

Fig. 336. Comparación de las variaciones de los potenciales de ionización y de la magnitud $\sqrt{\frac{T}{R}}$ para los términos K (2) en función del número de carg

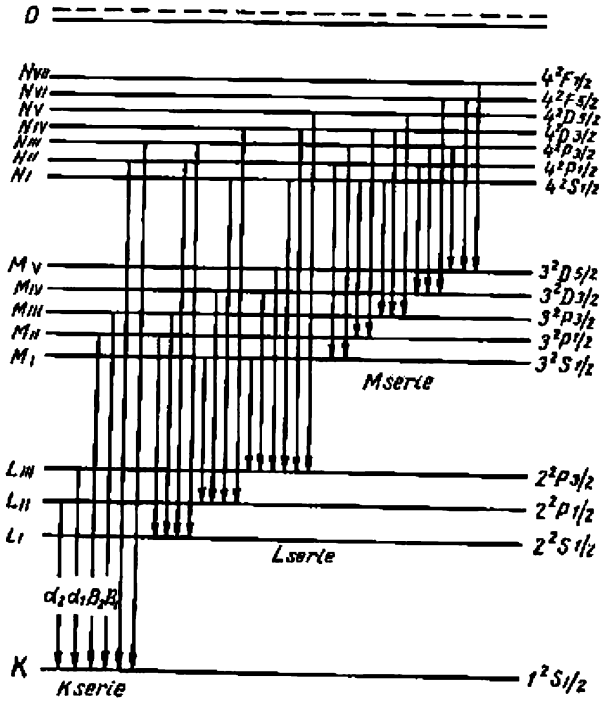

Fig. 337. Esquema de los niveles de rayos X.

momentos p_l, p_s y p_j del electrón expulsado. Esto se deduce del razonamiento según el cual únicamente en este caso la suma de los momentos $p_l + P'_L = P_L$, $p_s + P'_S = P_S$ y $p_j + P'_j = P_J$ será igual a cero. Y como el conjunto de los momentos relativos a un electrón corresponde a los términos dobletes, tendremos que *el esquema de los términos de los rayos X deberá concordar con el de los dobletes ópticos.*

El esquema de los niveles, junto con las reglas de selección, permiten comprender perfectamente la estructura de los espectros de rayos X. En la fig. 337 se muestra el esquema de los niveles y de la formación de algunas rayas. La serie K, que es la de ondas más cortas, se produce cuando los electrones pasan de los niveles más altos al nivel K ($n = 1$). Esta serie es análoga a la principal de los dobletes ópticos $\nu = 1^2S_{1/2} - n^2P_J$. Después van las series L y M. Cada una de las rayas de las series se designa por medio de las letras griegas α, β y γ y de índices numéricos. Así, a la transición $1^2S_{1/2} - 2^2P_{3/2}$ le corresponde la raya cuyo símbolo es K_{α_1}, a la transición $1^2S_{1/2} - 3^2P_{3/2}$ le corresponde la designada por K_{β_1}, y así sucesivamente.

§ 352. Intensidad de las rayas espectrales. Probabilidades de transición. Desde el punto de vista de la electrodinámica clásica (§ 331) todo electrón vibrante en un átomo debe emitir luz de la misma frecuencia ν con que él vibra.

La potencia media de la radiación

$$\overline{W} = \frac{16\pi^3 e^2}{3c^3} \nu^4 a^2, \qquad (1)$$

donde a es la amplitud de las vibraciones del electrón. De esta forma, según la teoría clásica, la intensidad de una raya espectral es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud y a la cuarta potencia de la frecuencia de las vibraciones correspondientes del electrón. Pero la teoría inicial de Bohr planteaba ya el problema de las intensidades de las rayas espectrales de manera completamente distinta. La emisión de las rayas se produce por medio de actos elementales de emisión independientes; en cada uno de estos actos elementales tiene lugar la emisión de una porción de energía $\Delta W = h\nu$. Por lo tanto, el problema de la intensidad de las rayas espectrales se reduce al del número de actos elementales de emisión que se producen en la unidad de tiempo.

Examinemos el caso de tres niveles energéticos W_i, W_l y W_k (fig. 338). Supongamos que por medio de cualquier acción exterior (por ejemplo, de un choque electrónico) una cantidad determinada de átomos N_k pasa a un estado excitado cuya energía es W_k. Al retornar a los estados más bajos los átomos emitirán rayas cuyas frecuencias serán:

$$\nu_{kl} = \frac{1}{h}(W_k - W_l) \quad \text{y} \quad \nu_{ki} = \frac{1}{h}(W_k - W_i).$$

Supongamos que A_{ki} y A_{kl} son respectivamente las probabilidades de que ocurran las transiciones $W_k \to W_i$ y $W_k \to W_l$. Enton-

ces el número de transiciones en la unidad de tiempo será igual respectivamente a $N_k A_{ki}$ y $N_k A_{kl}$ y las intensidades de las rayas (o potencias de las radiaciones) resultarán ser iguales a

$$I_{ki} = N_k A_{ki} \cdot h\nu_{kl} \quad \text{e} \quad I_{kl} = N_k A_{kl} \cdot h\nu_{kl}. \tag{2}$$

En Mecánica cuántica se demuestra que las probabilidades de transición A_{ki} y A_{kl} son proporcionales a los cubos de las frecuencias

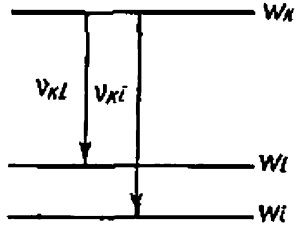

Fig. 338. Transiciones entre tres niveles energéticos.

y a los pesos estadísticos de los niveles inferiores:

$$A_{ki} \sim B_{ik} g_i \nu_{ki}^3 \quad \text{y} \quad A_{kl} \sim B_{lk} g_l \nu_{kl}^3,$$

siendo B_{ik} y B_{lk} unas nuevas constantes. Aprovechando estas expresiones obtenemos que la relación entre las intensidades de las rayas que examinamos será:

$$\frac{I_{ki}}{I_{kl}} = \frac{B_{ik} g_i}{B_{lk} g_l} \frac{\nu_{ki}^4}{\nu_{kl}^4}. \tag{3}$$

Las intensidades de las rayas, lo mismo que cuando se aplica la teoría clásica, resultan proporcionales a la cuarta potencia de las frecuencias.

Los valores de los pesos estadísticos se determinan basándose en los siguientes razonamientos: los niveles energéticos del átomo no están degenerados nada más que cuando existe un campo magnético exterior. Entonces a cada conjunto de números cuánticos n, L, J y m_J le corresponderá su nivel. Si no existe un campo magnético exterior los niveles que tengan iguales n, L y J, pero diferente m_J, se confunden. Como quiera que $m_J = \pm J$, $\pm (J - 1)$, . . ., es decir, toma $2J + 1$ valores diferentes, cuando no exista campo magnético exterior cada nivel que tenga los números n, L y J dados se podrá considerar como función de $2J + 1$ niveles diferentes. De aquí que sea natural considerar que su peso estadístico es igual a $2J + 1$, es decir,

$$g = 2J + 1. \tag{4}$$

Si los dos niveles inferiores se diferencian exclusivamente en sus números cuánticos J, pero tienen iguales n y L (es decir, repre-

sentan de por sí las componentes de un multiplete), tendremos que $B_{ik} = B_{lk}$. Y si, además, las frecuencias respectivas de las rayas ν_{ki} y ν_{kl} se diferencian poco entre sí, la relación (3) tomará la forma:

$$\frac{I_{ki}}{I_{kl}} = \frac{g_i}{g_l}. \qquad (3a)$$

De la igualdad (3a) se deduce que *cuando las componentes de un multiplete espectral estrecho se producen como resultado de la transición desde un mismo nivel superior sus intensidades estarán en la misma relación que los pesos estadísticos de los niveles inferiores. Esta regla, llamada de las intensidades*, se justifica muy bien en la práctica. Las rayas dobletes de la serie definida del sodio $\nu = 3^2P_J - n^2S_{1/2}$ son producidas por la transición desde un nivel simple $n^2S_{1/2}$ a dos niveles inferiores $3^2P_{1/2}$ y $3^2P_{3/2}$. Por esto, de acuerdo con las fórmulas (3a) y (4), la relación entre las intensidades de las dos componentes del doblete será:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{2J_1+1}{2J_2+1} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}+1}{2\cdot\frac{3}{2}+1} = \frac{1}{2}.$$

De esta forma en el caso examinado la relación entre las intensidades de las rayas es igual a 1 : 2. Como quiera que las magnitudes J_i son siempre enteras o semienteras, en todos los demás casos la relación entre las intensidades de las componentes de un multiplete resultará igual, según (3a), a una relación entre números enteros. Este hecho fue descubierto experimentalmente por D. S. Rozhdiestvenski en el doblete amarillo del sodio, para el que la relación entre las intensidades es igual a 1 : 2.

El concepto de probabilidad de transición es muy importante, puesto que en el caso del equilibrio radiactivo conduce a la fórmula de Planck (§ 310). Figurémonos un conjunto de átomos en el que cada uno puede encontrarse en una serie de estados estacionarios W_1, W_2, W_3, . . ., W_i, . . .

Si este conjunto de átomos se encuentra en equilibrio termodinámico a la temperatura T, de acuerdo con la ley de Boltzmann el número de átomos que se encuentra en el estado cuya energía es W_i será:

$$N_i = N_1 \frac{g_i}{g_1} e^{-\frac{W_i - W_1}{kT}}, \qquad (5)$$

donde N_1 es el número de átomos que se encuentran en el estado de energía W_1 y k es la constante de Boltzmann*).

Las transiciones del estado W_k al estado W_l que determinan la emisión de luz de frecuencia ν_{kl} se producen, como hemos dicho antes, con una probabilidad A_{kl}. Einstein demostró que junto con estas transiciones, que se producen

*) La ley de Boltzmann véase en el t. I, § 50. La fórmula que allí se da se diferencia de la (5) porque en aquélla no existe el factor g_i/g_1. Esto se debe a que entonces los pesos estadísticos de todos los estados se consideraron iguales.

cuando los demás átomos no radian (transiciones espontáneas), deben existir transiciones provocadas por la acción de la radiación exterior (transiciones inducidas). La probabilidad de estas transiciones inducidas es directamente proporcional a la densidad de la radiación $u_{\nu_{ki}}$, referida a un intervalo unidad de frecuencias. Entonces la energía total de la radiación, emitida en la unidad de tiempo como resultado de las transiciones de ambos tipos será:

$$\Delta W = N_k [A_{ki} + B_{ki} u_{\nu_{ki}}] h\nu_{ki}, \tag{6}$$

donde B_{ki} es una nueva constante.

Al mismo tiempo que la emisión de luz tendrá lugar la absorción debida al paso de los átomos del estado W_i al estado W_k. Como estas transiciones se producen bajo la influencia de la radiación incidente, su probabilidad será proporcional a la densidad de la radiación $u_{\nu_{ki}}$. Por esto la cantidad de energía absorbida en la unidad de tiempo se puede expresar de la forma:

$$\Delta W' = N_i B_{ik} u_{\nu_{ki}} h\nu_{ki}. \tag{7}$$

siendo N_i el número de átomos que se encuentran en el estado de energía W_i y B_{ik} otra constante.

En estado de equilibrio termodinámico la potencia de emisión debe ser igual a la de absorción: $\Delta W = \Delta W'$, de donde según (6) y (7), obtenemos:

$$N_k [A_{ki} + B_{ki} u_{\nu_{ki}}] = N_i B_{ik} u_{\nu_{ki}}. \tag{8}$$

Por la fórmula de Boltzmann (5):

$$\frac{N_i}{N_k} = \frac{g_i}{g_k} e^{-\frac{W_i - W_k}{kT}}$$

o como $W_k - W_i = h\nu_{ki}$,

$$\frac{N_i}{N_k} = \frac{g_i}{g_k} e^{\frac{h\nu_{ki}}{kT}}.$$

Esta correlación permite escribir la fórmula (8) de la forma:

$$A_{ki} + B_{ki} u_{\nu_{ki}} = \frac{g_i}{g_k} e^{\frac{h\nu_{ki}}{kT}} B_{ik} u_{\nu_{ki}}.$$

Resolviendo esta igualdad con respecto a $u_{\nu_{ki}}$, obtenemos:

$$u_{\nu_{ki}} = \frac{A_{ki}}{\frac{g_i}{g_k} B_{ik} e^{\frac{h\nu_{ki}}{kT}} - B_{ki}}. \tag{9}$$

Si la temperatura T aumenta indefinidamente, es natural que la densidad de la radiación $u_{\nu_{ki}}$ también deberá aumentar indefinidamente. Pero como quiera que cuando $T \to \infty$ la magnitud $e^{\frac{h\nu_{ki}}{kT}} \to 1$, esto solamente es posible cuando, según la fórmula (9), $\frac{g_i}{g_k} B_{ik} = B_{ki}$. Después de lo cual la fórmula (9) toma

la forma

$$u_{\nu_{kl}} = \frac{g_k}{g_l} \frac{A_{kl}}{B_{lk}} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{kl}}{kT}} - 1}. \tag{9a}$$

De acuerdo con la suposición hecha, cada uno de los átomos en cuestión puede encontrarse en una serie de estados discretos cuyas energías son W_1, W_2, W_3, . . . Por consiguiente estos átomos emitirán un espectro cuyas rayas tendrán las frecuencias ν_{kl}. En realidad cada raya tiene una anchura finita (aunque pequeña) d_ν (que en el caso en que no existan perturbaciones será su anchura natural) y la densidad de la radiación correspondiente a dicha anchura será igual a $u_{\nu_{kl}} d\nu$. La fórmula (9a) da la densidad de radiación por intervalo unidad de frecuencias que cuando existe equilibrio termodinámico corresponde a una raya determinada. Nosotros podemos generalizar esta fórmula haciéndola extensiva al caso de un espectro continuo. Para esto supondremos que debido a unas causas cualesquiera (por ejemplo, a la perturbación de los átomos entre sí dentro del sólido o del líquido) los niveles energéticos W_1, W_2, W_3, . . . comienzan a situarse infinitamente cerca unos de otros. En este caso el número de frecuencias emitidas ν_{lk} aumentará hasta el infinito, con la particularidad de que las rayas vecinas se encontrarán infinitamente próximas entre sí. En el límite estas rayas se confundirán y obtendremos un espectro continuo. Pero para cada lugar determinado del espectro (o para cada frecuencia ν_{kl} dada) la fórmula (9a) seguirá en vigor.

Si las frecuencias son muy pequeñas (o las longitudes de onda muy grandes), cuando $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$, la fórmula (9a) toma aproximadamente la forma:

$$u_{\nu_{kl}} = \frac{g_k}{g_l} \frac{A_{kl}}{B_{lk} h\nu_{kl}} kT. \tag{10}$$

Por otra parte, para las pequeñas frecuencias, cuando la discontinuidad de la radiación deja de ser perceptible, debe ser justo el razonamiento clásico que conduce a la fórmula de Rayleigh y Jeans (§ 310):

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT. \tag{11}$$

Efectivamente, en el § 310 vimos que en la región de las longitudes de onda grandes, donde $\frac{h\nu}{kt} \ll 1$, la fórmula de Rayleigh y Jeans comienza a coincidir con los datos experimentales (véase la fig. 224).

De esta forma las fórmulas (10) y (11) deberán coincidir, cosa que ocurre cuando se cumple la igualdad

$$\frac{g_k}{g_l} \frac{A_{kl}}{B_{lk}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}. \tag{12}$$

Poniendo este valor de $\frac{g_k}{g_l} \frac{A_{kl}}{B_{lk}}$ en (9a) obtenemos que en el espectro continuo la densidad de la radiación, cuando existe equilibrio termodinámico, deberá satisfacer la fórmula:

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

que coincide con la fórmula de Planck (3) del § 310.

La radiación inducida, que tomó en consideración Einstein, desempeña el papel de *absorción negativa*. Esto se debe a que cuando existe la radiación inducida el fotón se escapa del átomo en la misma dirección y en la misma fase que el fotón de la radiación exterior bajo cuya influencia se produce la transición inducida. En la fórmula (6) la potencia de la radiación inducida $N_k B_{kl} u_{\nu_{kl}} h\nu_{kl}$ se sumaba a la potencia de la radiación espontánea. Pero procediendo a la inversa, esta potencia se puede restar de la radiación absorbida. En este caso obtenemos que, en lugar de la fórmula (7), la energía total de la radiación absorbida en la unidad de tiempo vendrá expresada por

$$\Delta W' = N_l B_{lk} u_{\nu_{kl}} h\nu_{kl} - N_k B_{kl} u_{\nu_{kl}} h\nu_{kl}.$$

Y aplicando la correlación entre B_{kl} y B_{lk} que dimos anteriormente, según la cual $B_{kl} = \frac{g_l}{g_k} B_{lk}$, obtenemos:

$$\Delta W' = N_l B_{lk} u_{\nu_{kl}} h\nu_{kl} \left(1 - \frac{g_l}{g_k} \frac{N_k}{N_l}\right). \tag{13}$$

Hay que recordar que aquí N_l es el número de átomos que se encuentran en el nivel energético inferior y N_k el de los que están en el superior; al realizarse la transición $k \to l$ se produce la emisión de una raya de frecuencia ν_{kl}. Como puede verse por la fórmula (13), el miembro $\frac{g_l}{g_k} \frac{N_k}{N_l}$, que debe su origen a la radiación inducida, disminuye la absorción de la luz. Cuanto mayor es la densidad de ocupación o «población» del nivel k tanto más transparente es el medio.

Cuando los átomos se distribuyen equilibradamente entre los niveles la razón N_k/N_l cumple la ley de Boltzmann y la fórmula (13) toma el aspecto:

$$\Delta W' = N_l B_{lk} u_{\nu_{kl}} h\nu_{kl} \left(1 - e^{-\frac{h\nu_{kl}}{kT}}\right). \tag{14}$$

Cuando $T \to \infty$ la energía absorbida será igual a cero, es decir, el medio se hará totalmente transparente para la radiación dada. Mientras la distribución está equilibrada el factor $\left(1 - e^{-\frac{h\nu_{kl}}{kT}}\right)$ no puede hacerse negativo a ninguna temperatura. No obstante, como señaló por vez primera V. A. Fabrikant, cuando la distribución no está equilibrada puede ocurrir que $\frac{g_l}{g_k} \frac{N_k}{N_l} > 1$*) y en este caso la energía $\Delta W'$ se hace negativa. Esto quiere decir que bajo la acción de la radiación incidente el medio emite más energía que absorbe. Los rayos de luz, al pasar por un medio «activo» de este tipo, no se debilitan como de ordinario, sino que se refuerzan. Por esta razón es por la que el fenómeno que estudiamos recibe el nombre de absorción negativa y la densidad de ocupación o población del nivel, el de inversa.

Posteriormente la absorción negativa ha sido observada por V. A. Fabrikant, F. A. Butáeva y otros muchos autores. Si el tubo con el medio activo se coloca entre dos espejos planos paralelos la intensidad de la luz, que reflejándose sucesivamente en dichos espejos atraviesa multitud de veces el tubo, puede acrecentarse un gran número de veces.

*) Formalmente esta desigualdad se cumple cuando la temperatura es negativa. Sin embargo, cuando la distribución no está equilibrada el concepto de temperatura pierde su sentido, por lo que el término «temperatura negativa» que se emplea a veces tiene únicamente valor convencional.

A los intensificadores de luz construidos basándose en este principio se han consagrado muchos trabajos realizados últimamente tanto en la Unión Soviética como en otros países. Estos dispositivos permiten obtener un haz luminoso de extraordinaria luminancia comprendido dentro de un ángulo sólido muy pequeño. Estos dispositivos recibieron el nombre de «laser», sigla formada por las iniciales de las palabras inglesas «Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation» (amplificación de la luz por emisión estimulada de radiación).

El primer laser a base de un cuerpo sólido fue realizado por Mayman en el año 1960. En calidad de medio activo se empleó un cristal artificial de rubí ($Al_2O_3 + Cr_2O_3$). Los iones de cromo Cr^{+++} producen una banda de absorción en la región verde del espectro. Al iluminar el rubí con un potente flujo de luz verde («bombeo óptico») en el cristal aumenta considerablemente la población del nivel que se encuentra aproximadamente a 1,8 eV sobre el nivel normal. La probabilidad de transición desde este nivel es pequeña. Por esta razón en condiciones normales esta transición da lugar únicamente a una débil fluorescencia roja ($\lambda = 0{,}694$ y $0{,}693\mu$). Si la población es inversa y el cristal se encuentra entre dos espejos, como dijimos anteriormente, la radiación se amplifica y se obtiene un destello extraordinariamente brillante. Esta amplificación recibió el nombre de generación cuántica de luz, puesto que está basada en las leyes cuánticas.

Algo más tarde (en el año 1961) Dzhaván (o Djaván) realizó un laser gaseoso a base de una mezcla de neón y helio. A través del tubo que contiene la mezcla de neón y helio a baja presión se hace pasar una corriente eléctrica. Esta excitación eléctrica hace que aparezcan átomos de helio en los estados metaestables $1s2s^3S_1$ y $1s2s^1S_0$. Estos átomos ceden su energía de excitación a los átomos de neón cuando chocan con ellos. Como resultado se producen estados energéticos elevados del neón con población inversa. El tubo se encuentra entre dos espejos. La generación se observa generalmente en la raya infrarroja del neón $\lambda = 1{,}15\mu$ o en la raya roja de longitud de onda $\lambda = 0{,}632\mu$. El laser de neón y helio se diferencia del de rubí en que éste funciona a impulsos, mientras que aquél lo hace con régimen continuo.

El rayo del laser no sólo posee una gran luminancia, sino que además es monocromático, coherente en alto grado.

Amplificadores análogos para la región de las radiofrecuencias fueron propuestos por N. G. Básov, M. A. Prójorov (o Prókhorov) y Townes. Estos dispositivos se llaman «amplificadores cuánticos» o «maser» (sigla formada por las iniciales de las palabras inglesas Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation). En los maseres se utilizan transiciones inducidas entre niveles energéticos tan próximos, de los átomos y de las moléculas, que su frecuencia $\nu = \Delta W/h$ corresponde a la región de las radiofrecuencias ultraaltas. Por ejemplo, en el caso de las moléculas de amoníaco se obtiene una transición vibratoria (la llamada transición de inversión) a la que corresponde una longitud de onda $\lambda = 1{,}27$ cm, es decir, que se encuentra en la región de las ondas centimétricas de la radio.

§ 353. Estructura de las moléculas. La teoría de Bohr que estudia el movimiento de los electrones en los átomos resultó ser útil para explicar la estructura de las moléculas, aunque, como en el caso de los átomos, esta teoría da solamente una descripción aproximada de las correlaciones reales. Para profundizar más los conocimientos sobre la estructura de las moléculas y, en particular sobre la naturaleza de las fuerzas que mantienen unidos entre sí a los átomos que forman dichas moléculas, hay que recurrir a la Mecánica cuántica, que tiene en cuenta la existencia de los momentos mecánico y magnético propios del electrón.

Las propiedades de las moléculas, sobre todo de las que contienen un gran número de átomos, son extraordinariamente complejas y la teoría de la estructura molecular, a pesar de los grandes éxitos alcanzados durante las dos últimas décadas, no es en muchos sentidos una cosa acabada. Por esta razón nos limitaremos a estudiar las moléculas más simples, es decir, las *diatómicas*.

Las fuerzas que retienen a los átomos en las moléculas se deben a la acción mutua que existe entre sus electrones más externos. Los electrones de las capas internas permanecen en sus puestos. Esto se ve confirmado por el hecho de que los espectros de rayos X de los elementos pesados no dependen sensiblemente de la composición química de los cuerpos en que entran dichos elementos. Sin embargo, los espectros ópticos de las moléculas no se parecen en absoluto a los de los átomos que entran en su composición. La periodicidad de las propiedades tanto físicas como químicas de los elementos también demuestra que los enlaces químicos dependen de los electrones que se encuentran en la capa más externa.

En el caso de una molécula diatómica se pueden distinguir dos tipos de enlaces. Uno de ellos se realiza en aquellas moléculas en que parte de los electrones gira alrededor de los dos núcleos. Este tipo de enlace se llama *atómico*. Por regla general el enlace atómico está formado por parejas de electrones, con la particularidad de que los momentos espinoriales de los electrones que forman la pareja tienen sentidos opuestos. Entre las moléculas de este tipo hay que distinguir las que tienen núcleos iguales (por ejemplo, N_2 o C_2) de las que los tienen diferentes (por ejemplo, CN). En las moléculas que tienen los núcleos iguales los electrones se hallan distribuidos simétricamente. En las que tienen los núcleos diferentes existe cierta asimetría en la distribución de los electrones, a lo que se debe que estas moléculas adquieran un momento eléctrico dipolar.

El segundo tipo de enlace tiene lugar cuando dentro de la molécula los electrones se pueden dividir en dos grupos, de forma que cada uno de ellos se encuentre siempre junto a uno de los núcleos. En las moléculas de este tipo el enlace es sólido cuando junto a uno de los núcleos existe un exceso de electrones y junto al otro una falta de ellos. En estas condiciones la molécula está como constituida por dos iones de signos contrarios que se atraen entre sí. El enlace de este tipo se llama *iónico*. Como ejemplo de moléculas con enlace iónico pueden servir las de las combinaciones de los metales alcalinos con los halógenos (NaCl, KBr, etc.). Cuando estos compuestos se disuelven en agua sus moléculas se desintegran en dos iones (uno positivo, del metal alcalino, y otro negativo, del halógeno), hecho que determina la conductividad eléctrica de estas disoluciones (t. II, § 174).

Los espectros moleculares, como ya hemos dicho, se diferencian mucho de los atómicos. Los espectros atómicos están formados por

rayas que relativamente están bastante separadas entre sí y que únicamente se aproximan al final de cada serie, donde por lo general suelen ser débiles. En los átomos con pocos electrones externos el número de series espectrales es pequeño. En los espectros moleculares un número bastante grande de rayas aisladas forman concentraciones características en cada una de las cuales las rayas de uno de los extremos se encuentran tan próximas entre sí que cuando se observan con un instrumento de poder separador medio se confunden. Por esta razón las concentraciones de rayas toman la forma de bandas, uno de cuyos extremos es nítido mientras que el otro confuso.

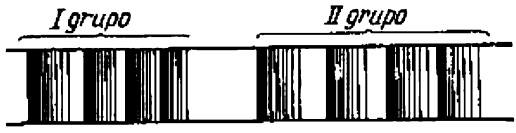

Fig. 339. Grupos de bandas moleculares.

De aquí el que los espectros moleculares se llamen de bandas. El extremo nítido (cabeza) puede encontrarse tanto en la parte de la banda que va hacia las ondas largas como en la que va hacia las ondas cortas. Las bandas se reunen formando grupos (fig. 339); los espectros moleculares pueden constar de varios de estos grupos. Estas bandas pueden encontrarse en la región infrarroja próxima del espectro, en la región visible y en la ultravioleta. En la región infrarroja remota las moléculas diatómicas dan espectros más simples, como veremos en el § 355. Resumiendo, podemos decir que en los espectros moleculares se ponen de manifiesto tres tipos de regularidades: a) las rayas aisladas se reunen formando bandas; b) las bandas se reunen formando grupos; y c) en el espectro existen varios grupos de bandas. Estos tres tipos de regularidades son reflejo de que la energía de las moléculas se puede dividir también en tres tipos: a) energía de rotación de la molécula como un todo único, W_r; b) energía de vibración de los núcleos atómicos, que entran en la composición de la molécula, en torno a sus posiciones de equilibrio, W_v; y c) energía de la capa electrónica de la molécula, W_{el}. La energía total W es igual a la suma de estas tres energías:

$$W = W_{el} + W_v + W_r. \qquad (1)$$

En realidad estos tres tipos de energía no son independientes, por consiguiente, la representación de la energía total W en forma de suma (1) tiene carácter aproximado. No obstante, el estudio separado de las energías W_{el}, W_v y W_r es útil para comprender la estructura de los espectros moleculares.

La frecuencia de la luz emitida al variar el estado en que se encuentra una molécula se representa por la igualdad $\nu = \frac{\Delta W}{h}$, que teniendo en cuenta la correlación (1) puede escribirse de la forma

$$\nu = \frac{\Delta W_{el}}{h} + \frac{\Delta W_v}{h} + \frac{\Delta W_r}{h}. \qquad (2)$$

Cada una de las energías de la molécula W_{el}, W_r y W_v toma una serie de valores discretos, a lo que se debe que, por la fórmula (2), el espectro molecular resulte formado por rayas aisladas. Pero estas rayas se agrupan, estando tan próximas entre sí que forman bandas. Tanto la teoría como la práctica demuestran que la diferencia entre las energías electrónicas ΔW_{el} es la que toma mayor valor, mientras que la diferencia entre las energías rotacionales ΔW_r es la que lo toma menos.

En los párrafos siguientes estudiaremos separadamente las energías de vibración, rotación y movimiento de los electrones en la molécula.

§ 354. **Espectros de vibración de las moléculas.** En una molécula diatómica los núcleos de ambos átomos, como resultado de sus interacciones con los electrones, tienen unas posiciones de equilibrio en torno a las cuales pueden vibrar. Llamemos r a la distancia entre los núcleos; supongamos que a la posición de equilibrio de ambos núcleos le corresponde $r = r_0$. En este caso si los núcleos se alejan poco de sus posiciones de equilibrio podemos considerar que sobre ellos actúa una fuerza cuasielástica

$$f = -k(r - r_0). \qquad (1)$$

Cuando los núcleos se aproximen $r - r_0$ será negativa y la fuerza f resultará positiva, es decir, será una fuerza de repulsión; cuando los núcleos se alejen el uno del otro $r - r_0$ será positiva y la fuerza f negativa, es decir, será un fuerza de atracción. A la fuerza cuasielástica le corresponde, como vimos en el t. I § 27, una dependencia parabólica de la energía potencial W_p en función de la elongación $r - r_0$ (la línea de trazo punteado de la fig. 340). Si los núcleos se separan mucho de sus posiciones de equilibrio la fuerza f no puede seguir siendo cuasielástica. En este caso la fuerza f deberá tender a cero, mientras que por la fórmula (1) debería aumentar constantemente. De la misma manera, cuando los núcleos se aproximan mucho la fuerza f no vendrá expresada por la fórmula (1), puesto que comenzará a aumentar con mucha mayor rapidez. De acuerdo con esto, la curva potencial verdadera (la de trazo continuo de la fig. 340) solamente tiene forma parabólica en su parte media, mientras que su rama derecha tiene una inclinación más suave y se aproxima asintóticamente al valor constante W_{p0} y su rama izquierda se eleva

bruscamente al acercarse al eje de ordenadas. La energía potencial en su punto mínimo ($r = r_0$) se considera convencionalmente igual a cero.

En la Mecánica cuántica se demuestra que la energía total de las vibraciones de los núcleos W_v, cuando existe la fuerza cuasielástica

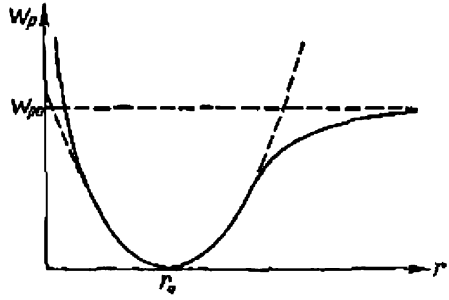

Fig. 340. Curva potencial de una molécula diatómica.

(1), puede tomar únicamente los valores determinados por la igualdad

$$W_v = \left(n + \frac{1}{2}\right) a, \tag{2}$$

donde n es un número entero, igual a 0, 1, 2, . . ., que se llama *número cuántico vibracional*. La constante a viene expresada por la fórmula

$$a = \hbar \sqrt{\frac{k}{M}}; \tag{3}$$

siendo M la masa reducida de la molécula:

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \tag{4}$$

donde m_1 y m_2 son las masas de ambos núcleos.

La fórmula (2) da una serie de niveles equidistantes, con la particularidad de que el nivel más profundo corresponde al valor de $W_v = \frac{1}{2} a$; el nivel nulo no existe. Esto quiere decir que, *cualesquiera que sean las condiciones, los núcleos nunca pueden estar en reposo dentro de la molécula, sino que siempre realizan vibraciones cuya amplitud puede ser diferente.*

Cuando la fuerza de acción mutua entre los núcleos no es cuasielástica la energía W_v deja de ser expresada por la fórmula (2). Aproximadamente esta energía se puede expresar por una fórmula

de la forma:

$$W_v = \left(n + \frac{1}{2}\right) a - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 b, \tag{5}$$

donde a y b son constantes, siendo $b < a$.

Unificando las fórmulas (2) y (5) tenemos: que en la parte inferior de la curva potencial, donde ésta es aproximadamente una parábola, los niveles energéticos se encuentran situados a iguales distancias, pero a medida que la curva potencial se aparta de la parábola, de acuerdo con la fórmula (5) los niveles comienzan a estar cada vez más próximos entre sí, sin pasar del nivel correspondiente al valor de la energía W_{p0} (fig. 341). Este es el valor constante que

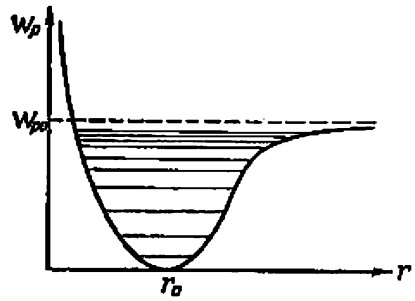

Fig. 341. Niveles vibracionales de la molécula.

toma la energía potencial cuando los núcleos se separan indefinidamente uno de otro, es decir, cuando la molécula se disocia en dos partes.

En la región en que la fórmula (2) es justa se cumple la siguiente regla de selección para el número cuántico vibracional:

$$\Delta n = \pm 1. \tag{6}$$

Esto significa que únicamente son posibles las transiciones entre los niveles vecinos. La emisión de luz tiene lugar cuando $\Delta n = -1$. En este caso la luz será emitida con la frecuencia (en s^{-1})

$$\nu = \frac{W'_v - W_v}{h} = \frac{a}{h} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}. \tag{7}$$

La magnitud $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$ representa la frecuencia propia de las vibraciones de los núcleos ν_0 bajo la influencia de la fuerza cuasielástica (1). De esta forma la frecuencia de la emisión de la luz ν coincide con la frecuencia de las vibraciones propias de los núcleos ν_0.

Si la frecuencia ν se expresa, como de ordinario, en cm^{-1}, en lugar de la fórmula (7) obtenemos:

$$\nu = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{k}{M}}. \tag{7a}$$

Los niveles vibracionales de las moléculas se encuentran próximos entre sí, por lo que la frecuencia ν del espectro de vibración de las moléculas corresponde a la región infrarroja de longitud de onda igual a varias micras.

Cuando el carácter de la fuerza de interacción entre las moléculas deja de ser cuasielástico la regla de selección (6) deja de cumplirse y comienzan a ser posibles las transiciones $\Delta n = \pm 2, \pm 3, \ldots$ En este caso para determinar la frecuencia ν de la luz emitida hay que utilizar la expresión (5) de la energía vibracional. Si el miembro $(n + {}^1/_2)^3 b$ sigue siendo pequeño, a las transiciones $\Delta n = -2, -3, \ldots$ les corresponde aproximadamente la emisión de frecuencias

$$\nu = 2\nu_0,\ 3\nu_0,\ \ldots \qquad (8)$$

A esto se debe que el espectro de vibración de una molécula diatómica conste de un «tono fundamental» ν_0 y de los «armónicos» $2\nu_0$, $3\nu_0$, . . . Por ejemplo, para una molécula de CO el «tono fundamental» corresponde a la longitud de onda $\lambda = 4{,}67\ \mu$ y los dos «armónicos» siguientes a las longitudes $\lambda = 2{,}35\mu$ y $1{,}58\ \mu$. Si la correlación (8) se cumpliera exactamente estas longitudes de onda serían iguales a $2{,}33\ \mu$ y $1{,}56\ \mu$.

A cada transición entre dos niveles energéticos determinados W' y W le corresponde una emisión de frecuencia monocromática $\nu = \dfrac{W' - W}{h}$. Por esto, si en la molécula existieran solamente los movimientos vibratorios de los núcleos su espectro estaría formado por rayas separadas. En realidad a cada movimiento vibratorio se le suma el movimiento de rotación de la molécula. Esto conduce, como veremos en el párrafo siguiente, a la sustitución de cada raya por toda una «banda» compuesta por un gran número de rayas muy próximas entre sí. Por consiguiente, a cada transición entre dos estados vibratorios de la molécula no le corresponde una raya, sino una banda. No obstante, por ahora caracterizaremos esta banda por medio de la frecuencia ν que se produciría si no existiera el movimiento de rotación de la molécula.

En los átomos la capa electrónica puede encontrarse en diversos estados energéticos. En las moléculas la capa electrónica también puede encontrarse en varios estados diferentes. Examinemos una configuración electrónica normal de energía W_{el} y otra excitada cuya energía sea W'_{el}. A cada una de estas configuraciones electrónicas le corresponden unas vibraciones de los núcleos. Como resultado, tenemos dos conjuntos de niveles vibracionales W_v y W'_v (fig. 342). Designemos los números cuánticos correspondientes a estos dos conjuntos de niveles por medio de n y n'. Al producirse una transición entre los niveles de los grupos será emitida una luz de frecuencia

$$\nu = \frac{W'_{el} - W_{el}}{h} + \frac{W'_v - W_v}{h}.$$

Llamando $\nu_{el} \frac{W'_{el}-W_{el}}{h}$, obtenemos que

$$\nu = \nu_{el} + \frac{W'_n - W_n}{h}. \qquad (9)$$

Para un par de estados electrónicos dado ν_{el} es constante. Las energías W'_n y W_n vienen expresadas por fórmulas del tipo (2) o (5), con la particularidad de que las constantes a y b serán algo distintas para ellas, puesto que las fuerzas de acción mutua entre los núcleos dependen del estado de los electrones. Las transiciones entre los dos grupos de niveles son posibles cualesquiera que sean los valores de la diferencia $n - n'$.

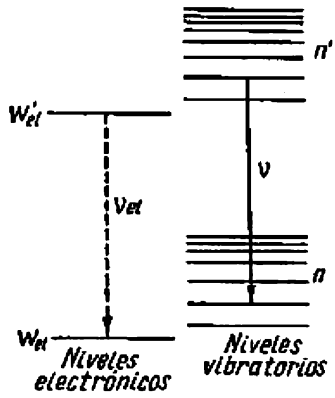

Fig. 342. Niveles vibracionales correspondientes a diversos estados electrónicos.

En realidad a cada estado vibratorio de la molécula volverá a sumársele un movimiento de rotación y a cada transición $n' \to n$ le corresponderá una banda. El espectro formado por un sistema de bandas de este tipo recibe el nombre de *electrónico-vibracional*. Como el término ν_{el} de la fórmula (9) es aditivo, este espectro se encuentra en la región visible del espectro o próximo a ella.

Estudiemos primeramente un espectro electrónico-vibracional de absorción. Supongamos que la moléculas se halla normalmente en el estado energético más bajo W_0 (fig. 343, *a*). A las transiciones a niveles más altos del grupo inferior les corresponden bandas de absorción infrarrojas cuyas frecuencias serán las del «tono fundamental» y las de los «armónicos». A las transiciones a los niveles del grupo superior les corresponden bandas de la región visible del espectro (o de regiones próximas a ella). Los niveles vibracionales superiores del espectro equidistan al principio entre sí y después se van aproximando cada vez más a medida que se acercan al valor límite de la energía, que se indica con trazo de puntos en la fig. 343, *a*. A esto se debe que las bandas de absorción electrónico-vibracionales estén situadas al principio a iguales distancias entre sí y que después (al avanzar hacia el lado de las frecuencias mayores) se vayan encontrando cada vez más próximas, sin pasar del valor límite ν_{lim}. De esta forma, el espectro electrónico-vibracional de absorción de una molécula diatómica se parece hasta cierto punto al espectro de absorción de los átomos, en el cual se absorben las rayas de la serie principal.

Examinemos ahora un espectro electrónico-vibracional de emisión. En este caso son posibles todas las transiciones entre los grupos

de los niveles vibracionales superiores e inferiores (fig. 343, *b*). Por esta razón se produce un sistema de bandas complejo. Las frecuencias de este sistema se pueden representar en forma de tabla

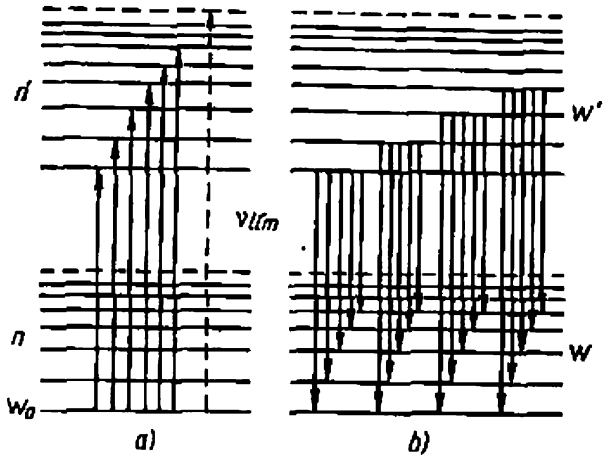

Fig. 343. Origen de las bandas electrónico-vibracionales: *a*) de absorción; *b*) de emisión.

(tabla XXIII), en la que por medio de ν_{ik} se designa la frecuencia de la banda que produce la transición $n_i' \rightarrow n_k$.

Tabla XXIII

n \ n'	0	1	2	3	4
0	ν_{00}	ν_{10}	ν_{20}	ν_{30}	ν_{40}
1	ν_{01}	ν_{11}	ν_{21}	ν_{31}	ν_{41}
2	ν_{02}	ν_{12}	ν_{22}	ν_{32}	ν_{42}
3	ν_{03}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{33}	ν_{43}
4	ν_{04}	ν_{14}	ν_{24}	ν_{34}	ν_{44}

Como puede verse este sistema se puede dividir en grupos aislados, correspondientes a las columnas y a los renglones de la tabla. En cada columna figuran las frecuencias de las bandas que producen las transiciones desde un nivel superior a todos los niveles inferiores posibles. En cada renglón se encuentran las frecuencias de las bandas que surgen cuando las transiciones son desde cualquier nivel superior posible hasta un nivel inferior dado.

El esquema de los niveles vibracionales se corrobora en la práctica por los experimentos basados en la fluorescencia de los vapores

diatómicos. Estos experimentos se realizan de la misma forma que los de fluorescencia en los espectros atómicos (fig. 319). Supongamos que todas las moléculas se encuentran en el estado más bajo $n = 0$. Cuando el vapor se ilumina con luz monocromática de frecuencia ν_{i0} las moléculas pasan de su estado normal al estado que tiene $n' = i$. Desde este estado de $n' = i$ cada molécula volverá a cualquiera de los estados vibracionales inferiores (fig. 344, *a*) y, como resultado,

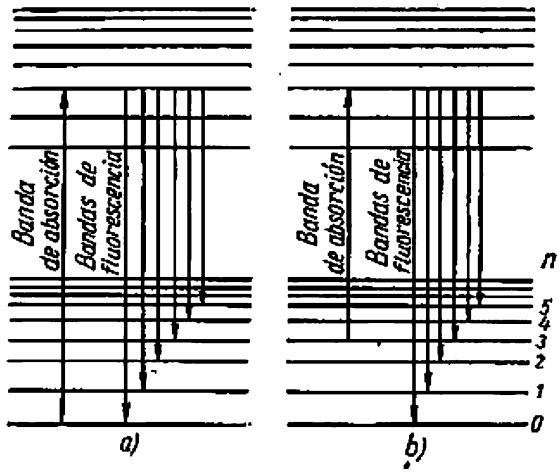

Fig. 344. Origen de las bandas de fluorescencia: *a*, bandas que cumplen la regla de Stokes; *b*, bandas que contradicen la regla de Stokes.

en el espectro de fluorescencia existirá un grupo de bandas perteneciente a una de las columnas de la tabla XXIII que tendrá las frecuencias ν_{ik}, donde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Por lo tanto, el espectro de fluorescencia resulta ser mucho más complejo que el espectro de excitación (que en nuestro caso es una banda de frecuencia ν_{i0}). En el espectro de fluorescencia todas las frecuencias, menos la que coincide con ν_{i0}, son menores que la frecuencia de la luz excitadora: $\nu_{ik} < \nu_{i0}$ cuando $k = 1, 2, 3, \ldots$ En otras palabras, *el espectro de fluorescencia contiene luz de longitudes de onda iguales o mayores que la longitud de onda de la luz excitadora*; este espectro está desplazado hacia el lado rojo con respecto al de excitación. Esta deducción fue hecha por Stokes basándose en el análisis de los datos experimentales, mucho antes de que apareciera la teoría de los espectros moleculares, y se llama *regla de Stokes*.

Las divergencias con la regla de Stokes son posibles en el caso en que inicialmente una parte de las moléculas se encuentra en estados vibracionales excitados, cosa que puede ocurrir a costa del movimiento térmico

Por ejemplo, si una parte de las moléculas se encuentra en el estado vibracional excitado de $n = 3$ (fig. 344, *b*), al absorber luz de frecuencia ν_{12} en el espectro de fluorescencia habrá bandas de frecuencia ν_{1k} ($k = 3, 4, 5, \ldots$), que cumplirán la regla de Stokes, y bandas de frecuencia ν_{12}, ν_{11}, ν_{10}, que contradecirán dicha regla.

§ 355. Espectros de rotación de las moléculas. La energía rotacional de una molécula diatómica rígida, según se demuestra en la Mecánica cuántica, puede tomar los valores

$$W_r = \frac{\hbar^2}{2J} m(m+1). \qquad (1)$$

siendo $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *el número cuántico rotacional.* La magnitud J representa el momento de inercia de la molécula. Como vemos en la fórmula (1), a medida que aumenta m los niveles rotacionales se van encontrando cada vez más separados unos de otros (fig. 345). Supongamos que una molécula se encuentra en su estado electrónico normal y en el estado vibracional más profundo ($n = 0$). Veamos cómo se producen las transiciones entre los niveles rotacionales. Estas transiciones se rigen por la regla de selección

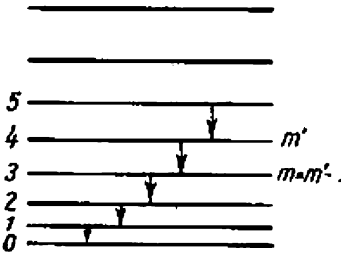

Fig. 345. Niveles de rotación de la molécula.

$$\Delta m = \pm 1. \qquad (2)$$

El valor de $\Delta m = -1$ corresponde al proceso de emisión de luz, y el de $\Delta m = +1$ al proceso de absorción de la misma.

Hallemos la frecuencia ν de la luz emitida durante la transición entre dos niveles rotacionales contiguos caracterizados respectivamente por los números cuánticos m' y $m = m' - 1$. Por la fórmula (1) esta frecuencia será igual (en cm^{-1}) a:

$$\nu = \frac{\Delta W_r}{hc} = \frac{\hbar^2}{2Jhc} [m'(m'+1) - (m'-1)m']$$

o

$$\nu = \frac{\hbar}{4\pi Jc} 2m'. \qquad (3)$$

La tilde que lleva el número cuántico m indica que las rayas se cuentan a partir de los números cuánticos de los niveles superiores. Introduzcamos la designación

$$\frac{\hbar}{4\pi Jc} = B, \qquad (4)$$

entonces para la frecuencia ν obtenemos:

$$\nu = 2Bm', \qquad (3a)$$

donde $m' = 1, 2, 3, \ldots$ (el valor de $m' = 0$ corresponde al nivel más bajo, desde el que no es posible una transición con radiación. La fórmula (3a) da una serie de rayas equidistantes entre sí. Estas rayas se encuentran en la región infrarroja más remota, de longitud de onda del orden de cien micras. En definitiva tenemos que el espectro rotacional puro de las moléculas diatómicas consta de una serie de rayas equidistantes situadas en una región infrarroja muy remota. La distancia entre las rayas contiguas permite hallar la constante B, la cual, por la fórmula (4), está relacionada con el momento de inercia J. Para los momentos de inercia se obtienen valores del orden de 10^{-40} g·cm², por ejemplo, $J = 2{,}61 \cdot 10^{-40}$ g·cm² para las moléculas de HCl.

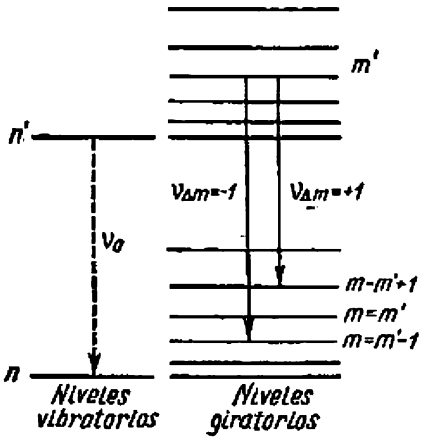

Fig. 346. Niveles de vibración-rotación de la molécula.

Partiendo de los valores conocidos de las masas de los núcleos se puede calcular la distancia de equilibrio r_0 entre ellos en la molécula diatómica. Para la molécula de CH se obtiene que $r_0 = 1{,}12$ Å, lo que está de acuerdo con las dimensiones de las moléculas halladas por otros procedimientos.

La fórmula (1) de la energía rotacional de la molécula es solamente aproximada. Cuando las velocidades angulares de rotación de la molécula son considerables esta última no puede considerarse rígida, puesto que la distancia de equilibrio r_0 entre los núcleos aumenta por la acción de las fuerzas centrífugas. Entonces la fórmula (1) tiene que ser sustituida por la fórmula

$$W_r = hc\,[Bm\,(m+1) - Cm^2\,(m+1)^2],$$

donde C es una segunda constante menor que B.

Veamos ahora lo que ocurre cuando se tienen dos niveles vibracionales n y n' pertenecientes a una misma configuración electrónica. El movimiento de rotación de la molécula hace que cada uno de estos niveles vibracionales se disgregue en una serie de niveles rotacionales caracterizados por los números cuánticos m y m' (fig. 346). La frecuencia de la luz emitida durante la transición desde un grupo de niveles rotacionales a otro es igual (en cm^{-1}) a:

$$\nu = \frac{\Delta W_v}{hc} + \frac{\Delta W_r}{hc}.$$

La frecuencia $\nu_0 = \frac{\Delta W_v}{hc}$ sería la emitida si no existiera rotación. En el caso en que $n - n' = -1$ éste sería el «tono fundamental» del espectro vibracional de la molécula (§ 354). Pero ahora, debido a la rotación de la molécula, el espectro resulta más complejo. Aplicando la expresión de la energía rotacional (1) tendremos:

$$\nu = \nu_0 + B\,[m'\,(m'+1) = m\,(m+1)]. \qquad (5)$$

Según la regla de selección (2) $\Delta m = m - m' = \pm 1$. En el caso en que $\Delta m = -1$ tenemos que $m = m' - 1$ y la fórmula (5) nos da:

$$\nu = \nu_0 + 2Bm', \quad \text{donde } m' = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (5a)$$

De la misma forma, para el caso en que $\Delta m = +1$ obtenemos:

$$\nu = \nu_0 - 2B\,(m'+1), \quad \text{donde } m' = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (5b)$$

Las fórmulas (5a) y (5b) dan dos grupos, o como suele decirse dos *ramas* de rayas. La primera de ellas ($\Delta m = -1$) se llama *negativa o rama R* y la segunda ($\Delta m = +1$) se llama *positiva o rama P*. Para

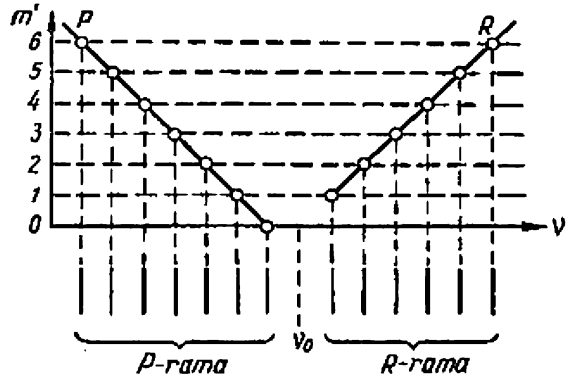

Fig. 347. Diagrama de las ramas P y R del espectro de vibración-rotación.

formarnos una idea clara de cómo están situadas las rayas en ambas ramas hagamos la siguiente construcción gráfica. Tomemos sobre el eje de ordenadas (fig. 347) los valores de los números enteros m' y sobre el eje de abscisas los de las frecuencias ν. Las expresiones (5a) y (5b), consideradas como funciones continuas de m', vendrán representadas por las rectas P y R. Las abscisas de los puntos de estas rectas correspondientes a los valores enteros de m' (que en la fig. 347 se señalan con circulitos) dan las posiciones que ocupan las rayas en ambas ramas. Las rayas de las dos ramas se encuentran situadas simétricamente con relación al punto $\nu = \nu_0$. En cada una de las ramas las rayas equidistan entre sí; la distancia entre ellas es igual

a $2B$. Las ramas están separadas entre sí por la distancia $4B$. La frecuencia ν_0, que sería la correspondiente a la transición entre los niveles vibracionales n', n si la molécula no girase, no se observa en el espectro. Esto ocurre porque la frecuencia ν_0 sería la emitida durante la transición «prohibida» $\Delta m = 0$. Con respecto a ν_0 las rayas de la rama P se encuentran en la parte de las frecuencias menores (o de las longitudes de onda mayores) y rayas de la rama R en la parte de las frecuencias mayores (o de las longitudes de onda menores). Los espectros de este tipo se llaman *de vibración-rotación*. Como la constante ν_0 es aditiva, el espectro de vibración-rotación está

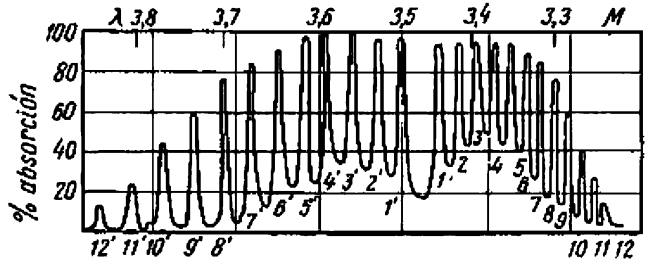

Fig. 348. Espectro de vibración de la molécula de HCl.

desplazado hacia el lado de las longitudes de onda menores, con respecto al de rotación pura, y se encuentra en la región en que λ es igual a varias micras, cuando se trata de moléculas ligeras, o igual a varias decenas de micras, cuando las moléculas son pesadas.

Por la diferencia de frecuencias entre las rayas del espectro de vibración-rotación se puede hallar el momento de inercia J de la molécula (lo mismo que se puede hallar por la diferencia de frecuencias entre las rayas del espectro de rotación pura). La intensidad de las rayas del espectro de absorción de vibración-rotación presenta la distribución característica que la fig. 348 representa referida a la molécula de HCl. Cuando un grupo de rayas como éste se observa con un instrumento cuyo poder separador no es suficiente las distintas rayas de cada rama se confunden y forman dos bandas anchas.

Estudiemos finalmente el caso en que varían simultáneamente los tres tipos de energía: electrónica, vibracional y rotacional. En este caso la frecuencia ν de la luz emitida durante la transición entre un par de niveles dado (fig. 349) será igual (en cm^{-1}) a:

$$\nu = \frac{\Delta W_{el}}{hc} + \frac{\Delta W_v}{hc} + \frac{\Delta W_r}{hc}.$$

Designando

$$\frac{\Delta W_{el}}{hc} + \frac{\Delta W_v}{hc} = \nu_{ev},$$

tendremos que

$$\nu = \nu_{ev} + \frac{\Delta W_r}{hc}.$$

Para un valor determinado de ν_{ev} tendremos una banda también determinada del espectro electrónico vibracional (§ 354). A los distintos valores posibles de ΔW_r les corresponden rayas distintas de la banda. De esta forma resulta que cada banda del espectro electrónico vibracional tiene una estructura rotacional compleja.

Determinemos la situación de las distintas rayas en la banda. Para esto aplicaremos la expresión (1) de W_r. Pero ahora deberemos tener en cuenta que cuando varían las configuraciones electrónicas varían las fuerzas de acción mutua entre los núcleos y, por consiguiente, varían también las distancias de equilibrio r_0 y los momentos de inercia J. Por esto las constantes B de ambos grupos de niveles de rotación serán diferentes.

Como resultado obtenemos que

$$\nu + \nu_{ev} B'm' (m' + 1) - Bm (m + 1). \qquad (6)$$

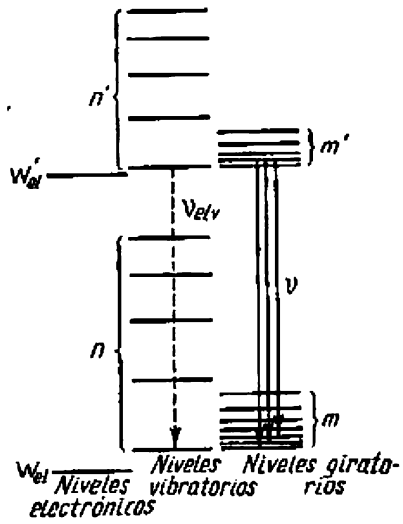

Fig. 349. Niveles electrónicos, vibracionales y rotacionales de las moléculas diatómicas.

Según la regla de selección (2), $m - m' = \pm 1$; esta regla es justa cuando ambos estados rotacionales se refieren a una misma configuración electrónica. Pero si las configuraciones electrónicas son diferentes, hablando en términos generales, también resultan posibles las transiciones $m - m' = 0$ (excepto en el caso en que $m = m' = 0$). Por esta razón, además de la rama P ($m - m' = +1$) y de la rama R ($m - m' = -1$) aparece una tercera rama, llamada *rama Q* (o *nula*), correspondiente a la transición $m - m' = 0$.

Examinemos la formación de estas tres ramas separadamente.

1) La rama P: $m - m' = +1$.

Por la fórmula (6) tenemos:

$$\nu = \nu_{ev} + B'm' (m' + 1) - B (m' + 1) (m' + 2).$$

Después de algunas transformaciones algebraicas sencillas esta fórmula toma la forma:

$$\nu = \nu_{ev} + (B' - B) (m' + 1)^2 - (B' + B) (m' + 1), \qquad (6a)$$

donde

$$m' = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

2) La rama Q: $m - m' = 0$.

Para la frecuencia ν, por la fórmula (6), hallamos:

$$\nu = \nu_{e0} + (B' - B)\, m'^2 + (B' - B)\, m', \qquad (6b)$$

donde $m' = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

3) La rama R: $m - m' = -1$.

En este caso la fórmula (6) da:

$$\nu = \nu_{e0} + (B' - B)\, m'^2 + (B' - B)\, m', \qquad (6c)$$

donde $m' = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Estas tres ramas pueden representarse gráficamente en un diagrama (fig. 350) análogo al de la fig. 347, en el que sobre el eje de abscisas se toman las frecuencias ν y sobre el de ordenadas los números enteros m'. Para cada una de las ramas se obtiene una curva.

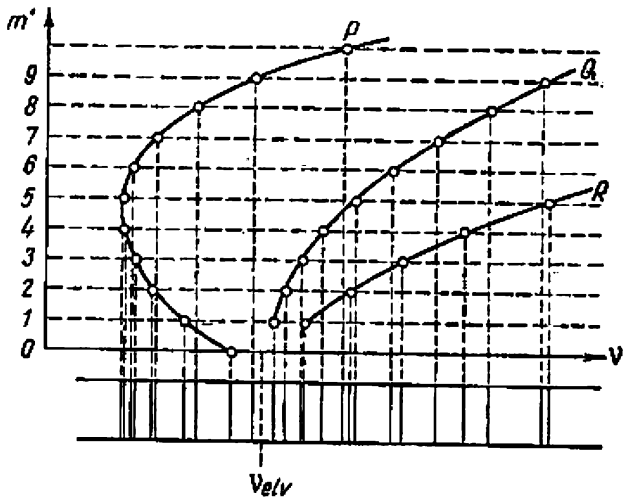

Fig. 350. Diagrama de las ramas P, Q y P de un espectro electrónico-vibracional-rotacional.

Estas curvas, de acuerdo con las ecuaciones (6a), (6b) y (6c), son parábolas. La situación de las rayas en las ramas viene determinada por las abscisas de los puntos de las curvas P, Q y R correspondientes a los valores enteros de m'. Las rayas de las distintas ramas se superponen. En el sitio en que $\nu = \nu_{e0}$ no existe raya, puesto que la transición $m' = 0 \to m = 0$ está «prohibida». Como puede verse las rayas se encuentran muy próximas entre sí junto a $\nu = \nu_{e0}$ (sobre todo en el sitio en que se dobla la rama P). Si $B' > B$, la rama P

se dobla en la dirección en que aumentan las frecuencias (éste es el caso representado en la fig. 350). En este caso las rayas se corren hacia el lado de las mayores frecuencias dentro de la banda; de esta banda se dice que está sombreada en la parte violeta del espectro. Cuando $B' < B$ la banda está sombreada en la parte roja del espectro. Se suelen observar ambos tipos de bandas. El caso $B' > B$ significa que cuando la molécula se encuentra en estado electrónico excitado tiene menor momento de inercia y, por consiguiente, menor distancia de equilibrio r_0 entre sus núcleos que cuando se halla en estado normal.

Como quiera que B es inversamente proporcional al momento de inercia de la molécula, las moléculas ligeras presentan bandas de estructura rotacional más anchas, mientras que las moléculas pesadas las presentan más estrechas. Por ejemplo, en el espectro de la molécula de LiH las distintas rayas se encuentran bastante separadas en la banda, mientras que en el de la molécula pesada J_2 se hallan extraordinariamente próximas entre sí.

§ 356. Estados electrónicos de las moléculas diatómicas. Como indicamos, en el párrafo 353, dentro de las moléculas los electrones internos forman en torno a los núcleos las mismas capas completas que en los átomos libres; en cambio, los electrones exteriores se encuentran en ellas en condiciones completamente distintas que en los átomos, puesto que se mueven en el campo eléctrico de ambos núcleos. Este campo eléctrico tiene simetría axial, con la particularidad de que el eje de simetría es la recta que une ambos núcleos. De esta forma, en las moléculas diatómicas existe una dirección privilegiada con relación a la cual se orientan los electrones exteriores. Por esta razón, cuando nos referimos a una molécula diatómica tiene sentido hablar no del propio momento orbital del electrón p_l, sino de su proyección p_{lz} sobre el eje de la molécula. La magnitud de esta proyección toma los valores $p_{lz} = \lambda\hbar$, donde λ es un número cuántico igual a 0, 1, 2, . . . El número cuántico λ es análogo al número cuántico m_l, que en los átomos sirve para determinar la magnitud de la proyección del momento p_l sobre la dirección del campo exterior. Cada uno de los valores de λ (excepto $\lambda = 0$) puede tener dos sentidos distintos al proyectarse sobre el eje de la molécula. Los estados electrónicos correspondientes a los distintos valores de λ se designan, lo mismo que en los átomos, por medio de letras, pero en lugar de las letras latinas se emplean las griegas. De esta forma

a los valores de λ iguales a	0 1 2 . . .
les corresponden las letras	σ π δ . . .

Si la capa electrónica está formada por varios electrones su estado se puede caracterizar por el valor de la suma de las proyeccio-

nes de los momentos sobre el eje de la molécula, es decir, por la suma Σp_{lz}. El valor de esta suma viene determinado por el número cuántico Λ igual a la suma algebraica de los números cuánticos λ_l:

$$\Lambda = \Sigma \lambda_l. \qquad (1)$$

Los estados de la capa electrónica de la molécula también se designan con letras, de forma que

a los valores de Λ iguales a	0	1	2	...
les corresponden las letras	Σ	Π	Δ	...

Es evidente que a dos electrones σ les corresponderá un estado Σ único, puesto que los dos números cuánticos λ_1 y λ_2 son iguales a cero. En el caso de dos electrones π tendremos que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$ y por la fórmula (1) el número cuántico Λ puede tomar los valores: $1 - 1 = 0$ y $1 + 1 = 2$. En el primer caso el estado de la capa vendrá caracterizado por el símbolo Σ y en el segundo por el símbolo Δ.

El momento espinorial de cada electrón dentro de la molécula se caracteriza, lo mismo que en el átomo, por el hecho de que su proyección sobre la dirección privilegiada (en este caso sobre el eje de la molécula) puede tomar los dos valores siguientes:

$$p_{sz} = \pm \frac{1}{2} \hbar.$$

Si la capa electrónica está formada por varios electrones hay que tener en cuenta la suma de las proyecciones de los momentos espinoriales de los electrones sobre el eje de la molécula. Esta suma se determina por un número cuántico que se designa con la letra griega Σ (que no debe confundirse con el símbolo del estado de la capa electrónica de la molécula de $\Lambda = 0$). Finalmente, la suma total de las proyecciones de todos los momentos (orbitales y espinoriales) se determina por medio del número cuántico $\Omega = \Lambda + \Sigma$. Para cada valor dado de Λ el número cuántico Ω puede tomar $2S + 1$ valores diferentes, que corresponden a las $2S + 1$ orientaciones distintas que puede tener el momento espinorial resultante de los electrones con respecto al eje de la molécula [S es el número cuántico del momento espinorial resultante de los electrones (véase el § 348)]. De esta forma, lo mismo que en el caso de los átomos, tenemos un desdoblamiento múltiple de los niveles. El grado de multiplicidad se designa con un número que se pone en la parte superior izquierda del símbolo del término; el valor del número cuántico Ω se pone en forma de subíndice. Por ejemplo, en el caso en que la capa electrónica de la molécula tiene un solo electrón π, $\Lambda = 1$ y la molécula estará en el estado Π. En este caso la proyección del momento espinorial del electrón puede tomar los valores $\pm \frac{1}{2} \hbar$, de donde para el número cuántico Ω se obtienen los dos valores posibles siguientes:

$$\Omega = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \Omega = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Como resultado obtenemos el estado Π doblete: $^2\Pi_{1/2}$ y $^2\Pi_{3/2}$.

Dentro de la molécula, lo mismo que en el átomo, los electrones cumplen el principio de Pauli. Gracias a esto resulta que en una molécula no puede haber más de dos electrones σ, más de cuatro electrones π y más de cuatro electrones δ.

Las transiciones entre los niveles satisfacen la regla de selección:

$$\Delta\Lambda = 0, \pm 1.$$

Los niveles energéticos de la molécula pueden compararse con los niveles de los átomos que la forman. Para esto hay que ir aproximando mentalmente

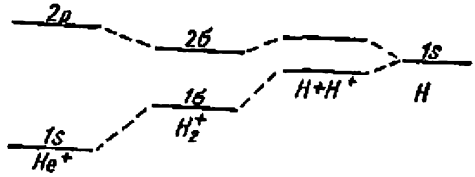

Fig. 351. Comparación de los niveles del ion molecular H_2^+ con los niveles del hidrógeno atómico H y del ion de helio He^+.

dos átomos, inicialmente muy alejados entre sí, teniendo en cuenta sus perturbaciones mutuas. Expliquemos este procedimiento tomando como ejemplo la formación del ion molecular H_2^+. Este ion puede considerarse que está formado por un átomo neutro de hidrógeno H y de un protón H^+. Mientras estas dos partículas se encuentran muy distantes entre sí el átomo de hidrógeno conserva su grupo de niveles ordinario; el estado más profundo de su único electrón es el 1s (fig. 351, parte derecha). Al acercarse el protón al átomo de H este último se va encontrando bajo la influencia del campo eléctrico del protón y en él se produce el efecto Stark; como resultado, el nivel 1s se divide en dos. Cuando la aproximación del átomo H y del protón H^+ es mayor los niveles desdoblados experimentan un desplazamiento. Si, finalmente, aproximamos mentalmente el protón H^+ al centro del átomo H, tanto que pueda fundirse con su núcleo, se producirá un sistema compuesto por un núcleo de carga $E = +2e$ y por un electrón. Este sistema representa al átomo de helio He^+ ionizado (es decir, a su isótopo de peso atómico 2). Los niveles de este ion serán, como puede demostrarse, 1s y 2p (parte izquierda de la fig. 351). De esta forma el término desdoblado 1s del hidrógeno se convierte en los dos niveles del He^+. Una situación intermedia de las partículas H y H^+ es la que representa de por sí el ion molecular H_2^+ con sus niveles moleculares 1σ y 2σ, los cuales corresponden de esta forma a un nivel 1s del átomo de hidrógeno y a dos niveles 1s y 2p del ion de He^+. Se puede demostrar que al nivel 1σ le corresponde una curva potencial con un mínimo (curva 1 de la fig. 352) y, por consiguiente, el estado estable de la molécula $^2\Sigma$. Al estado 2σ le corresponde una curva potencial de crecimiento ininterrumpido (la curva 2 de la fig. 352). Esto quiere decir que, en este estado, entre las partículas H y H^+ actúan durante todo el tiempo fuerzas de repulsión y no se forma una molécula estable.

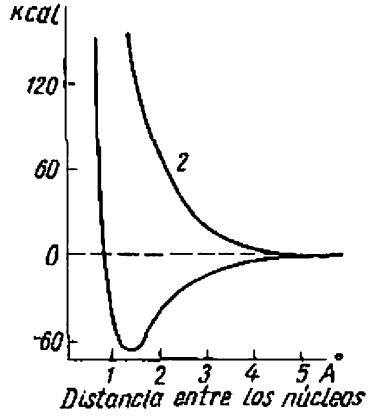

Fig. 352. Curvas potenciales del ion molecular H_2^+.

§ 357. Disociación de las moléculas. En el § 354 señalamos ya que el sitio en que los niveles vibracionales se unen corresponde a una

separación infinita de los núcleos, es decir, al proceso de disociación de las moléculas. La energía de disociación D («calor» de disociación) se determina por el trabajo necesario para hacer pasar la molécula desde su estado normal a su estado disociado. Este trabajo es aproximadamente igual al valor de W_{p0} (fig. 353). Sería exactamente

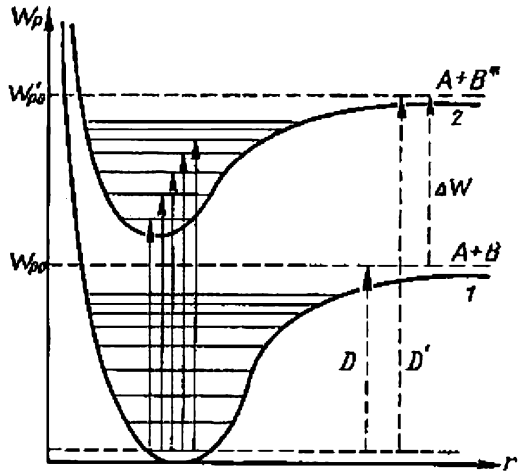

Fig. 353. Energías de disociación: D, de la molécula no excitada; D', de la molécula excitada.

igual a W_{p0} si la molécula en estado normal no realizara vibraciones. En realidad existe una energía vibracional «nula» ($n = 0$) igual a $\frac{1}{2}a$. Por esta razón la energía de disociación $D = W_{p0} - \frac{1}{2}a$. Pero como $\frac{1}{2}a \ll W_{p0}$, consideraremos que aproximadamente

$$D = W_{p0}. \qquad (1)$$

Examinemos los métodos para determinar la energía de disociación D. Esta energía puede hallarse por el método de la confluencia de los niveles vibracionales. Este método consiste en hallar en el espectro electrónico-vibracional las frecuencias correspondientes a una columna (dadas por el nivel superior y varios niveles inferiores) ν_{i0}, ν_{i1}, ν_{i2}, ν_{i3}, . . . (véase la tabla XXIII) e interpolar la serie que forman al valor $\nu_{\lim}$ para el cual la diferencia entre las frecuencias sucesivas $\Delta\nu_{ik}$ tiende a cero. Este valor de $\nu_{\lim}$ (expresado en cm^{-1}) estará relacionado con la energía de disociación D por la correlación $D = \nu_{\lim} \cdot hc$.

Además de la energía de disociación de la molécula D, correspondiente a su estado electrónico normal, se puede determinar la energía de disociación de la molécula D' en su estado electrónico excitado.

La curva potencial correspondiente al estado excitado de la molécula es la representada por la curva 2 de la fig. 353, todos los puntos de esta curva se encuentran más arriba que los de la curva 1 del estado normal de la molécula. La energía de disociación D' es igual al valor de la energía potencial W'_{p0} (si se desprecia la energía «nula» $\frac{1}{2}$ a):

$$D' = W'_{p0}. \qquad (2)$$

El valor de D' se puede hallar observando el espectro de absorción de las moléculas. El espectro de absorción electrónico-vibracional está formado por bandas que se producen durante la transición desde el nivel inferior a la serie de niveles vibracionales sucesivos de la molécula excitada (señalados por medio de flechas en la fig. 353). A ellos les corresponde una serie de bandas de absorción confluentes (fig. 354). Más allá del límite de la confluencia de las bandas se

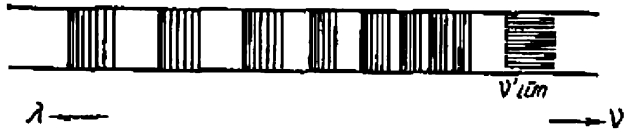

Fig. 354. Sistema de bandas de absorción.

encuentra una región de absorción continua, en la que una parte de la energía de la luz absorbida sirve para comunicar energía cinética a las partes de la molécula que se disocia. Hallando por medio de la interpolación el límite de la confluencia de las bandas $\nu'_{lím}$, podemos determinar directamente la energía de disociación de la molécula $D' = \nu'_{lím} \cdot hc$. Este método es completamente análogo al que se emplea para hallar el potencial de ionización de un átomo partiendo del límite de la serie principal, la cual puede observarse también, en absorción (fig. 331). Estos dos procesos son análogos: en el caso del átomo, al ir aumentando la energía del fotón absorbido el electrón pasa a niveles energéticos cada vez más altos, hasta que llega un momento en que es expulsado del átomo; en el caso de la molécula, al ir aumentando la energía del fotón absorbido la molécula pasa a niveles vibracionales cada vez más altos, hasta que por fin se disocia. A ambos procesos (fotoionización y disociación) les corresponde un espectro de absorción continuo que se encuentra respectivamente más allá de los límites de la serie principal del átomo y más allá de los límites de las bandas de absorción de las moléculas.

Entre las dos energías de disociación D y D' existe una relación determinada. Al disociarse una molécula normal surgen dos átomos que también se encuentran en estados normales, los cuales se designan en la fig. 353 con el símbolo $A + B$. Cuando la molécula que se disocia está excitada uno de los átomos que se producen también está

excitado, cosa que en la fig. 353 se marca con un asterisco. La diferencia entre las energías W_{p0} y W_{p0} es igual a la energía de excitación del átomo ΔW. Por lo tanto, de acuerdo con las correlaciones (1) y (2) obtenemos:

$$D' = D + \Delta W. \qquad (3)$$

Si se conoce la energía de excitación del átomo y una de las energías de disociación (D o D') se puede hallar la otra energía por la igualdad (3).

El método de A. N. Terénin para determinar la energía de disociación de las moléculas se basa en la igualdad (3). Este método consiste en observar el espectro de fluorescencia. Cuando se ilumina un vapor formado por moléculas diatómicas con una luz cuya frecuencia coincide con la de una de las bandas de absorción en el espectro de fluorescencia también se observan las bandas moleculares. Si la frecuencia de la luz excitadora es $\nu > \nu_{\text{lím}}$, la molécula se disocia y aparecen átomos excitados. Estos átomos, al volver a su estado normal, emiten una raya atómica. De esta forma el comienzo del proceso de disociación se nota porque en el espectro de fluorescencia aparece una raya atómica. La frecuencia mínima con que aparece la raya atómica da el valor de $\nu_{\text{lím}}$ que sirve para determinar D'. Este método fue aplicado a vapores de diversos compuestos de los metales alcalinos con los halógenos. Veamos, por ejemplo, el caso del vapor formado por moléculas de NaCl. Si la frecuencia de la luz excitadora $\nu > \nu_{\text{lím}}$, se produce un proceso de fotodisociación que sigue el esquema siguiente:

$$NaCl + h\nu \rightarrow Na^* + Cl,$$

donde Na* es el átomo excitado de sodio. Este átomo se encuentra en el estado 2P. Al volver a su estado normal 1S emite la raya amarilla $\nu = 1S - 2P$. La aparición de las rayas amarillas D del sodio fue precisamente la que observó Terénin iluminando el vapor de NaCl con luz ultravioleta cuya longitud de onda era menor de 2 000 Å.

La energía de disociación de las moléculas diatómicas es una magnitud del orden de varios electrón-voltios, es decir, de varias decenas de millares de calorías por mol. Así para el NaCl la energía de disociación $D = 97{,}7$ kcal/mol.

Las moléculas, como vimos en el § 356, pueden tener, además de sus estados estables, estados inestables a los cuales responde una curva sin mínimo. La disociación de la molécula puede ocurrir al pasar desde un estado estable a otro inestable. El proceso de transición de una molécula a la curva inestable corresponde a la región del espectro de absorción continuo. Como el estado inestable no está cuantificado no se caracteriza por ninguna serie discreta de niveles energéticos, pero conduce a cualquier valor de la energía comprendido en un intervalo determinado. La experiencia demuestra que un espectro de este tipo, que conduzca a la disociación, abarca solamente determinados sectores de

longitudes de ondas. Este espectro presenta bandas de absorción anchas y confusas. Dichas bandas se diferencian de las moleculares que hemos estudiado anteriormente porque son verdaderamente «continuas», es decir, porque no pueden ser divididas con ningún instrumento espectroscópico en rayas aisladas. La aparición de estas franjas se explica por medio del *principio de Franck-Condon*. Este principio se basa en el hecho de que los núcleos moleculares tienen una masa relativamente grande y vibran relativamente despacio. En cambio, la reestructuración de los estados de movimiento de los ligeros electrones, bajo

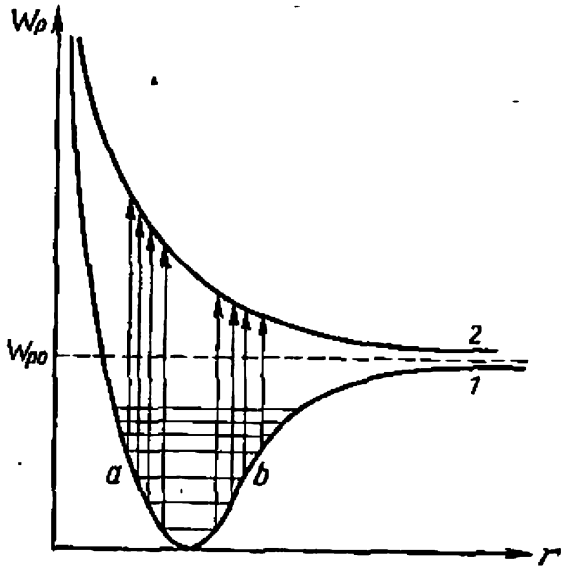

Fig. 355. Origen del espectro de absorción continuo por transición desde una curva potencial estable a otra inestable.

la influencia de la luz absorbida, se produce con extraordinaria rapidez. Por esto *la transición, estimulada por la luz absorbida, desde una curva potencial a otra se produce sin que varíe la distancia entre los núcleos.*

Examinemos desde el punto de vista del principio de Franck-Condon la transición desde la curva potencial estable *1* (fig. 355) a la curva inestable *2*. A cada uno de los valores de la energía total de la molécula en vibración le corresponde en la fig. 355 una línea horizontal. En los puntos en que estas líneas horizontales cortan la curva potencial (puntos *a* y *b*) toda la energía, potencial y cinética de vibración de la molécula, es igual a cero; en los demás puntos una parte de la energía es potencial y otra cinética. En aquellos momentos en que la energía cinética es igual a cero los núcleos se encuentran en los puntos de elongación máxima con respecto a sus posiciones de equilibrio y su velocidad pasa por el valor cero. Cuando los núcleos pasan por sus posiciones de equilibrio se mueven con la velocidad máxima. Por lo tanto, lo más frecuente es que se hallen en posiciones próximas a las elongaciones máximas (de forma análoga a como un péndulo oscilante se encuentra la mayor parte del tiempo en las posiciones correspondientes a sus elongaciones máximas). De esto resulta que el acto de la absorción de la luz tendrá lugar con mayor frecuencia en aquellos momentos en que los núcleos estén más alejados de sus posiciones de equilibrio y, por esto, las transiciones desde la curva *1* a la *2* están representadas por dos

grupos de flechas trazadas desde los extremos de las líneas horizontales representativas de la energía total de la molécula vibrante. Cada una de estas flechas, por el principio de Franck-Condon, une entre sí dos puntos, de las curvas *1* y *2*, que tienen igual r. Uno de los grupos de flechas se encuentra en la región próxima al valor $r = r_{mín}$ y el otro en la región próxima al valor $r = r_{máx}$. La primera de estas regiones corresponde a la banda de ondas más cortas de la absorción continua; la segunda, a la de ondas más largas.

La absorción continua es posible también en aquellos casos en que ambas curvas potenciales son estables, siempre que el mínimo de la curva correspondiente a la molécula excitada esté desplazado hacia el lado de los valores de r mayores, con respecto al de la curva de energía potencial de la molécula

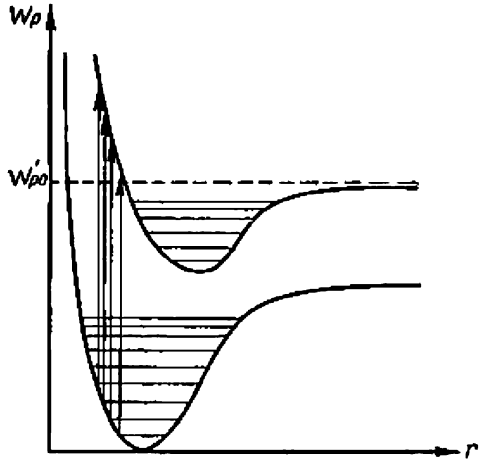

Fig. 356. Origen del espectro de absorción continuo por transición entre dos curvas potenciales estables.

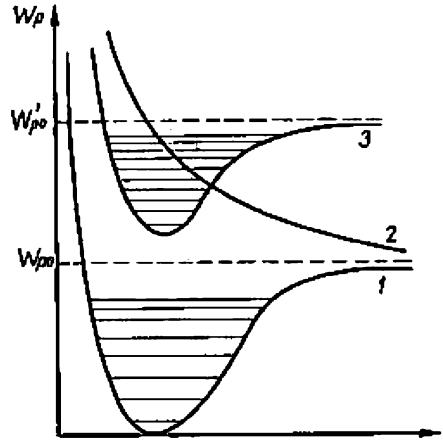

Fig. 357. Origen de la predisociación de la molécula.

normal (fig. 356). De acuerdo con el principio de Franck-Cordon las transiciones entre estas dos curvas también deben producirse entre aquellos puntos que tienen igual r. Por esta razón, las transiciones desde las regiones de la curva inferior próximas al valor $r = r_{mín}$ darán lugar a que la molécula excitada adquiera una energía $W_p > W'_{p0}$ (fig. 356). En este caso sus núcleos resultarán tan próximos entre sí que repeliéndose el uno al otro pasarán a través de la posición de equilibrio y escaparán en direcciones opuestas; de esta forma la molécula también resulta disociada.

Junto a estos procesos de absorción continua de la luz pueden ocurrir procesos inversos, es decir, en que las moléculas emitan un espectro continuo. La emisión de un espectro continuo se produce cuando dos átomos que se aproximan a lo largo de una curva potencial inestable pasan espontáneamente a una curva estable. Pero estas emisiones son poco frecuentes. Lo más probable es la emisión del espectro continuo durante la transición desde una curva potencial estable más alta a una curva inestable más baja. Como ejemplo de este tipo puede servir la emisión del espectro continuo intenso que se obtiene cuando se produce una descarga eléctrica en hidrógeno.

Finalmente, examinaremos otro proceso llamado predisociación. Este proceso se observa en aquellos casos en que dos curvas potenciales se cortan. Supongamos que una curva potencial inestable *2* corta a la curva estable de una molécula excitada *3* (fig. 357). Según la Mecánica cuántica, si dos curvas energé-

ticas se cortan existe una probabilidad determinada de que se produzca el paso espontáneo de una a otra. Por esto, en el caso que representa la fig. 357 es posible la transición desde los niveles vibracionales de la curva excitada (señalados con líneas rayadas) a la curva inestable, lo que da lugar a la disociación de la molécula.

De esta forma, la disociación se produce aunque la molécula excitada no haya alcanzado la energía W'_{p0}. Los niveles vibracionales más elevados vuelven a ser estables. La predisociación se pone de manifiesto en el espectro porque una parte de las bandas se hace más débil y confusa; esto se explica por el hecho de que los niveles desde los cuales es posible la transición a la curva inestable tienen un período de vida corto.

§ 358. Influencia de la isotopía en los espectros moleculares. Como sabemos (t. II, § 219), casi todos los elementos tienen varios tipos de átomos, llamados isótopos, que se diferencian entre sí exclusivamente por sus pesos atómicos. Las frecuencias de los espectros de vibración y de rotación de las moléculas son distintas para los diversos isótopos de un mismo elemento. Esto se debe a que las frecuencias de los espectros de vibración ν_v dependen de la masa reducida de la molécula, y las frecuencias de los espectros de rotación ν_r, de los momentos de inercia, y éstos a su vez de la masa reducida. Estudiemos separadamente la influencia que ejerce la isotopía sobre los espectros de vibración y de rotación.

La frecuencia del espectro de vibración ν_v, según lo dicho en el § 354, es

$$\nu_v = \frac{\Delta n}{2\pi c}\sqrt{\frac{k}{M}} \qquad (1)$$

donde M es la masa reducida de la molécula y Δn la variación del número cuántico vibracional. Las moléculas que se diferencian entre sí únicamente por su composición isotópica tienen el mismo número de electrones en los mismos estados. Por lo tanto, la constante k es igual para ellas y solamente tendrán distintas las masas reducidas M. Veamos lo que ocurre con una molécula diatómica AB. Supongamos que el primero de sus átomos tiene un solo isótopo A de masa m_A y el segundo dos isótopos B y B' cuyas masas respectivas son m_B y $m_{B'}$. En este caso existirán dos tipos de moléculas: AB y AB', cuyas masas reducidas respectivas serán $M = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ y $M' = \frac{m_A m_{B'}}{m_A + m_{B'}}$. Los pesos atómicos de los isótopos de un mismo elemento se diferencian entre sí en una o dos unidades de peso atómico. Por esto, si los átomos que forman las moléculas tienen pesos atómicos no muy pequeños la diferencia entre las masas reducidas $\Delta M = M' - M$ es pequeña en comparación con las propias masas reducidas M y M'.

Por la fórmula (1) la diferencia de frecuencias de los espectros de vibración $\Delta\nu_v = \nu'_v - \nu_v$ de ambas moléculas AB' y AB será

$$\Delta\nu_v = \frac{\Delta n}{2\pi c}\left(\sqrt{\frac{k}{M'}} - \sqrt{\frac{k}{M}}\right)$$

o

$$\Delta\nu_v = \frac{\Delta n}{2\pi c}\sqrt{\frac{k}{M}}\left(\sqrt{\frac{M}{M'}} - 1\right).$$

El factor que se encuentra delante del paréntesis del segundo miembro de esta igualdad es igual, por la fórmula (1), a la frecuencia ν_v, de donde obtenemos que

$$\Delta\nu_v = \nu_v\left(\sqrt{\frac{M}{M'}} - 1\right). \qquad (2)$$

Y como $M = M' - \Delta M$, tendremos

$$\frac{M}{M'} = 1 - \frac{\Delta M}{M'};$$

de donde aproximadamente resulta

$$\sqrt{\frac{M}{M'}} = \sqrt{1 - \frac{\Delta M}{M'}} \cong 1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta M}{M'},$$

después de lo cual la fórmula (2) toma la forma

$$\Delta\nu_v = -\nu_v \cdot \frac{1}{2}\frac{\Delta M}{M'}. \qquad (2a)$$

Puede apreciarse fácilmente que si la masa del átomo B es mucho menor que la del átomo A, $\Delta M/M'$ será aproximadamente igual a $\Delta m_B/m_B$, donde Δm_B es la diferencia entre los pesos atómicos de los isótopos B y B'. Para los átomos de peso atómico medio $\Delta M/M'$ es una magnitud del orden de $\frac{1}{10} \sim \frac{1}{50}$, por lo que, como puede verse en la fórmula (2a), el desplazamiento isotópico de las frecuencias de vibración es suficientemente grande y puede ser descubierto con instrumentos de poder separador medio. Como quiera que ν_v entra también, como magnitud aditiva, en la expresión de las frecuencias de los espectros electrónico-vibracionales, todas las bandas de dicho espectro también presentan un desplazamiento isotópico. Los isótopos C^{13}, N^{15}, O^{17}, O^{18} y otros fueron descubiertos por el desplazamiento observado en las bandas moleculares. En las condiciones normales de la Tierra el isótopo pesado del carbono C^{13} se encuentra mezclado en cantidad de un 1% con el isótopo principal C^{12}. No obstante, gracias a la gran sensibilidad del método espectroscópico, las moléculas $C^{12}C^{13}$ son fáciles de descubrir. Las moléculas $C^{13}C^{13}$ se encuentran muy raras veces. En la foto 4 (véase el apéndice) se muestra la banda C_2 de longitud de onda λ de cerca de 4 737 Å.

Delante de la cabeza de la banda principal ($C^{12}C^{12}$) se encuentra la cabeza de la banda de la molécula $C^{12}C^{13}$, que es más débil y está desplazada hacia el lado de las longitudes de onda mayores.

Estudiemos ahora la influencia que ejerce la isotopía sobre el espectro de rotación de una molécula diatómica. Según la fórmula (3) del § 355, la frecuencia de un espectro de rotación puro es igual:

$$\nu_r = \frac{\hbar}{2\pi J c} m', \tag{3}$$

donde J es el momento de inercia de la molécula y m' el número cuántico rotacional, que toma los valores 1, 2, 3, . . . Para una diferencia de frecuencias $\Delta\nu_r = \nu'_r - \nu_r$ entre los espectros de rotación de las moléculas AB' y AB obtenemos:

$$\Delta\nu_r = \frac{\hbar}{2\pi c} m' \left(\frac{1}{J'} - \frac{1}{J}\right) = \frac{\hbar}{2\pi J c} m' \left(\frac{J}{J'} - 1\right). \tag{4}$$

Esta expresión, con ayuda de la igualdad (3), se puede representar de la forma:

$$\Delta\nu_r = \nu_r \left(\frac{J}{J'} - 1\right).$$

Y como $\frac{J}{J'} = \frac{M}{M'}$, tendremos que $\frac{J}{J'} - 1 = -\frac{\Delta M}{M'}$, y la fórmula (4) toma la forma:

$$\Delta\nu_r = -\nu_r \frac{\Delta M}{M'}. \tag{4a}$$

Comparando las fórmulas (2a) y (4a) vemos que el valor relativo del desplazamiento isotópico $\Delta\nu/\nu$ es dos veces mayor para los espectros de rotación que para los de vibración. Pero como las propias

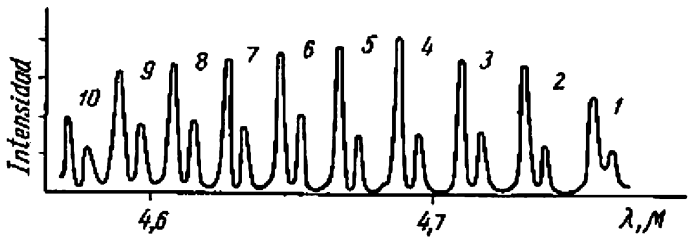

Fig. 358. Desplazamiento isotópico en la estructura rotacional de la banda infrarroja del HCl.

frecuencias ν_r son considerablemente menores que las ν_v; resulta que el valor absoluto del desplazamiento que se observa en los espectros de rotación es menor. Además de esto, los espectros de rotación puros se hallan en la región infrarroja remota del espectro, en la cual la observación es más difícil. El desplazamiento isotópico

se observa generalmente en la estructura rotacional de las bandas vibracionales o electrónico-vibracionales. En nuestro caso este desplazamiento es relativamente pequeño. Pero a pesar de todo puede notarse si se emplean instrumentos espectroscópicos adecuados. En la fig. 358 se muestra la influencia que ejerce la isotopía sobre la estructura de las bandas de rotación de las moléculas de HCl. Cuando el instrumento espectroscópico tiene suficiente poder separador se ve que todas las rayas son dobles: una de las componentes pertenece a la molécula HCl^{35} y la otra a la molécula HCl^{37}.

§ 359. Difusión de combinación de la luz. Un método muy importante de estudio de las propiedades de las moléculas es el llamado de *difusión de combinación de la luz*, es decir, aquella difusión con la cual varía la frecuencia. En el § 284, al estudiar el paso de la luz a través de medios turbios, vimos que la frecuencia ν de los rayos difundidos coincide con la frecuencia ν_0 de los rayos primarios. Este fenómeno tiene lugar tanto cuando la difusión se debe a cualquier clase de partículas extrañas incluidas en el medio como cuando la difusión está producida por las fluctuaciones de la densidad debidas al movimiento térmico. Pero esto ocurre así mientras las vibraciones de las partículas difusoras no originan variaciones periódicas de la misma amplitud que los rayos difundidos. Cuando ocurre esto último la luz difusa resulta *modulada*. En el t. I, § 104 vimos que la modulación de las vibraciones conduce a una variación de la frecuencia. Efectivamente, supongamos que en la vibración $x = a \cos 2\pi\nu_0 t$ la magnitud a varía a su vez periódicamente ateniéndose a la ley $a = a_0 \cos 2\pi\nu' t$, en este caso

$$x = a_0 \cos 2\pi\nu' t \cdot \cos 2\pi\nu_0 t = \frac{a_0}{2} \cos 2\pi (\nu_0 + \nu') t + \frac{a_0}{2} \cos 2\pi (\nu_0 - \nu') t.$$

La última igualdad demuestra que la vibración modulada se descompone en dos vibraciones armónicas cuyas frecuencias son $\nu = \nu_0 \pm \nu'$. Por esta razón la luz de frecuencia ν_0 al ser difundida por centros que periódicamente varían la amplitud de los rayos difundidos cambiará también de frecuencia, es decir, en lugar de los rayos primarios de frecuencia ν_0 aparecerán rayos de dos frecuencias diferentes $\nu = \nu_0 \pm \nu'$.

L. I. Mandelshtam indicó que este género de modulaciones de la luz se puede obtener cuando los rayos son difundidos por las condensaciones que produce en los cristales el movimiento térmico. En el t. I, § 93, señalamos que el movimiento térmico da lugar a que en la red cristalina se formen ondas estacionarias. A esto se debe que en lugares determinados de dichos cristales se produzcan periódicamente condensaciones y dilataciones (o enrarecimientos) que dan lugar a la difusión modulada de la luz. El cálculo demuestra que la frecuencia de modulación alcanza en los cristales de cuarzo una

magnitud del orden de 10^{10} s^{-1}. Como la frecuencia de la luz es una magnitud del orden de 10^{15} s^{-1}, como resultado de la modulación se aprecia una variación de la frecuencia inicial aproximadamente igual a una milésima por ciento. Este efecto, a pesar de su insignificancia, puede ser observado. El primero en establecer experimentalmente la variación de la frecuencia que experimenta la luz difundida por las ondas térmicas estacionarias que se producen en los cristales fue el físico leningradense E. F. Gross.

Otra causa capaz de producir la modulación de la luz es la vibración de los átomos que forman las moléculas. También aquí en lugar de los rayos primarios de frecuencia ν_0 deberán aparecer en la luz difusa rayos con frecuencias $\nu = \nu_0 \pm \nu'$, donde ν' es la frecuencia de las vibraciones propias de los átomos dentro de la molécula. Como esta frecuencia $\nu' \cong 10^{12}$ s^{-1}, la modulación debida a las vibraciones de los átomos es considerablemente más profunda que la producida por las ondas térmicas. Si la molécula tiene varios períodos propios de vibración ν', ν'', ν''', . . ., en la luz difusa deberán aparecer todas las frecuencias de «combinación» $\nu_1 = \nu_0 \pm \nu'$; $\nu_2 = \nu_0 \pm \nu''$; $\nu_3 = \nu_0 \pm \nu'''$; . . . De aquí que se llame *difusión de combinación* a la difusión de la luz con variación de frecuencia. Esto tipo de difusión fue descubierto experimentalmente en el año 1928 en la Universidad de Moscú por L. I. Mandelshtam y G. S. Landsberg al investigar la composición espectral de los rayos difundidos por cristales de cuarzo. Simultáneamente los físicos hindúes Raman y Krishnan observaron fenómenos análogos en la difusión de la luz producida por los líquidos. A pesar de que estos trabajos fueron realizados por los físicos soviéticos e hindúes de forma simultánea y totalmente independiente la literatura occidental liga a veces la difusión de combinación con el nombre de Raman exclusivamente, llamándole efecto Raman.

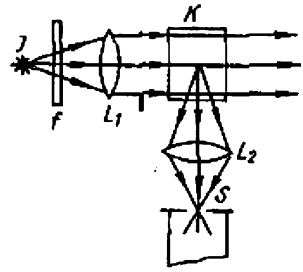

Fig. 359. Esquema para observar la difusión de combinación.

El esquema del experimento para observar la difusión de combinación de la luz en los cristales se muestra en la fig. 359. La fuente de luz es el arco de mercurio J; del espectro emitido por el vapor de mercurio se separa, por medio del filtro f, una raya de frecuencia ν_0. La luz que pasa por el filtro se dirige por medio de la lente L_1 al cristal K. Los rayos difundidos en dirección perpendicular a la del rayo primario se hacen incidir, por medio de la lente L_2, sobre la rendija del espectrógrafo S. Como la intensidad de la difusión de combinación es pequeña, hay que tomar medidas para que la difusión ordinaria, debida a las heterogeneidades del cristal, no sea demasiado fuerte. No obstante la difusión ordinaria («de Rayleigh») siempre

se produce y en el espectro de los rayos difusos existe una raya de frecuencia invariable ν_0. Las observaciones llevadas a cabo por Mandelshtam y Landsberg demostraron que a ambos lados de la raya de frecuencia invariable ν_0 se encuentran situadas simétricamente (en escala de las frecuencias) rayas satélites de frecuencias $\nu_1 = \nu_0 \pm \nu'$; $\nu_2 = \nu_0 \pm \nu''$; $\nu_3 = \nu_0 \pm \nu'''$ y así sucesivamente. Las magnitudes ν', ν'', ν''', . . . son características del cristal que se estudia y no dependen de la frecuencia ν_0 del haz de luz primario. Si el haz primario contiene varias rayas espectrales de frecuencias ν_i, junto a cada una de ellas se forman rayas satélites.

Las rayas satélites que con respecto a la raya principal se encuentran en el lado violeta del espectro ($\nu_1 = \nu_0 + \nu'$, etc.) son mucho más débiles que las rayas satélites que se hallan en la parte roja del mismo. Al aumentar la temperatura del cristal aumenta rápidamente la intensidad de las rayas satélites «violetas». La intensidad de las rayas satélites «rojas» no depende apreciablemente de la temperatura. Cuando la difusión de la luz es producida por líquidos se observan estas mismas regularidades.

De la comparación de las deducciones teóricas con los datos experimentales queda claro que las frecuencias ν', ν'', ν''', . . . que separan a las rayas satélites de la raya principal deben coincidir con las frecuencias de las vibraciones propias de los iones en el cristal. Estas mismas vibraciones pueden ponerse de manifiesto en la absorción de los rayos infrarrojos. Efectivamente, los valores de las frecuencias ν', ν'', ν''', . . . obtenidos por medición de las distancias que hay entre las rayas satélites en el espectro de difusión de combinación coinciden con las frecuencias de las bandas infrarrojas de absorción. Por ejemplo, cuando la luz se difunde en un cristal de cuarzo se observa, entre otras cosas, que las rayas satélites distan de la principal 127; 268; 465; 1 075 y 1 250 cm^{-1}. Este mismo cristal de cuarzo produce en la región infrarroja bandas de absorción de frecuencias ν = 128; 263; 480; 1 110 y 1 200 cm^{-1}. Estas dos series de frecuencias coinciden dentro de los límites del error de observación. Pero esta coincidencia entre las frecuencias que pone de manifiesto la difusión de combinación y la absorción infrarroja no se observa siempre. En el espectro de difusión de combinación que produce el cuarzo cristalino, además de las rayas satélites indicadas, hay otras que se encuentran a 208, 405 y 694 cm^{-1} de la raya principal. En el espectro infrarrojo de absorción no se revelan estas frecuencias. También puede ocurrir el caso contrario, es decir, aquel en que las rayas satélites del espectro de difusión de combinación no corresponden a las frecuencias de absorción. Estas discrepancias se explican por el hecho de que para modular los rayos difusos basta con que en la molécula se produzca un cambio en la disposición de sus diversas partes que dé lugar a la variación de su polarizabilidad, con la particularidad de que el momento eléctrico puede per-

manecer invariable. En cambio, para que las ondas luminosas electromagnéticas puedan ser absorbidas por la molécula deben producirse en ella vibraciones con variación del momento eléctrico. Ilustremos lo dicho con un ejemplo: supongamos que una molécula está constituida por tres iones (fig. 360), uno de ellos B positivo y los otros dos A y A' negativos, y que los tres están situados a lo largo de una recta. Si las vibraciones dentro de la molécula se reducen a las oscilaciones simétricas de los iones negativos A y A', durante las cuales los dos iones se mantienen durante todo el tiempo a iguales distancias del ion positivo B (fig. 360, *a*), el momento dipolar eléctrico de la molécula no varía. Lo único que cambia son las fuerzas que ejercen los núcleos sobre los electrones, que hacen que varíe la polarizabilidad de la molécula y, por consiguiente, su capacidad para difundir la luz. Pero si las vibraciones que tienen lugar en la molécula se deben a que el ion positivo B se acerca unas veces al ion A y otras al A' (fig. 360, *b*), el momento eléctrico de la molécula varía, y, por lo tanto, esta última puede absorber la radiación que incide sobre ella. Las vibraciones relacionadas exclusivamente con la variación de la polarizabilidad de las moléculas sólo se ponen de manifiesto en la difusión de combinación; las vibraciones que sólo dependen de las variaciones del momento eléctrico de las moléculas se revelan exclusivamente en los espectros infrarrojos de absorción. *En ambos fenómenos se descubren frecuencias que guardan relación con vibraciones que al producirse dan lugar a que varía la polarizabilidad y el momento eléctrico de la molécula.* La comparación de los espectros de difusión de combinación y de absorción da la posibilidad de descubrir unas características muy importantes de las vibraciones intramoleculares.

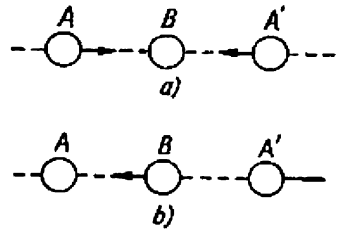

Fig. 360. Vibraciones: *a*, que hacen que varíe la polarizabilidad de la molécula; *b*, que hacen que varíe su momento eléctrico.

La explicación clásica de la difusión de combinación que acabamos de exponer dista mucho de ser completa. Con ella quedan sin esclarecer una serie de hechos, como, por ejemplo, la diferencia de intensidades entre las rayas satélites «violetas» y «rojas». La realidad es que la difusión de combinación, como todos los demás fenómenos relacionados con la interacción entre la luz y la materia, tiene un carácter cuántico. Desde el punto de vista que estudiamos en el § 354, la emisión y absorción de frecuencias vibracionales van ligadas a la transición de la molécula desde un estado energético a otro. Supongamos que una molécula se puede encontrar en una serie de estados energéticos de vibración W_0, W_1, . . ., W_i, . . . y que normalmente se halla en el estado de menor energía W_0. Como resul-

tado de la interacción de la molécula con un fotón, cuya energía sea $\varepsilon_0 = h\nu_0$ aquélla puede resultar trasladada a un estado energético W_i más elevado (fig. 361, *a*): esta transición requiere el gasto

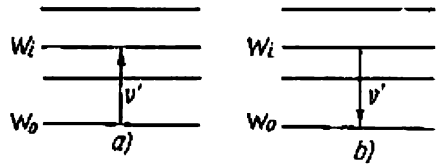

Fig. 361. Origen de las rayas satélites «roja» (*a*) y «violeta» (*b*).

de una cantidad de energía $\Delta W = W_i - W_0$. Por lo tanto, la energía del fotón disminuye en la magnitud ΔW y el nuevo fotón (difuso) que aparece tiene una energía

$$\varepsilon = h\nu = h\nu_0 - \Delta W.$$

De esta expresión se deduce que la frecuencia ν de los fotones difusos

$$\nu = \nu_0 - \frac{\Delta W}{h},$$

pero $\Delta W/h$ representa la frecuencia ν' correspondiente a la transición de la molécula desde el estado energético W_0 hasta el W_i.

Aplicando este valor de $\Delta W/h$ obtenemos:

$$\nu = \nu_0 - \nu',$$

lo que corresponde a la aparición de una raya satélite «roja» en el espectro de difusión de combinación. La aparición de una raya satélite «violeta» se puede explicar suponiendo que una parte de las moléculas se encuentran al principio en el estado excitado W_i (fig. 361, *b*). En este caso la molécula, influida por el fotón incidente, pasa desde el estado W_i al estado de menor energía W_0. En este caso a la energía del fotón primitivo $\varepsilon_0 = h\nu_0$ se añadirá la energía ΔW y surgirá un fotón difuso cuya energía será

$$\varepsilon = h\nu = h\nu_0 + \Delta W.$$

De aquí obtenemos que la frecuencia de la raya satélite «violeta»

$$\nu = \nu_0 + \nu'.$$

Es evidente que el número de moléculas que se encuentran en el estado excitado W_i es siempre menor que el de las que se hallan en el estado normal W_0. Por esta razón la intensidad de las rayas satélites «violetas» es menor que la de las «rojas». Al aumentar la temperatura T el número de moléculas N_i que se encuentran en

el estado excitado W_i aumenta de acuerdo con la ley de Boltzmann:

$$N_1 = N_0 \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{W_1 - W_0}{kT}},$$

donde N_0 es el número de moléculas que se hallan en el estado de energía W_0. De acuerdo con esto, la intensidad de las rayas satélites «violetas» deberá aumentar rápidamente al aumentar la temperatura. La intensidad de las rayas satélites «rojas» no debe variar sensiblemente con la temperatura, puesto que a las temperaturas posibles de alcanzar, el número de moléculas que se hallan en el estado W_0 disminuye muy poco. De esta forma, las hipótesis cuánticas explican de forma natural la diferencia que existe entre las intensidades de las rayas satélites «violetas» y «rojas» y por qué la temperatura ejerce sobre ellas distinta influencia.

La difusión de combinación puede producirse también por el intercambio de energía entre los fotones y los estados energéticos de rotación de las moléculas. Como la energía que le corresponde a la rotación de la molécula es mucho menor que su energía de vibración, estas rayas satélites se encuentran más cerca de la raya principal. Estas rayas se observan cuando la difusión de la luz se produce por gases diatómicos (N_2, O_2, H_2) tomados a grandes presiones (para aumentar la intensidad de los rayos difundidos).

La difusión de combinación es un método muy importante para el estudio de las frecuencias propias de vibración en las moléculas poliatómicas complejas, especialmente en las moléculas de los compuestos orgánicos. En la actualidad se emplea mucho el método del análisis espectral molecular basado en la difusión de combinación. La presencia de vibraciones ν' determinadas puede servir de base para saber qué moléculas entran en la composición de una mezcla compleja dada. Por ejemplo, conociendo las frecuencias propias de los diferentes hidrocarburos se puede determinar la composición de la gasolina y de otros tipos de combustibles para motores.

§ 360. Luminiscencia de los cuerpos líquidos y sólidos. Hasta ahora sólo hemos estudiado la fluorescencia de los gases (vapores) atómicos y moleculares (§§ 341, 354). Este proceso consiste en hacer que un átomo o una molécula, influido por la absorción, pase de su estado normal a uno excitado para que después emita luz al volver a su estado normal. Los cuerpos líquidos y sólidos también presentan fluorescencia, la cual, en algunos casos, se caracteriza por ser muy brillante.

Los casos de fluorescencia de los gases que hemos descrito anteriormente ofrecían la particularidad de que la emisión luminosa del gas desaparecía poco tiempo después de cesar su iluminación por la fuente de luz exterior. Esto mismo ocurre en toda una serie de

casos con la emisión luminosa de los cuerpos sólidos y líquidos. No obstante, algunos sólidos tienen la propiedad de emitir luz durante largo tiempo (hasta muchas horas) después de cesar la acción de la luz que incide sobre ellos. Este tipo de emisión luminosa se llama *fosforescencia*. Pero en realidad no es posible establecer una delimitación clara entre la fosforescencia y la fluorescencia basándose en este indicio, ya que en diversos casos particulares la luminosidad remanente puede persistir dentro de límites muy amplios, comenzando por fracciones insignificantes de segundo ($\sim 10^{-10}$ s) y llegando hasta muchas horas.

Nosotros llamaremos *luminiscencia* a la emisión luminosa provocada por la radiación de una fuente exterior, independientemente de la duración que tenga. De acuerdo con esto, la fluorescencia y la fosforescencia serán consideradas como casos particulares de la luminiscencia.

En general, la emisión luminosa de los cuerpos producida por la acción de una radiación incidente puede tener características distintas: puede ser simple reflexión de la luz en la superficie del cuerpo, difusión de la luz (de Rayleigh o de combinación), luminiscencia o, finalmente, emisión térmica debida al calentamiento del cuerpo por absorción de la radiación. Para diferenciar la luminiscencia de los demás tipos de emisión luminosa hay que señalar sus peculiaridades específicas. Estas peculiaridades fueron definidas del modo más completo por S. I. Vavílov.

En primer lugar, la luminiscencia presenta, en general, *una longitud de onda diferente* de la de la luz excitatriz. En esto se diferencia de la luz reflejada y de la luz que se produce con la difusión de Rayleigh. En segundo lugar, la luminiscencia *tiene un tiempo finito de amortiguación*, es decir, no desaparece inmediatamente después de cesar la acción de la luz excitatriz (sino después de transcurrir un tiempo mayor que el período de las vibraciones luminosas $t \sim 10^{-15}$ s). Finalmente, la luminancia de la luminiscencia b_λ *es mayor que la del cuerpo negro* que se encuentra a la misma temperatura que el cuerpo luminiscente. Esta gran luminancia es posible gracias a que la luminiscencia no es una emisión equilibrada. Hablando estrictamente, en este caso desaparece el concepto de temperatura (véase el § 301), puesto que la distribución de los electrones entre los niveles de energía no está equilibrada. Pero, en general, prácticamente se puede hablar de la temperatura del cuerpo luminiscente; en este sentido la luminiscencia es una luz «fría».

La fosforescencia, como forma particular de la luz, fue descubierta a principios del siglo XVII, pero de una forma más completa fue estudiada por vez primera por V.V. Petrov a comienzos del siglo XIX.

El método para observar la luminiscencia de los cuerpos líquidos y sólidos es en principio el mismo que se utiliza para observar la luminiscencia de los gases: la luz procedente de una fuente S (fig. 362)

se dirige sobre el cuerpo A que se estudia; la luminiscencia se observa en la dirección Ab; los filtros F y F' sirven respectivamente para seleccionar determinadas zónas del espectro de la luz excitatriz y de la luminiscencia.

A diferencia de los gases, los cuerpos sólidos y líquidos al producirse la luminiscencia emiten una luz que no está formada por rayos espectrales independientes, sino por bandas continuas más o menos anchas, con la particularidad característica de que en este caso la composición espectral de la luz emitida es diferente de la de la luz absorbida. En la mayoría de los casos se cumple la *ley de Stokes*, según la cual la luminiscencia se caracteriza por tener una longitud de onda mayor que la de la luz que la provoca. La banda de emisión L (fig. 363, *a*) está desplazada, con respecto a la banda de absorción A, hacia el lado de las longitudes de onda mayores. Las

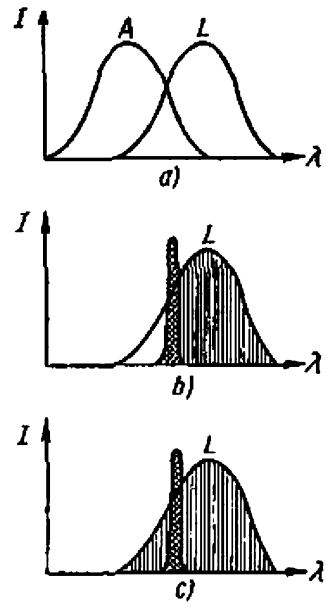

Fig. 363. Posiciones relativas de las bandas de absorción y de luminiscencia.

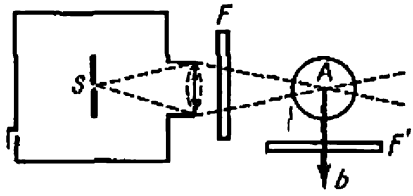

Fig. 362. Método para observar la luminiscencia.

bandas de absorción y de emisión pueden estar algo superpuestas entre sí, como se muestra en la fig. 363, *a*.

La regla de Stokes se deduce directamente de la hipótesis fotónica de la luz: cuando un cuerpo absorbe un fotón de frecuencia ν_0, cuya energía es $\varepsilon_0 = h\nu_0$, esta energía se devuelve parcialmente en forma de un fotón de energía $\varepsilon = h\nu$ y parcialmente se transforma dentro del cuerpo en otro tipo de energía; llamando a esta última parte de la energía A, tendremos que

$$h\nu_0 = h\nu + A; \qquad (1)$$

y como $A \geqslant 0$, tendremos que $\nu \leqslant \nu_0$, es decir, que la frecuencia de la luminiscencia es igual o menor que la frecuencia de la luz excitatriz. Por consiguiente, la longitud de onda de la emisión

luminiscente será igual o mayor que la longitud de onda de la luz excitatriz.

Volvamos a la fig. 363, en la que las bandas de absorción y de emisión se superponen parcialmente entre sí. Supongamos que la banda estrecha cuadriculada de la fig. 363, *b* es la que excita la luminiscencia. Si se cumple la ley de Stokes, en el espectro de luminiscencia no estará presente toda la banda de emisión, sino únicamente aquella parte de la misma cuya longitud de onda es mayor que la de la banda excitadora (rayada en la fig. 363, *b*). Pero a veces se observan infracciones de la regla de Stokes, es decir, que cuando la excitación es producida por una banda estrecha, en el espectro de luminiscencia figuran parcialmente ondas de longitudes menores que las de la luz excitatriz (fig. 363, *c*). La aparición de la región *anti-Stokes* de la luminiscencia es posible, según (1), cuando $A < 0$, es decir, si durante la luminiscencia se suma a la energía de los fotones excitadores cierta energía procedente de fuentes internas del cuerpo luminiscente (compárese con lo expuesto en el § 354).

Según S. I. Vavílov la luminiscencia puede ser de tres tipos: 1) de radiación independiente, 2) de radiación forzada, y 3) de radiación por recombinación. En el primer caso el electrón del átomo (o de la molécula) excitado no se separa por completo de él y al cabo de cierto tiempo vuelve espontáneamente a su estado inicial emitiendo luz al hacerlo. Puede servir de ejemplo la luminiscencia de resonancia de los vapores monoatómicos. El tiempo que dura la amortiguación en este caso es del orden del tiempo que dura la vida del átomo (o molécula) en el estado excitado, es decir, del orden de 10^{-8} s. El segundo tipo de radiación se produce cuando existe un estado metastable; en este caso el electrón tampoco se separa de la partícula excitada, pero únicamente puede volver a su estado inicial por la acción de las partículas circundantes. Finalmente, la radiación por recombinación tiene lugar cuando el electrón se separa por completo de la partícula excitada. En los dos últimos casos el tiempo de amortiguación puede ser grande (desde fracciones de segundo hasta muchas horas).

Esta división de la luminiscencia en tres tipos tiene carácter esquemático. En realidad los procesos que se desarrollan en los cuerpos luminiscentes son con frecuencia una combinación compleja de los procesos elementales que hemos examinado.

Las leyes elementales de la amortiguación son:

1) *la ley exponencial de la amortiguación*:

$$I = I_0 e^{-at} \qquad (2)$$

donde I_0 es la intensidad inicial, a es una magnitud constante y t el tiempo.

La magnitud $\tau = \frac{1}{a}$ se llama *vida en el sentido excitado*.

2) *la ley hiperbólica de la amortiguación*:

$$I = \frac{I_0}{(b+t)^2}, \tag{3}$$

donde b es una constante.

Tomando logaritmos en la expresión (2), obtenemos:

$$\ln I = \ln I_0 - at. \tag{2a}$$

Si sobre el eje de ordenadas se toma el $\ln I$ y sobre el de abscisas el tiempo t, la ecuación (2a) vendrá representada por una recta. En la fig. 364 se muestran los resultados de las mediciones de la amortiguación de la luminiscencia de las sales de uranilo llevadas a cabo por S. I. Vavílov y V. L. Levshin. Las curvas *1* y *2* corresponden a distintos valores de la intensidad de la luz excitatriz (diferentes I_0). Como puede verse, de acuerdo con la fórmula (2a) se obtienen rectas paralelas entre sí.

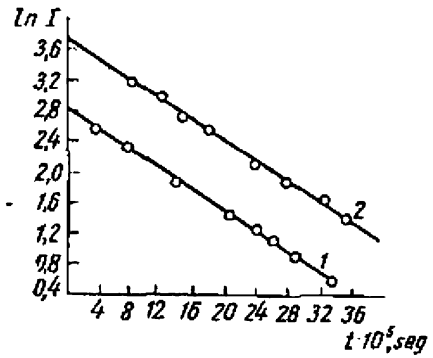

Fig. 364. Ley de la amortiguación de la luminiscencia de las sales de uranilo.

La ley exponencial de la amortiguación es característica de la radiación independiente. La radiación por recombinación se amortigua según la ley hiperbólica. En el caso de la radiación independiente el tiempo de amortiguación no depende de la temperatura. Pero cuando se trata de radiaciones forzadas o por recombinación el tiempo que dura la amortiguación depende de la temperatura y disminuye al aumentar ésta.

Las sustancias capaces de fosforescer se llaman *fósforos* (si son cristales, *cristalo-fósforos*). Los fósforos se obtienen generalmente por sinterización de la sustancia principal (por ejemplo, ZnS, CaS, SrS, etc.) con un activador (Cu, Mn, Bi, tierras raras, etc.) y un fundente (NaCl, CaF_2 y otros). Ultimamente F. D. Klement demostró que se pueden obtener fósforos mezclando simplemente los polvos (sin calentarlos) y también por sublimación en el vacío, en forma de películas finas (*fósforos sublimados*).

La cantidad total de energía luminosa que irradia un fósforo desde el momento en que cesa la excitación hasta que deja de emitir luz se llama *suma luminosa*. La suma luminosa no varía si se calienta el fósforo. Gracias a la invariabilidad de la suma luminosa, cuando el tiempo de amortiguación disminuye como resultado de un calentamiento, al aumentar la temperatura aumenta el brillo de la emisión luminosa.

El «rendimiento cuántico» de la fosforescencia puede llegar a ser igual a la unidad, es decir, a cada fotón absorbido le corresponde un fotón emitido. Pero de acuerdo con la ley de Stokes la energía de cada fotón radiado es algo menor que la del fotón absorbido, por consiguiente, el rendimiento energético es algo menor que la unidad.

El fenómeno de la fosforescencia no pudo ser explicado durante mucho tiempo. Sobre todo parecía incomprensible el papel que desempeñan los activadores. La cantidad de activador necesaria para que se produzca la forsforescencia puede ser absolutamente insignificante (del orden de 10^{-2} —10^{-4}%). No obstante, la fosforescencia no se produce mientras no está presente el activador.

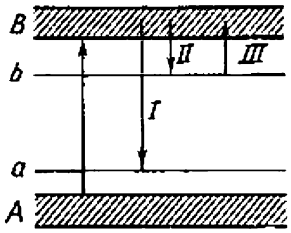

Fig. 365. Modelo de bandas de energía para explicar la tooría de la fosforescencia.

D. I. Blojíntsev, en el año 1934, fue el primero que para explicar el fenómeno de la fosforescencia se valió de la idea de las bandas eléctricas permitidas a los electrones en los cristales. En el caso más elemental en el cristal (como indicamos en el t. II, § 163) existen dos bandas de estados eléctricos permitidos, una inferior, llena de electrones la banda *A* de la fig. 365) y otra superior, vacía (banda de conducción *B*), separadas entre sí por una banda prohibida. Mediante una excitación se puede conseguir que el electrón pase desde la banda inferior a la superior. Pero de acuerdo con la Mecánica cuántica la transición espontánea inversa, con radiación, desde la zona superior a la inferior, no es posible. Esto esquema de dos bandas permitidas es el que corresponde al cristal puro, incapaz de luminescer.

El activador hace que aparezcan otros niveles de posibles estados energéticos de los electrones. Junto a la banda llena *A* aparecen los niveles del activador *a*; al mismo tiempo junto a la banda de conducción *B* surgen niveles locales *b*, debidos a las irregularidades que en la red cristalina produce la introducción del activador. Estos últimos niveles son metastables.

Durante la absorción de la luz los electrones de la banda inferior *A* saltan a la banda superior *B*. Una parte de ellos pasa después a un nivel metastable (flecha *II*). Si la diferencia de energías entre los niveles *b* y *B* es mayor que la energía media del movimiento térmico los electrones pueden permanecer durante mucho tiempo en el nivel *b* sin radiar. Pero la existencia de fluctuaciones hace que paulatinamente vayan pasando a la banda *B* (flecha *III*) y desde ella al nivel *a* (flecha *I*) omitiendo radiación.

Si el cristal se calienta la probabilidad de la transición desde el nivel metastable *b* a banda *B* aumenta y al mismo tiempo aumenta

también el número de transiciones I, es decir, aumenta el brillo de la luminiscencia. De esta forma, el esquema expuesto explica directamente la influencia que ejerce la temperatura en la fluorescencia.

Los fósforos, por regla general, pueden luminescer influenciados por choques de electrones (*catodoluminiscencia*).

En el t. II, § 171 dijimos, que la conductividad eléctrica de los semiconductores depende del traslado, a costa del movimiento térmico, de cierta cantidad de electrones a una banda vacía que se encuentra mucho más alta que la banda principal llena de electrones. Este traslado de electrones a la banda vacía puede realizarse a costa de la absorción de luz. Como resultado de esto la conductividad del semiconductor debe aumentar. Como señalamos en los §§ 305 y 335 este fenómeno recibe el nombre de fotoconductividad y se utiliza para registrar y medir los flujos luminosos.

El fenómeno de la luminiscencia también tiene muchas aplicaciones prácticas. En ella se basa el llamado *análisis fluorimétrico*. Por el carácter de la emisión luminiscente se puede determinar la composición de cualquier mezcla. En el § 311 hacíamos mención del empleo de sustancias luminiscentes en las fuentes de luz modernas. Las sustancias luminiscentes pueden utilizarse también para detectar los rayos ultravioletas (por la luminiscencia que se produce bajo la influencia de la radiación ultravioleta) y los rayos infrarrojos (por medio del «destello» que la irradiación de estos rayos produce en el fósforo). La catodoluminiscencia se emplea mucho en diversos tipos de aparatos eléctricos de vacío (oscilógrafos catódicos, televisores, etc.).

CAPITULO XXXI

Mecánica cuántica

§ 361. Propiedades ondulatorias de las partículas elementales. La insuficiencia de la teoría de Bohr hizo necesaria una revisión crítica de los fundamentos de la teoría cuántica y de nuestros conocimientos sobre la naturaleza de las partículas elementales. En este caso se entiende por partículas elementales (llamadas a veces micropartículas) los electrones, protones y demás partículas simples. Durante el proceso de desarrollo de la Física se planteó la cuestión de en qué medida es concluyente la idea del electrón como pequeña

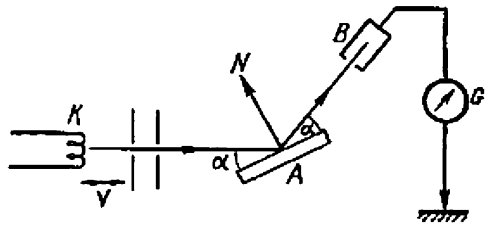

Fig. 366. Esquema del experimento para estudiar la difracción de los electrones.

partícula mecánica caracterizada por unas coordenadas y por una velocidad determinadas. Las primitivas concepciones del electrón estaban basadas en los experimentos realizados con los haces electrónicos. Estos experimentos fueron precisamente los que llevaron a la idea de que el electrón es una pequeña partícula cuyo movimiento coincide con el calculado para una partícula cargada sometida a la acción de fuerzas electromagnéticas.

Pero los estudios sobre la naturaleza de los electrones realizados posteriormente pusieron de manifiesto que la idea antes expuesta era insuficiente. Resultó que en toda una serie de casos los experimentos con *haces electrónicos revelaban propiedades características del proceso ondulatorio.* Por ejemplo, se demostró experimentalmente que cuando un haz de electrones incide sobre una lámina de cristal se produce el fenómeno de la difracción. Examinemos detenidamente este experimento. Un haz de electrones (fig. 366) procedente del filamento incandescente K se acelera por medio de un campo cuya diferencia de potencial es V y después de pasar a través de una serie de diafragmas incide en forma de estrecho haz paralelo sobre el monocristal A. Una cámara de ionización B, unida a un galvanómetro G,

permite medir la intensidad I de la corriente que se produce y, por consiguiente, el número de electrones que se reflejan en el cristal (de acuerdo con la ley de la reflexión) formando un ángulo α. Este ángulo se mantiene constante durante el experimento. El objeto del experimento es medir la intensidad I de la corriente, que pasa por el galvanómetro, como función de la diferencia de potencial V que acelera al haz de electrones. El resultado obtenido fue que al variar monótonamente la diferencia de potencial V la variación de la intensidad I no fue monótona, sino que presentó una de máximos.

Estos resultados pueden ser interpretados construyendo el diagrama que se muestra en la fig. 367. Sobre el eje de abscisas se toman las raíces cuadradas de las diferencias de potencial $\sqrt{V}$ y sobre el

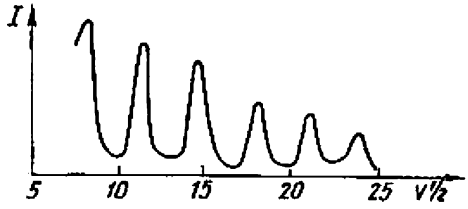

Fig. 367. Obtención de los máximos de difracción.

eje de ordenadas la intensidad I de la corriente. La dependencia funcional que se obtiene se caracteriza por una serie de máximos de la intensidad I casi equidistantes. De aquí se deduce que la reflexión regular de los electrones se efectúa únicamente cuando la diferencia de potencial o potencial acelerador tiene unos valores determinados, es decir, *cuando los electrones tienen unas velocidades determinadas.*

Un fenómeno análogo se produce cuando los rayos X se reflejan en un cristal (§ 273). La reflexión en una dirección determinada, caracterizada por un ángulo α, sólo se produce cuando se cumple la correlación de Wulff — Bragg:

$$2d \operatorname{sen} \alpha = k\lambda, \qquad (1)$$

donde λ es la longitud de onda del rayo X, d es la constante de la red cristalina y k es un número entero. Comparando este hecho con los resultados expuestos anteriormente llegamos a la conclusión de que el haz electrónico pone de manifiesto propiedades ondulatorias, con la particularidad de que la longitud de onda de dicho haz depende de la velocidad de los electrones.

Efectivamente, como d y α permanecen constantes, por las condiciones del experimento, el cumplimiento de la condición (1) viene determinado, desde el punto de vista ondulatorio, por los respectivos valores de λ. En el experimento que hemos examinado

la reflexión formando el ángulo α sólo se produce cuando la velocidad de los electrones del haz toma unos valores determinados. La concordancia numérica de este experimento y la condición (1) se consigue si se admite que la longitud de onda λ del electrón está relacionada con la velocidad v de los electrones por la correlación:

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \tag{2}$$

donde h es la constante de Planck y m la masa del electrón.

La velocidad del electrón v, después de acelerado por la diferencia de potencial V, es igual a (véase el t. II, § 185):

$$v = \sqrt{2\frac{e}{m}V}.$$

Poniendo este valor de v en la fórmula (2), obtenemos:

$$\lambda = h\sqrt{\frac{1}{2em}}\frac{1}{\sqrt{V}}. \tag{2a}$$

Después de lo cual la fórmula (1) se puede escribir de la forma:

$$2d \operatorname{sen}\alpha = kh\sqrt{\frac{1}{2em}}\frac{1}{\sqrt{V}}. \tag{3}$$

Esta igualdad determina los valores de la diferencia de potencial V que hacen que la intensidad I de la corriente que pasa por el galvanómetro alcance un máximo. Como por las condiciones del experimento el ángulo α no varía, para los diferentes máximos (correspondientes a distintos k), de acuerdo con (3), obtenemos:

$$\sqrt{V} = kC, \tag{3a}$$

donde

$$C = \frac{h}{2d \operatorname{sen}\alpha}\sqrt{\frac{1}{2em}}$$

y es constante en las condiciones del experimento.

De esta forma, según (3a), los valores de la $\sqrt{V}$ correspondientes a los máximos de la intensidad I se diferencian entre sí en una magnitud constante C, es decir, obtenemos máximos equidistantes lo mismo que en el diagrama de la fig. 367.

En realidad, cuando los valores de V son pequeños los máximos no resultan exactamente equidistantes; esto se debe a que la condición de Wulff — Bragg no es completamente apta para ser aplicada a las ondas electrónicas, ya que estas últimas experimentan en el cristal una refracción que (a diferencia de los rayos X) es mayor para los electrones lentos.

Poniendo en la fórmula (2a) en lugar de h, e y m sus valores numéricos correspondientes y expresando la longitud de onda λ

en angstrom y el potencial acelerador en voltios, obtenemos:

$$\lambda\,(\text{Å}) = 12{,}25V^{-\frac{1}{2}}\ \text{(voltios)}. \qquad (2b)$$

De esta forma un electrón, después de acelerado por una diferencia de potencial de 1 V tendrá una longitud de onda de 12,25 Å, es decir, la longitud correspondiente a los rayos X de onda larga. Cuanto mayor sea la velocidad del electrón más cortas serán las ondas que lo caracterizan. La medición de los valores V que determinan los máximos da unos resultados cuantitativos que están en perfecto acuerdo con la igualdad (2b).

A la igualdad (2) se le puede dar otra forma si se tiene en cuenta que mv es la cantidad de movimiento p de la partícula. En este caso entre la longitud de onda λ y la cantidad de movimiento p de la partícula tenemos la relación siguiente:

$$\lambda = \frac{h}{p}. \qquad (4)$$

La naturaleza ondulatoria de los haces electrónicos se deduce de una extraordinaria cantidad de experimentos sobre su difracción e interferencia.

Davisson y Germer observaron cómo se originaban máximos de interferencia al reflejarse un haz de electrones en un cristal de níquel. Esta observación se llevó a cabo en un experimento análogo al que sirve para descubrir los máximos que se originan cuando los rayos X se reflejan en los cristales. Tambien se realizaron experimentos para observar la difracción de electrones rápidos producida por hojas metálicas delgadas. Una hoja metálica representa de por sí un conjunto de cristales pequeños orientados arbitrariamente, por lo tanto, la difusión debe producir en la pantalla círculos de difracción (§ 274). Por el diámetro de estos círculos, y conociendo la constante d de la red de los cristalitos de la hoja metálica, se puede determinar la longitud de onda λ de las partículas difundidas. Estos experimentos confirmaron totalmente la correlación (2). La foto 5 (véase el apéndice) representa los máximos de difracción que se obtienen con una hoja metálica de cobre. Otra variante de este experimento fue realizada por P. S. Tartakovski, que observó la difracción de los electrones lentos al atravesar una hoja delgada de aluminio. En la fig. 368 se muestra el esquema de su experimento. Aquí K es un cátodo caliente que produce electrones. A es una rejilla que crea el campo para acelerar los electrones, D un diafragma y B la hoja metálica difusora. Los electrones difundidos por la hoja metálica inciden sobre la lámina E, en la cual hay una ranura circular. A esta ranura llegan solamente aquellos electrones que han sido difundidos formando un ángulo α determinado. Detrás de la ranura se encuentra una lámina F que está unida a un electrómetro que

sirve para medir la corriente electrónica. El experimento tiene por objeto medir la corriente, que pasa por el electrómetro, como función de la diferencia de potencial de aceleración V (hasta 1 700 V). Los resultados del experimento pusieron de manifiesto que los máximos de la intensidad de la corriente se obtienen con unos valores determinados de la velocidad de los electrones. En este caso el cálculo de la figura de difracción también estuvo de acuerdo con los datos experimentales cuando la longitud de onda del electrón se consideró relacionada con su velocida por la correlación (2).

Es natural que surja la idea de que las partículas neutras también pueden tener propiedades ondulatorias. La experimentación con

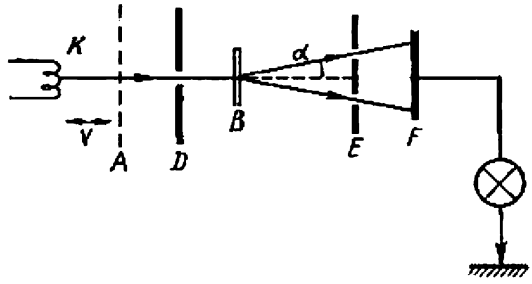

Fig. 368. Esquema del experimento de P. S. Tartakovski.

haces moleculares y atómicos es mucho más difícil que con los haces de partículas cargadas, puesto que no es posible dirigirlos por medio de campos eléctricos y porque las partículas sin carga son más difíciles de registrar. Además, los átomos y las moléculas están formados por gran número de partículas más pequeñas (electrones y núcleos) y son estructuras más complejas que el electrón. A pesar de todo, los experimentos realizados para estudiar la difusión de los haces moleculares de una serie de gases revelaron que estos haces tienen propiedades ondulatorias y confirmaron plenamente la correlación (4), que determina la relación que existe entre la longitud de onda del haz y la cantidad de movimiento de las partículas. También se han descubierto fenómenos de difracción experimentando con los neutrones.

Resumiendo los trabajos experimentales expuestos se puede asegurar que *todo haz de partículas elementales que tenga una velocidad y una dirección determinadas produce figuras de interferencia y de difracción* semejantes a las que se obtienen con una onda plana, con la particularidad de que la longitud de onda λ viene expresada, por medio de la cantidad de movimiento de las partículas, por la correlación (4).

§ 362. Ecuación de Schrödinger. Desde el punto de vista de la Mecánica clásica cada partícula se mueve siguiendo una trayectoria determinada y ningún flujo de partículas puede revelar los fenómenos de la interferencia o de la difracción característicos del proceso ondulatorio. Pero como los experimentos demuestran que los haces de partículas elementales ponen de manifiesto dichos fenómenos, resulta que por medio de las ecuaciones de la Mecánica clásica es imposible representar las propiedades de estas partículas. La teoría que abarque todas las propiedades de las partículas elementales deberá tener en cuenta sus propiedades ondulatorias. De los experimentos descritos en el párrafo anterior se deduce que todo haz paralelo de partículas elementales tiene las propiedades de una onda plana que se propaga en la dirección de la velocidad v de las partículas.

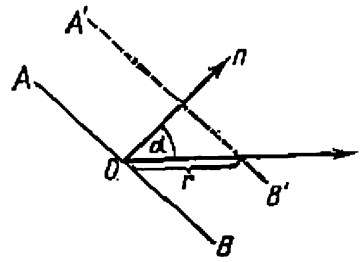

Fig. 369. Propagación de un frente de onda plano.

Veamos lo que ocurre en forma general con una onda plana que se propaga en la dirección normal *On* (fig. 369). Las vibraciones que tienen lugar en el plano del frente de onda *AB* las escribiremos en su forma compleja:

$$\Psi = \psi_0 e^{-2\pi i \nu t}$$

donde ψ_0 es la amplitud y ν la frecuencia. El frente de onda se traslada y al cabo de un tiempo τ ocupa la posición $A'B'$.

Las vibraciones que tienen lugar en el plano de este nuevo frente de onda vendrán expresadas por la fórmula:

$$\Psi = \psi_0 e^{-2\pi i \nu (t-\tau)}. \qquad (1)$$

Si desde el punto O medimos la distancia r tomada en una dirección cualquiera que forme con la normal On un ángulo α, tendremos

$$\tau = \frac{r \cdot \cos\alpha}{v} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{v},$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unidad tomado en la dirección de la normal On y $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$ es el producto escalar de los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{n}$. Poniendo este valor de τ en (1) y teniendo en cuenta que $\frac{\nu}{v} = \frac{1}{\lambda}$, obtenemos:

$$\Psi = \psi_0 e^{2\pi i \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{\lambda} - \nu t\right)}. \qquad (2)$$

Empleemos esta expresión para describir el haz de partículas, caracterizadas por la longitud de onda λ, obtenida en los experimen-

tos de interferencia y difracción [§ 361, fórmula (2)]:

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

La dirección de la normal n coincide con la dirección de la velocidad de las partículas v, por lo tanto,

$$\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{\lambda} = \frac{\mathbf{r}\cdot m\mathbf{v}}{h} = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{h}.$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ es el vector cantidad de movimiento.

En la expresión (2), además de la longitud de onda, figura la frecuencia ν. La equiparación de esta magnitud con las propiedades mecánicas de las partículas elementales la haremos basándonos en las analogías ópticas. En la teoría fotónica de la luz la frecuencia del fotón ν se relaciona con su energía ε por la correlación

$$\varepsilon = h\nu.$$

Apliquemos esta relación entre la energía y la frecuencia al movimiento de las partículas elementales suponiendo que la frecuencia ν está ligada con la energía W de la partícula por la correlación

$$\nu = \frac{W}{h}.$$

Esta generalización la veremos justificada al comparar las deducciones de la teoría con los resultados experimentales.

Poniendo estos valores en (2) obtenemos finalmente que para la onda que caracteriza el haz de partículas de velocidad constante

$$\Psi = \psi_0 e^{2\pi i\left(\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{h} - \frac{W}{h}t\right)} = \psi_0 e^{-\frac{i}{h}(Wt - \mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}. \qquad (3)$$

La función Ψ se llama función ondulatoria y ψ_0 es su amplitud.

El sentido físico de la función ondulatoria Ψ se puede comprender comparando los fenómenos de difracción ópticos con los de difracción de las partículas elementales.

Los fenómenos ópticos, lo mismo que los fenómenos relacionados con las partículas elementales, ponen de manifiesto una naturaleza dual ondulatorio-corpuscular. En los fenómenos de interferencia y difracción se revelan las propiedades ondulatorias de la luz, pero el efecto fotoeléctrico y la emisión y absorción de la luz solamente se pueden interpretar desde el punto de vista de las hipótesis corpusculares (fotónicas) de la luz. La relación entre estos dos grupos de fenómenos puede establecerse sobre la base de examinar cada fenómeno desde el punto de vista de ambas teorías, es decir, ondulatorio y corpuscular. Por ejemplo, aquellas partes del espacio en las que se observan máximos luminosos durante el fenómeno de la interferencia se caracterizan, desde el punto de vista de la teoría ondulatoria, por

tener la amplitud máxima de las vibraciones luminosas: la intensidad de la luz en cualquier punto del espacio es proporcional al cuadrado de la amplitud de las vibraciones a_0^2. Desde el punto de vista de la teoría fotónica la intensidad de la luz es proporcional al número de fotones que llegan a la parte del espacio que se considera. Estas dos teorías pueden estar de acuerdo si se admite que el número de fotones que llegan a un volumen determinado del espacio es proporcional al cuadrado de la amplitud de las vibraciones luminosas determinada para esta región del espacio por la teoría ondulatoria.

Trasladando esta manera de razonar a las partículas elementales consideraremos que *el número de partículas que llegan a un volumen elemental dv del espacio es proporcional a la magnitud* $\psi_0^2 dv$, es decir, al cuadrado de la amplitud de la función ondulatoria Ψ, calculada para el volumen elemental dv, multiplicado por la magnitud de este volumen. Como la función Ψ en la expresión (2) es compleja, la amplitud ψ_0, hablando en términos generales, también será compleja, y la expresión $\psi_0^2\, dv$ deberá ser sustituida por la expresión:

$$\Psi_0 \psi_0^* \, dv = \Psi \Psi^* \, dv,$$

donde Ψ^* es una magnitud conjugada compleja de Ψ.

Un estudio más detallado obliga a precisar la hipótesis de la proporcionalidad del número de partículas con respecto a la magnitud $\Psi\Psi^* \, dv$. La descripción mecanocuántica de los fenómenos que estudiamos *tiene carácter estadístico*. Por esta razón el postulado expuesto anteriormente debe ser sustituido por el siguiente: *la probabilidad de que una partícula elemental se encuentre en un volumen elemental dv es proporcional a la magnitud* $\Psi\Psi^* \, dv$ *calculada para dicho volumen elemental.* El número de partículas que se encuentran en una región determinada del espacio durante un tiempo determinado es proporcional a la probabilidad de que se encuentren en esta región, hecho del cual podemos convencernos repitiendo multitud de veces un mismo experimento en condiciones análogas.

La teoría cuántica generaliza el razonamiento anterior haciéndolo extensivo a las partículas no libres, cuyas velocidades no son constantes. Se supone que las partículas que se mueven en campos de fuerza arbitrarios también pueden caracterizarse por una función ondulatoria cuya forma analítica, lógicamente, será otra que la de las partículas libres con velocidad constante. En este caso la magnitud $\Psi\Psi^* \, dv$ deberá volver a expresar la probabilidad de que la partícula se encuentre en el volumen elemental dv.

Se plantea la pregunta: ¿Cómo hallar la función ondulatoria para una partícula que se mueve por la acción de unas fuerzas determinadas? La función ondulatoria Ψ [fórmula (3)] para las partículas con velocidad constante fue obtenida basándose simultáneamente en las analogías ópticas, pero su forma, para algunos problemas,

no es muy evidente *). Durante el proceso de elaboración de la teoría cuántica, Schrödinger descubrió (en el año 1925) una ecuación diferencial que en cualquier problema puede ser satisfecha por la función ondulatoria. Esta ecuación fue hallada basándose en el análisis de las analogías que existen entre la Mecánica y la óptica. Las deducciones hechas por medio de la ecuación de Schrödinger coinciden con un amplio círculo de hechos experimentales. Aquí nos limitaremos a hacerla constar para el caso particular de las partículas libres y señalar cómo se generaliza para el caso de las partículas no libres. La función de onda de las partículas libres, representada por la expresión (3), puede escribirse de la forma:

$$\Psi = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Wt - \mathbf{r}\cdot\mathbf{p})} = e^{-\frac{i}{\hbar}Wt}\psi,$$

donde $\psi = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}$ es la parte de la función de onda que depende exclusivamente de las coordenadas y que se llama función amplitud. Representando el producto escalar $\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$ en forma desarrollada: $\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} = xp_x + yp_y + zp_z$, podemos escribir la función amplitud de la forma siguiente:

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(xp_x + yp_y + zp_z)}.$$

Aplicando a la función ψ el operador de Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

obtenemos:

$$\Delta\psi = -\frac{1}{\hbar^2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)\psi = -\frac{1}{\hbar^2}(mv)^2\psi. \qquad (4)$$

Teniendo en cuenta que para las partículas libres $(mv)^2$ es igual al producto de la masa de la partícula por el duplo de su energía cinética W_c:

$$(mv)^2 = 2mW_c,$$

escribimos la igualdad (4) de la forma:

$$\Delta\psi = -\frac{2mW_c}{\hbar^2}\psi,$$

o

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}W_c\psi = 0. \qquad (5)$$

Esta es la ecuación de Schrödinger para la partícula libre. Para generalizar esta ecuación al caso de una partícula no libre se sustituye la energía cinética W_c por la diferencia entre la energía total W y la

*) Hay que señalar que la función ondulatoria, que tiene un valor fundamental en la descripción de los estados de cualquier clase de partículas, en general, no representa una onda en el sentido ordinario de la palabra. Por ejemplo, en los problemas relacionados con la acción mutua entre las partículas la función ondulatoria depende de las coordenadas de todas las partículas y, por consiguiente, no puede ser considerada como una onda ordinaria en un espacio tridimensional.

energía potencial U:

$$W_c = W - U.$$

Poniendo en (5) en lugar de W_c su valor, hallamos:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(W - U)\psi = 0. \qquad (6)$$

La ecuación (6) es *la de Schrödinger* para una partícula que se mueve en un campo caracterizado por una energía potencial U. Los problemas se distinguen por la forma de la energía potencial U. La función de onda que caracteriza a las partículas no libres se determina como solución de la fórmula (6), en la cual se pone la energía potencial U correspondiente al problema que se resuelve.

No obstante, como se demuestra en el análisis matemático, la ecuación (6) de por sí aún no determina totalmente la función ψ. Para que esta función quede determinada hay que imponerle algunas exigencias complementarias en concordancia con su sentido físico. Estas exigencias son las siguientes: *la función ψ debe ser finita, unívoca y continua* en todo el espacio que se considera. Estas exigencias se deducen de la condición según la cual $\psi\psi^* dv$ determina la probabilidad de que la partícula se encuentre en un elemento de volumen del espacio. Si la función ψ no cumpliera estas exigencias no podría dar una característica estadística justa de las partículas, puesto que la probabilidad, evidentemente, no puede ser una magnitud equívoca indefinida ni variar a saltos de un punto a otro.

La importancia de la ecuación de Schrödinger no consiste solamente en que da una distribución estadística de las partículas que concuerda con la experiencia, sino también en que de la ecuación (6) y de las condiciones que se le imponen a la función de onda se deducen directamente las reglas de cuantificación de la energía. La ecuación (6) tiene la propiedad matemática de que, en general, no con todos los valores de la energía total da soluciones finitas, unívocas y continuas, es decir, soluciones con sentido físico. Por ejemplo, si queremos resolver el problema para el caso del átomo de hidrógeno, es decir, si en la ecuación (6) ponemos en lugar de U el valor de la energía potencial de las dos cargas puntuales de signos contrarios que interaccionan, resulta que cuando la energía potencial total tiene valores negativos la ecuación (6) tiene soluciones finitas, unívocas y continuas precisamente para aquellos valores de W que coinciden con las energías de los estados estacionarios del átomo de hidrógeno según la teoría de Bohr.

De esta forma, la «cuantificación» de la energía se deduce en la Mecánica cuántica como un desarrollo natural de sus postulados teóricos, mientras que en la teoría de Bohr se obtenía por «reglas de cuantificación» artificiales.

Debemos advertir que no todos los problemas conducen a la cuantificación de la energía. Por ejemplo, para las partículas libres

las soluciones de la ecuación (6) son finitas, unívocas y continuas cualquiera que sea el valor de la energía total W. Esto quiere decir que la energía de las partículas libres puede tener cualquier valor.

§ 363. Límites de la aplicación de la teoría clásica. Como hemos visto, el conjunto de los experimentos realizados con partículas elementales («micropartículas»), por ejemplo, con electrones, demuestra que en una serie de casos estas «partículas» ponen de manifiesto propiedades ondulatorias y en otra serie de casos propiedades corpusculares propias de las macropartículas ordinarias.

Las propiedades corpusculares de los electrones se revelan en todos aquellos casos en que la acción de éstos se desarrolla en una región pequeña, por ejemplo, cuando los electrones producen centelleo en una pantalla fluorescente o dejan su huella en la cámara de Wilson (véase el § 370). Por el contrario, los fenómenos de la difracción de los electrones no pueden ser comprendidos si nos figuramos los electrones como partículas ordinarias de la Mecánica clásica que se mueven por trayectorias determinadas. Estos fenómenos son indicio de que los electrones tienen propiedades ondulatorias. Para comprender mejor esto examinaremos una vez más el fenómeno de la difracción.

Supongamos que un haz paralelo de micropartículas de velocidad determinada inciden sobre dos rendijas paralelas y producen en la pantalla el fenómeno de la difracción. Si admitimos que cada micropartícula del haz se mueve siguiendo una trayectoria determinada (es decir, si es una partícula en el sentido mecánico) tendremos que algunas de estas partículas pasarán a través de la primera rendija y otras a través de la segunda. De acuerdo con esta suposición la distribución de las partículas en la pantalla vendrá dada por la superposición de las distribuciones de las partículas que pasaron por cada una de las rendijas. En otras palabras, la figura que se produce en la pantalla cuando están abiertas las dos rendijas deberá coincidir con la superposición de las figuras que se obtienen abriendo sucesivamente cada una de las rendijas. Pero en realidad la figura de difracción que se obtiene cuando las dos rendijas están abiertas no es la superposición de las dos figuras de difracción producidas por las rendijas tomadas separadamente. Por consiguiente, nuestro intento de figurarnos la micropartícula como una partícula de la Física clásica que se mueve siguiendo una trayectoria determinada y, por lo tanto, que pasa por una de las rendijas, conduce a un resultado erróneo. Sobre la micropartícula influyen ambas rendijas. Esto quiere decir que *la micropartícula no es una partícula en el sentido que a esta palabra se le da en la Mecánica clásica.*

Hoy día está demostrado experimentalmente que las propiedades ondulatorias no sólo son propias de los haces electrónicos, sino también de cada electrón tomado independientemente En uno de los

trabajos de Biberman, Sushkin y Fabrikant fueron fotografiados los anillos de difracción de haces electrónicos de intensidad muy pequeña producidos por cristales finamente pulverizados. Este experimento demostró que *la disposición de los anillos no depende de la intensidad del haz, incluso cuando los electrones pasan uno a uno por el aparato.* Se obtuvo una figura de difracción siendo la intensidad del haz tan pequeña que el tiempo transcurrido entre dos impactos sucesivos de los electrones sobre la placa fotográfica fue 10^4 veces mayor que el necesario para que dichos electrones pudieran pasar a través del aparato. Por lo tanto, la figura de difracción fue producida por electrones aislados que llegaron a la placa uno detrás de otro.

De lo dicho se deduce que no es posible caracterizar la micropartícula por medio de las magnitudes peculiares de las macropartículas ordinarias (por ejemplo, por sus coordenadas y su velocidad). Las propiedades de las micropartículas tienen que ser definidas de forma esencialmente distinta a como define las partículas la Mecánica clásica. Esta definición la da la Mecánica cuántica, determinando el estado de la micropartícula por medio de la función de onda.

Las propiedades objetivas de cualquier cuerpo se ponen de manifiesto cuando dicho cuerpo entra en acción mutua con cuerpos externos con respecto a él. Según el carácter que tengan las condiciones externas se revelarán unas u otras propiedades del cuerpo que se estudia. La teoría mecanocuántica tiene en cuenta precisamente las condiciones en que se encuentra la micropartícula. Por ejemplo, si la micropartícula se encuentra en unas condiciones en que su velocidad está perfectamente determinada en magnitud y dirección, la función de onda correspondiente a esta partícula tendrá la forma (3) del § 362. Si las condiciones son tales que la micropartícula se revela en una pequeña parte del espacio, su función de onda tendrá un aspecto distinto, que expondremos más adelante. De esta forma en la Mecánica cuántica la definición de las propiedades reales de la micropartícula se da de acuerdo con las condiciones en que ésta se halla.

No obstante, en una serie de casos podemos definir *aproximadamente* la micropartícula valiéndonos de conceptos que, hablando estrictamente, no le son peculiares, por ejemplo, caracterizándola dando *al mismo tiempo* unos intervalos determinados de las coordenadas y de las velocidades. El grado de utilidad de estos conceptos para caracterizar las micropartículas viene determinado matemáticamente por la correlación establecida por Heisenberg que lleva el nombre de «principio de incertidumbre». Este principio puede fundamentarse, por ejemplo, analizando el fenómeno de la difracción.

Para simplificar examinaremos la difracción por una sola rendija. Supongámonos un haz de electrones que va en la dirección

del eje OY (fig. 370) con una velocidad determinada v. La pantalla AB, con una rendija de anchura d, está situada perpendicularmente al haz. En la segunda pantalla CD se observa una figura de difracción. Desde el punto de vista de la teoría ondulatoria este fenómeno se explica de la forma siguiente: la onda plana al incidir sobre la rendija experimenta el fenómeno de la difracción; en la pantalla CD se obtiene una distribución de las intensidades que coincide con la distribución de las intensidades correspondiente a la difracción de la luz por una sola rendija (§ 269). Esta distribución se muestra en la figura 370 por medio de la línea punteada. El máximo de orden nulo se encuentra donde el ángulo $\varphi = 0$; el primer mínimo se obtiene donde φ cumple la condición

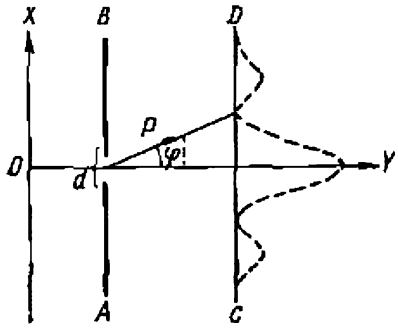

Fig. 370. Esquema para fundamentar el «principio de incertidumbre».

$$\operatorname{sen} \varphi = \lambda/d, \qquad (7)$$

siendo λ la longitud de onda que le corresponde al haz de electrones. La parte más importante de la intensidad se concentra en el máximo central, por lo que despreciaremos el papel que desempeñan los máximos secundarios.

Si intentamos figurarnos los electrones en forma de partículas mecánicas tendremos que decir que las partículas que tienen la velocidad v se mueven en dirección a la rendija; en el momento que pasan por ésta sus posiciones en la dirección OX se determinan con una exactitud de hasta la anchura de la rendija. Llamando Δx la tolerancia en la determinación de la posición de un electrón la dirección del eje OX, tendremos:

$$\Delta x = d.$$

En este mismo instante, como consecuencia de la difracción, varía la dirección de la velocidad de la partícula. Tomando en consideración únicamente aquellos electrones que van a parar al máximo central se puede decir que la proyección de la cantidad de movimiento p_x sobre la dirección del eje OX (que era igual a cero antes de pasar la rendija) tendrá el valor numérico comprendido entre los límites

$$0 \leqslant p_x \leqslant p \operatorname{sen} \varphi,$$

donde, de acuerdo con (1), $\operatorname{sen} \varphi = \lambda/d$.

Por consiguiente, la tolerancia Δp_x con que al haz de electrones que pasa por la rendija se le puede añadir la cantidad de movimiento

en la dirección OX será:

$$\Delta p_x \cong p\frac{\lambda}{d},$$

La longitud de onda λ está relacionada con la cantidad de movimiento del electrón por medio de la correlación (4) del § 361:

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

de donde obtenemos que

$$\Delta p_x \cong \frac{h}{d},$$

pero como d es igual a la tolerancia en la determinación de la coordenada Δx, de la última igualdad se deduce que

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \cong h. \qquad (2)$$

La correlación (2) puede generalizarse a todas las coordenadas, lo que nos da que

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \cong h, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \cong h \quad \text{y} \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \cong h. \qquad (2a)$$

Las correlaciones (2a) se pueden obtener también basándose en el análisis de cualquier otro experimento con partículas elementales o matemáticamente a partir de la ecuación de Schrödinger (6) del § 362; estas correlaciones son la formulación matemática del «principio de incertidumbre» de Heisenberg.

El sentido de las correlaciones (2a), como se deduce de lo dicho anteriormente, es el siguiente: *si queremos caracterizar una micropartícula por medio de magnitudes físicas propias de una macropartícula ordinaria podremos conseguirlo únicamente con una aproximación determinada*, con la particularidad de que cuanto mayor sea la exactitud con que determinemos la coordenada x de la partícula (es decir, cuanto más pequeña sea Δx) tanto menor será la exactitud con que, de acuerdo con las condiciones del experimento, podremos determinar su cantidad de movimiento y, por consiguiente, su velocidad. Como $\Delta p_x = m \cdot \Delta v_x$, por (2) tendremos:

$$\Delta V_x = \frac{h}{m \cdot \Delta x}. \qquad (3)$$

En los t.t. I y II indicamos ya lo que nos da el «principio de incertidumbre» en casos concretos. Volvamos a examinar ahora varios casos particulares. Tomemos un haz de electrones que se mueven con una velocidad de 10^7 cm/s y supongamos que esta velocidad la hemos determinado con una exactitud de hasta una décima por ciento, en este caso

$$\Delta v_x \cong 10^4 \text{ cm/s}.$$

¿Con qué exactitud podremos determinar en estas condiciones la posición de cada electrón en la dirección de la velocidad? Por la

correlación (3) tenemos:

$$\Delta x = \frac{h}{m \cdot \Delta v_x} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{4}} \text{ cm} \cong 6{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ cm}.$$

La posición de cada electrón se puede determinar en este caso con una exactitud aproximada de hasta una centésima de milímetro, es decir, con bastante exactitud.

Veamos otro ejemplo. Según las concepciones clásicas el electrón se mueve dentro del átomo con una velocidad orbital del orden de 10^8 cm/s. El hecho de que el electrón pertenezca al átomo exige que su coordenada sea determinada con una exactitud de hasta las dimensiones del átomo, es decir, de hasta 10^{-8} cm. Por consiguiente

$$\Delta x \cong 10^{-8} \text{ cm},$$

y por la correlación (2) la tolerancia en la determinación de la velocidad resultará igual a

$$\Delta v_x = \frac{h}{m \cdot \Delta x} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-8}} \cong 6{,}6 \cdot 10^{8} \text{ cm/s}.$$

es decir, el error que se comete al hallar la velocidad es igual a la misma velocidad. Por consiguiente, en este caso no es posible conservar el concepto de órbita que el electrón recorre con una velocidad determinada. Aquí no pueden aplicarse las concepciones clásicas.

De esta forma resulta que el concepto de electrón como partícula que se mueve por una trayectoria determinada no puede ser mantenido en la Física moderna. Los conceptos basados en los resultados de la observación de los fenómenos macroscópicos no son aplicables a los fenómenos intraatómicos. Los procesos intraatómicos, por su propia naturaleza, no se conciben tan gráficamente como los modelos mecánicos. No obstante, la hipótesis de las órbitas electrónicas dentro del átomo puede conservarse hasta cierto punto, puesto que en muchos casos lleva a resultados aproximadamente verdaderos, los cuales, para estar más de acuerdo con los experimentos, requieren ciertas correcciones.

Si en lugar de una micropartícula tomamos simplemente una partícula pequeña veremos que la correlación (3) muestra la utilidad de las concepciones clásicas. Efectivamente, sea la masa de la partícula, por ejemplo, igual a 10^{-12} g y supongamos que la situación de la misma se determina con una exactitud de hasta una centésima de micra ($\Delta x = 10^{-6}$ cm); en este caso la correlación (3) da el siguiente valor para la exactitud de la medición de la velocidad:

$$\Delta v_x = \frac{h}{m \cdot \Delta x} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{10^{-12} \cdot 10^{-6}} \text{ cm/s} \cong 10^{-8} \text{ cm/s}.$$

es decir, la velocidad puede ser medida prácticamente con una exactitud tan grande como se desee.

Un estudio más detenido demuestra que el principio de incertidumbre se deduce directamente de los conceptos generales de la teoría cuántica. Supongamos que se trata de estudiar un haz paralelo de micropartículas que se mueven con una velocidad v determinada, dirigida a lo largo del eje OX. A este haz le corresponde un valor perfectamente determinado de la longitud de onda $\lambda = h/p$; por consiguiente, estará caracterizado por la onda «monocromática» plana (3) del § 362:

$$\Psi = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Wt - \mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}.$$

En nuestro caso $\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} = xmv$ y la ecuación de la onda toma la forma

$$\Psi = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Wt - xmv)}.$$

¿Qué podemos decir de las coordenadas de las partículas en un haz como éste? Para contestar a esta pregunta nos valdremos del hecho de que la probabilidad de hallar una micropartícula en el intervalo dx tomado sobre el eje OX es igual a

$$\Psi\Psi^* dx = \psi_0^2 dx. \qquad (4)$$

Aquí la longitud elemental dx sustituye al volumen de la expresión de la probabilidad del § 362. Como ψ_0 no depende de x, la probabilidad de hallar la partícula en el intervalo dx es constante y no depende del sitio del eje OX en que se tome el intervalo. Por consiguiente, la probabilidad de hallar la partícula es igual en cualquier parte del eje OX. De esta forma, si la partícula tiene una velocidad determinada, no tendrá una coordenada determinada. Esto concuerda con el «principio de incertidumbre», según el cual el hecho de que se dé exactamente la velocidad de la micropartícula debe conducir a una incertidumbre (o indeterminación) total de su coordenada.

Pero en la teoría mecanocuántica también se puede caracterizar una micropartícula localizada en una pequeña porción del espacio. Para esto hay que considerar un proceso ondulatorio («paquete de ondas») que puede caracterizarse por una función de amplitud ψ que sea diferente de cero en una región pequeña y que en todas las demás partes del espacio sea igual a cero. En este caso, como $\psi\psi^* dv$ determina la probabilidad de que la partícula se halle en el volumen dv, esta probabilidad será distinta de cero únicamente en una región pequeña, es decir, la partícula estará «localizada» en una pequeña porción del espacio. Un «paquete de ondas» de este tipo se puede construir considerándolo como una superposición de ondas planas de distinta longitud λ. Pero a cada longitud de onda λ le corresponde una velocidad de las partículas, por consiguiente, ahora la velocidad de las partículas no podrá estar determinada exactamente, cosa que también está de acuerdo con el «principio de incertidumbre». En este caso el cálculo matemático correspondiente lleva exactamente a las correlaciones (2a).

El principio de incertidumbre ha servido en más de una ocasión de tema para discusiones filosóficas. Esto se debe a que una serie de filósofos y físicos de países burgueses (Heisenberg y otros) intentaron (y continúan intentando) hacer del principio de incertidumbre el punto de partida para sus manifestaciones idealistas. Sus postulados se reducen a que, según ellos, el principio de incertidumbre marca el límite a los conocimientos de la naturaleza, puesto que según este principio no es posible medir simultáneamente con exactitud absoluta la coordenada y la velocidad de la partícula. Por consiguiente, según afirman los filósofos idealistas, el mundo es incognos-

cible. Partiendo de esto se suceden toda clase de deducciones de carácter idealista. Otro postulado idealista consiste en asegurar que las propiedades del micromundo no se pueden determinar por medio de correlaciones espacio-tiempo.

El análisis científico del principio de incertidumbre contradice estas conclusiones idealistas. El principio de incertidumbre no limita nuestras posibilidades de conocer las cualidades objetivas de las micropartículas, sino que únicamente sirve para determinar en qué medida puede ser útil la aplicación de los modelos de la Física clásica para describir las micropartículas. Los fenómenos relacionados con el micromundo se desarrollan en un espacio y en un tiempo, pero de forma diferente a los fenómenos del macromundo. La teoría mecanocuántica se caracteriza por expresar las propiedades del objeto que se estudia en las condiciones específicas de su interacción con los cuerpos que lo rodean, cosa que es una ilustración del postulado fundamental del materialismo dialéctico sobre la concatenación universal y el condicionamiento mutuo de los fenómenos de la naturaleza. No es extraño, pues, que las representaciones gráficas que nos formamos sobre la base de los experimentos con cuerpos macroscópicos resulten inaplicables a las micropartículas.

§ 364. Partículas en una caja de potencial. Paso a través de una barrera de potencial. En calidad de ejemplo de la cuantificación de la energía estudiaremos el caso en que una partícula se encuentra dentro de un pozo de potencial. Supongamos para simplificar que dicho pozo está limitado por barreras de potencial infinitamente altas y empinadas y que la partícula sólo se puede mover a lo largo del eje OX. Sea a la anchura del pozo; entonces dentro del campo de los valores de x que satisfacen la condición

$$0 < x < a,$$

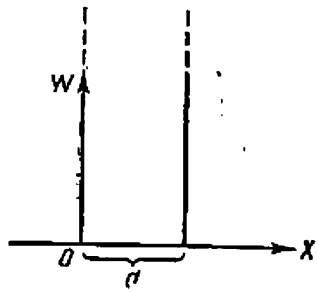

Fig. 371. Caja de potencial de anchura a y paredes infinitamente altas.

la partícula será libre y su energía potencial igual a cero, mientras que para los valores de x que se encuentren fuera de estos límites, es decir, cuando $x < 0$ ó $x > a$, la energía potencial será infinita (fig. 371). Este tipo de pozo de potencial lo designaremos con el nombre de «caja de potencial». Llamando W a la energía total de la partícula, escribamos para ella la ecuación de la amplitud de Schrödinger:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} W\psi = 0.$$

Como quiera que este problema es unidimensional, el operador de Laplace se reduce a la segunda derivada de ψ con respecto a x y la ecuación de Schrödinger toma la forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} W\psi = 0.$$

La solución de ésta ecuación será la función siguiente:

$$\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \tag{1}$$

donde

$$k = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}, \tag{2}$$

y A y B son constantes arbitrarias.

Sustituyendo las funciones exponencia les por trigonométricas, podemos escribir la función (1) de la forma:

$$\psi = (A + B)\cos kx + i(A - B)\operatorname{sen} kx. \tag{1a}$$

Como la energía potencial es infinita en los límite de la caja, la probabilidad de que la partícula salga fuera de los límites de sus paredes es igual a cero; de aquí se deduce que la expresión $\psi\psi^*$ deberá ser igual a cero más allá de los límites de la pared y en la propia pared, lo que es posible si la misma función $\psi(x)$ es igual a cero cuando $x = a$ y $x = 0$. Para que $\psi(x)$ sea igual a cero cuando $x = 0$ hace falta que en (1a) desaparezca el término en que figura el coseno, por lo tanto, las constantes A y B deben cumplir la condición:

$$A + B = 0,$$

de aquí obtenemos que $A = -B$, y como resultado de esto la expresión (1a) toma la forma:

$$\psi(x) = i2A \operatorname{sen} kx.$$

Para que $\psi(x)$ sea igual a cero cuando $x = a$ se impone una condición al valor numérico de k, es decir, k dederá satisfacer la igualdad

$$ka = n\pi, \tag{3}$$

donde n es un número entero cualquiera; en definitiva, para la función de onda $\psi(x)$ tenemos:

$$\psi(x) = i2A \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x.$$

Y como la magnitud k está relacionada con el valor de la energía W, la condición (3) nos da la cuantificación de la energía. Haciendo uso del valor de k dado por (2), hallamos:

$$W = \frac{\hbar^2}{2m} k^2.$$

Y poniendo aquí en lugar de k su valor según (3), obtenemos:

$$W = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}. \qquad (4)$$

De esta forma las condiciones límites que se imponen a la función $\psi(x)$ no pueden ser satisfechas por cualquier valor de la energía total W de la partícula, sino únicamente por aquellos valores que cumplen la correlación (4). Vemos, pues, que la energía de la partícula en la caja está cuantificada. Los niveles energéticos se obtienen por la fórmula (4) haciendo $n = 1, 2, 3, \ldots$. La distancia entre los niveles contiguos será igual a

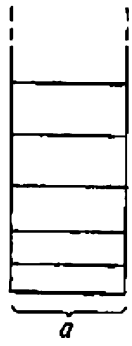

Fig. 372. Niveles energéticos en una caja de potencial.

$$\Delta W = (n+1)^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} - n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = (2n+1) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$

Como puede verse la distancia entre los niveles aumenta al ir aumentando el número cuántico n (fig. 372) y depende (lo mismo que los propios niveles) de la masa de la partícula m y de la anchura a de la caja. El papel de la cuantificación puede ser muy diferente en función de los valores de estas magnitudes. Tomemos, por ejemplo, un electrón en una caja de potencial de las dimensiones de los átomos, entonces:

$$m = 9 \cdot 10^{-28} \text{ g} \quad \text{y} \quad a = 10^{-8} \text{ cm}.$$

En estas condiciones las magnitudes de los niveles energéticos serán:

$$W = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = n^2 \frac{(6{,}6 \cdot 10^{-27})^2}{8 \cdot 9 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-16}} \cong n^2 \cdot 6 \cdot 10^{-11} \text{ erg}.$$

Comparando este valor para $n = 1$ con el de la energía cinética media del electrón calculada por la teoría electrónica clásica, para la temperatura normal ($T = 300°$ K):

$$W_{cl} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \cdot 1{,}37 \cdot 10^{-16} \cdot 300 \cong 7 \cdot 10^{-14} \text{ erg}.$$

Como puede verse, la cuantificación está expresada bruscamente y la distancia entre los niveles es grande en comparación con la energía cinética de los electrones a la temperatura normal.

Si tomamos un electrón que se encuentre en una caja de 1 cm de largo, para los niveles energéticos tendremos los valores numéricos

$$W = n^2 \frac{(6{,}6 \cdot 10^{-27})^2}{8 \cdot 9 \cdot 10^{-28} \cdot 1} \cong n^2 \cdot 6 \cdot 10^{-27} \text{ erg}.$$

En este caso los niveles energéticos están tan próximos entre sí que puede considerarse que la energía varía continuamente. Vemos, pues, que cuanto mayor es la zona en que el electrón se mueve libre-

mente tanto menor es la distancia entre sus niveles energéticos y la influencia que ejerce la cuantificación de la energía. La variación cuantitativa de la magnitud a da lugar a soluciones que se diferencian cualitativamente.

La cuantificación de la energía se obtuvo, en el ejemplo que hemos examinado, como consecuencia de haber resuelto la ecuación de Schrödinger teniendo en cuenta las condiciones límites que se le imponen a la función de onda.

La diferencia cualitativa entre las propiedades de las macro y micropartículas se pone de manifiesto de forma brusca sobre todo cuando se observa su comportamiento al encontrarse con una barrera

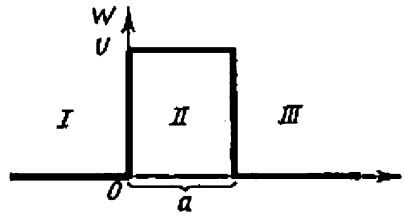

Fig. 373. Barrera de potencial.

de potencial. Explicaremos esto con el ejemplo siguiente. Supongamos que una partícula mecánica se mueve en un campo de fuerzas que por su carácter determina que la región en que se mueve la partícula a lo largo del eje OX esté dividida por una barrera de potencial. En el caso que representa la fig. 373 la barrera de potencial está condicionada por el hecho de que la energía potencial es igual a cero para todos los valores de $x < 0$ y $x > a$ y tiene un valor constante U para los valores de la coordenada x comprendidos entre los límites

$$0 \leqslant x \leqslant a.$$

Si la energía total de la partícula $W < U$, desde el punto de vista clásico la partícula se puede mover en la región, I, donde $x < 0$, o en la región III, donde $x > a$, pero no puede penetrar en la región de la barrera II, puesto que allí su energía cinética $W_c = W - U$ resultaría negativa, cosa que no es posible. Desde el punto de vista clásico toda partícula cuya energía total W es menor que la «altura» de la barrera de potencial U no puede pasar a través de dicha barrera desde la región I a la región III. Otra cosa ocurre con las micropartículas, cuyo comportamiento viene expresado por la ecuación de Schrödinger. En este caso la función de onda ψ también es diferente de cero en la región II, gracias a lo cual la probabilidad de que la partícula pase a través de la barrera resulta distinta de cero. Por consiguiente, una micropartícula cuya energía sea menor que la

altura de la barrera será capaz de pasar («infiltrarse») a través de ésta. Un ejemplo de esto puede ser la expulsión de una partícula α del núcleo de un átomo radiactivo (véase el § 371). El cálculo mecanocuántico permite determinar cuantitativamente la probabilidad de que la partícula pase a traves de la barrera.

Resulta que la probabilidad de que la partícula penetre a través de la barrera, desde la región *I* a la *II*, disminuye exponencialmente al aumentar la anchura *a* de la barrera. Esta probabilidad también depende mucho de la diferencia de energías $U - W$. La probabilidad de que la partícula penetre a través de la barrera es tanto mayor cuanto menor es la diferencia $U - W$, es decir, cuanto menor es la diferencia de «alturas» entre el nivel energético W y la barrera de potencial U. Por ejemplo, si la diferencia de energías $U - W$ es igual a pocos electrón-voltios y la anchura de la barrera tiene las dimensiones de los átomos ($a \cong 10^{-8}$ cm), la probabilidad de que los electrones pasen a través de la barrera será considerable.

El hecho de la «infiltración» de las micropartículas a través de la barrera de potencial está confirmado por multitud de datos. De esta forma, la Mecánica cuántica explica otro fenómeno incomprensible desde el punto de vista clásico.

La «infiltración» de las micropartículas a través de la barrera de potencial está íntimamente relacionada con las propiedades ondulatorias de aquéllas y en un fenómeno análogo a la penetración de las ondas a través de una capa delgada que separa dos medios ópticos más densos, caso en el que, desde el punto de vista de la óptica geométrica, debería tener lugar el fenómeno de la reflexión total § (252).

Cuando las barreras son anchas y las diferencias entre las energías grandes, la probabilidad de paso a través de la barrera es prácticamente igual a cero, es decir, en estos casos las deducciones de la teoría mecanocuántica coinciden con las de la mecánica clásica.

§ 365. El átomo de hidrógeno y la Mecánica cuántica. Como vimos anteriormente, los niveles energéticos del átomo de hidrógeno y de los iones semejantes a él, según Bohr, se hallan basándose en las reglas de cuantificación, de las que dependen las coordenadas y los impulsos del electrón. Estas condiciones cuánticas conducen a que para los valores posibles de la energía se obtenga la expresión:

$$W = -\frac{RhcZ^2}{n^2}. \qquad (1)$$

donde R es la constante de Rydberg y n es un número entero (número cuántico principal). Desde el punto de vista de la Mecánica cuántica el problema debe plantearse de otra manera. Los valores de la energía (1) se obtienen del análisis de la ecuación de Schrödinger. Suponiendo que la masa del núcleo es muy grande en comparación con la del electrón, consideraremos que el centro de gravedad del átomo coincide con la posición del núcleo. La energía potencial del electrón en el campo del núcleo se escribirá de la forma:

$$U = -\frac{e^2Z}{r},$$

y la ecuación de Schrödinger tomará la forma:

$$\Delta\psi+\frac{2m}{\hbar^2}\left(W+\frac{e^2Z}{r}\right)\psi=0. \tag{2}$$

La ecuación (2) debe resolverse en las coordenadas esféricas r, θ y φ y la función de onda debe buscarse como función de estas coordenadas: $\psi=\psi(r, \theta, \varphi)$, las coordenadas x, y, z, están relacionadas con las r, θ, φ por las correlaciones

$$x=r\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\varphi,\quad y=r\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}\varphi,\quad z=r\cos\theta.$$

En coordenadas esféricas la ecuación (2) toma la forma:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\times\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{son}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+$$
$$+\frac{2m}{\hbar^2}\left(W+\frac{e^2Z}{r}\right)\psi=0. \tag{3}$$

La ecuación (3) se resuelve separando las variables. Supongamos que $\psi(r, \theta, \varphi)$ es igual al producto de la función del valor numérico del radio vector r por la función de los ángulos θ y φ:

$$\psi(r, 0, \varphi)=R(r)\cdot Y(\theta, \varphi).$$

Poniendo este valor de ψ en (3), dividiendo el resultado obtenido por el producto de $R(r)\cdot Y(\theta, \varphi)$ y multiplicándolo después por r^2, hallamos:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{Y\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial0}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+$$
$$+\frac{1}{Y\operatorname{son}^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}+\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(W+\frac{e^2Z}{r}\right)=0.$$

Una parte de los términos de esta ecuación depende únicamente de r y otra únicamente de θ y φ. Su suma puede ser igual a cero solamente en el caso en que ambas partes sean iguales por separado a una misma magnitud constante tomada con signos distintos. De esta forma, deberán cumplirse las igualdades:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(W+\frac{e^2Z}{r}\right)=\lambda, \tag{4}$$

$$\frac{1}{Y\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}0\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}=-\lambda, \tag{5}$$

donde λ es la constante. Estas dos ecuaciones, como se demuestra en la teoría de las ecuaciones diferenciales, tienen soluciones unívocas, finitas y continuas únicamente para determinados valores de los parámetros W y λ que entran en ellas. La ecuación (5) se resuelve por medio de las funciones esféricas de orden l $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ con la condición de que

$$\lambda=l(l+1),\ \text{donde}\ l=0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Existen $2l+1$ funciones esféricas de orden l diferentes, linealmente independientes entre sí, por lo que en la expresión $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ el subíndice m toma los siguientes $2l+1$ valores:

$$m=l,\ l-1,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ -l. \tag{7}$$

Cuando $\lambda = l(l+1)$ la ecuación (4) toma la forma:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(W+\frac{e^2Z}{r}-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right)R=0. \qquad (4a)$$

Cuando $W<0$ esta ecuación tiene soluciones (finitas si $r\to\infty$) únicamente cuando W toma los valores

$$W=-\frac{me^4Z^2}{2\hbar^2(n'+l+1)^2}, \qquad (8)$$

donde n' es un número entero. De aquí se deduce que $n'+l+1$ también es un número entero n. Teniendo también en cuenta que $\frac{me^4}{2\hbar^2}=Rhc$, donde R es la constante de Rydberg, obtenemos:

$$W=-\frac{RhcZ^2}{n^2},$$

que coincide con (1). De esta forma, de la ecuación de Schrödinger, sin necesidad de ninguna clase de condiciones complementarias, se deduce que el átomo de hidrógeno y los iones semejantes a él pueden encontrarse solamente en una serie de estados energéticos discretos cuyas energías tienen los valores dados por la expresión (1).

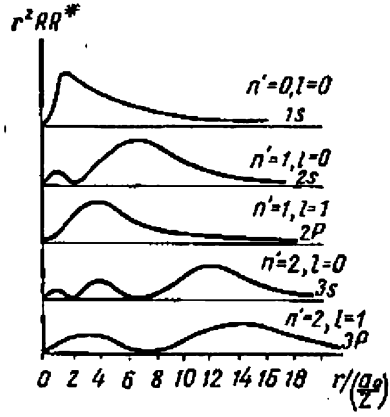

Fig. 374. Variación de r^2RR^* en función de r.

Cada uno de los estados estacionarios se caracteriza por los tres números enteros n', l y m, con la particularidad de que la energía depende de la suma $n'+1$ y no depende de m. Cuando $n'\geqslant 0$, tenemos que $n\geqslant l+1$ y, por consiguiente, para cada número cuántico principal n dado l puede tener los valores $l=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Cuando $W>0$ la ecuación (4a) puede resolverse para cualquier valor de W, de manera que la región de los valores posibles de W representará una región continua, cosa que se observa para los estados que se encuentran más allá del límite del potencial de ionización.

La probabilidad de que el electrón se encuentre dentro de un volumen elemental dv es igual a $\psi\psi^*\,dv$. Expresando dv en coordenadas esféricas, $dv = r^2\operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$, y sustituyendo ψ por el producto de las funciones $R(r)\cdot Y(\theta,\varphi)$, obtendremos para la probabilidad de hallar el electrón la expresión siguiente:

$$\psi\psi^*\,dv=RR^*r^2YY^*\operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi. \qquad (9)$$

En la fig. 374 se muestran los diagramas de las magnitudes r^2RR^* que da el factor de la expresión (9) que sólo depende del valor numérico del radiovector r. Sobre el eje de abscisas se han tomado los valores de $r/\left(\frac{a_0}{Z}\right)$, donde $a_0=\frac{\hbar}{me^2}$ es una magnitud que coincide con el radio de la primera órbita circular

del átomo de hidrógeno según la teoría de Bohr (§ 342). Para explicar la distribución espacial de la probabilidad $\psi\psi^* \, dv$ también hay que tener en cuenta el factor YY^*. En la expresión de la función esférica la dependencia con respecto al ángulo φ viene expresada únicamente por medio del factor $e^{im\varphi}$. De aquí se deduce que YY^* no depende de φ, puesto que $e^{im\varphi} \cdot e^{-im\varphi} = 1$. Por lo tanto YY^* sólo es función del ángulo θ. El aspecto de las funciones YY^* en forma de diagramas polares, para distintos valores de l y m, se puede ver en la fig. 375. La representación espacial de YY^* tiene la forma de las figuras de revolución engendradas por las curvas de la fig. 375 al girar sobre el eje OZ. Cuando $l = 0$ la función YY^* tiene simetría esférica.

La distribución de la probabilidad $\psi\psi^* \, dv$ puede compararse con los modelos de Bohr representativos de las órbitas del electrón dentro del átomo. En la fig. 374 puede verse que cuanto mayor es el número cuántico principal n tanto mayor es la probabilidad de que el electrón se halle a distancias mayores del núcleo. Esto está de acuerdo con la teoría de Bohr, según la cual las órbitas que tienen un número cuántico n grande son las de mayores dimensiones. Para el estado $n = 1$, $l = 0$ la probabilidad máxima corresponde al valor $r = \frac{a_0}{Z}$, es decir, precisamente al lugar por el que pasa la primera órbita circular de Bohr.

La Mecánica cuántica no sólo permite hallar los posibles valores de la energía W de un sistema atómico, sino también los valores posibles del momento

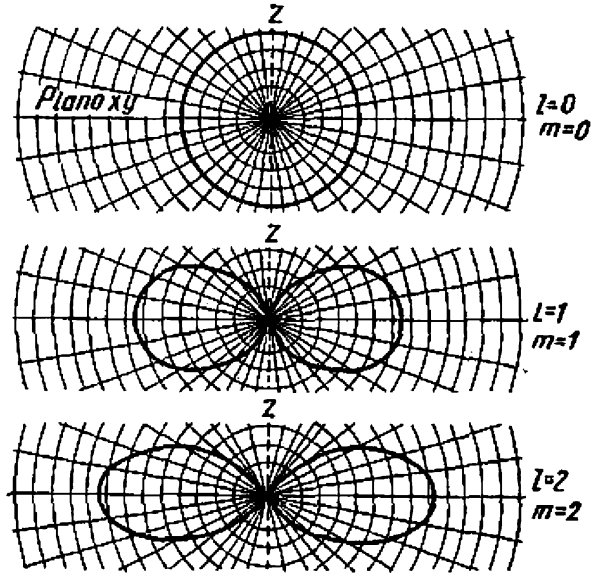

Fig. 375. Diagramas polares de la función YY^*.

de la cantidad de movimiento p y de su proyección p_z sobre la dirección privilegiada. Sin detenernos en cómo esto se consigue, daremos solamente los resultados. La teoría demuestra que para el átomo que se encuentra en el estado que se caracteriza por los números enteros n', l y m la proyección del momento de la cantidad de movimiento sobre la dirección privilegiada puede tomar únicamente los valores:

$$p_z = m\hbar.$$

De esta forma resulta que el número entero m coincide, por su sentido, con el número cuántico «magnético» m de la teoría de Bohr, que determina la orientación en el espacio del momento p del átomo.

Los valores posibles de la magnitud absoluta del momento p resultan ser iguales a

$$p = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar.$$

Con esto quedan confirmados los valores del momento de la cantidad de movimiento p que hubo que tomar en el modelo vectorial para explicar la estructura de los espectros dobletes (§ 348). Recordemos ahora que la teoría inicial de Bohr dada para p los valores $p = n_\psi \hbar$, donde n_ψ se diferencia de l en una unidad ($n_\psi = l + 1$).

§ 366. Estadísticas clásica y cuántica. En los problemas relacionados con un gran número de partículas, como dijimos en el t. I, se utilizan los procedimientos del cálculo estadístico. Por ejemplo, las leyes de la distribución de las partículas según sus energías (fórmula de Boltzmann) o según sus velocidades (ley de Maxwell) se hallan como resultado de estos cálculos.

A pesar de los grandes éxitos conseguidos por la Física estadística precuántica, en toda una serie de problemas las deducciones basadas en la estadística clásica no coinciden con los datos experimentales. Una de las mayores discrepancias entre la práctica y los cálculos es la concerniente a la teoría de la capacidad calorífica de los cuerpos sólidos donde quedaba sin explicar la variación de la capacidad calorífica de los cuerpos sólidos en función de la temperatura (t. I, § 93). El segundo fallo de la teoría estadística es el relacionado con la conductibilidad eléctrica de los metales. Según las hipótesis de la estadística cuántica (t. II, § 163) los electrones libres que determinan la conductibilidad eléctrica de los metales deben aumentar la capacidad calorífica de los cuerpos conductores con respecto a la que tienen los no conductores, cosa que la práctica no confirma. El conjunto de estos fracasos hicieron necesaria la revisión de los cálculos estadísticos sobre la base de las hipótesis cuánticas. Esta revisión condujo a la creación de una estadística en armonía con la teoría de los cuantos, que recibió el nombre de *estadística cuántica*, en la cual se conservan los adelantos de la estadística clásica a la vez que se eliminan las contradicciones antes indicadas.

Para facilitar la comprensión de la diferencia que existe entre la estadística clásica y la cuántica empezaremos por estudiar los postulados principales de los métodos estadísticos clásicos que se emplean en la Física. Comencemos por la estadística de Boltzmann, cuya ley de distribución hemos empleado repetidas veces. Supongamos que se tiene un sistema compuesto de N partículas que se encuentran en un volumen V. El estado mecánico de estas partículas estará determinado por sus coordenadas y velocidades. El estado de todo el sistema de N partículas estará determinado exactamente si a cada partícula se le atribuyen unas coordenadas y una velocidad determinadas. *Cuando*

el estudio tiene carácter estadístico, como el número de partículas es enorme, el método que se utiliza para determinar el estado del sistema es otro: las coordenadas y la velocidad de cada partícula se dan con cierta tolerancia. Por ejemplo, damos el estado de la partícula indicando que sus coordenadas se encuentran comprendidas en los intervalos cuyos valores son x y $x + \Delta x$, y e $y + \Delta y$, z y $z + \Delta z$ y que las proyecciones de su velocidad se encuentran entre los límites v_x y $v_x + \Delta v_x$, v_y y $v_y + \Delta v_y$, v_z y $v_z + \Delta v_z$.

El cálculo de los estados de las partículas se puede ilustrar por medio de representaciones geométricas. Tomemos las coordenadas x, y, z y las proyecciones de la velocidad v_x, v_y, v_z como coordenadas cartesianas generalizadas en un «espacio» de seis dimensiones. Este «espacio» se llama corrientemente *espacio* μ. En este espacio imaginario un punto se caracteriza por unos valores determinados de las coordenadas y de las proyecciones de la velocidad. De esta forma, cualquier partícula que se encuentra en un estado mecánico *determinado exactamente* determina a su vez un *punto* de nuestro espacio, cuyas coordenadas generalizadas son iguales a las coordenadas x, y, z y a las proyecciones de la velocidad v_x, v_y, v_z de la partícula tomada. *Pero cuando el estado de la partícula se define estadísticamente se puede indicar solamente que el punto que representa a este estado se encuentra dentro de un recinto elemental* $\Delta\tau$, del espacio μ, cuyos límites vienen determinados por los valores x, $x + \Delta x$; v_x, $v_x + \Delta v_x$, etc. La magnitud de este recinto elemental será igual a

$$\Delta\tau = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z.$$

Todo el espacio μ correspondiente a todos los estados posibles de la partícula podemos dividirlo en recintos elementales $\Delta\tau_i$. En este caso la suma de los volúmenes de todos estos recintos elementales $\sum_i \Delta\tau_i$ dará el volumen del espacio μ.

La definición estadística del estado de todo el sistema se reduce a indicar el número de partículas a las cuales corresponden los puntos que se encuentran dentro de cada recinto $\Delta\tau_i$ del *espacio* μ.

Si las dimensiones de los recintos elementales son pequeñas, cada uno de estos recintos se puede caracterizar por una energía, la cual tendrá el valor medio de la energía de la partícula cuyas coordenadas y las proyecciones de su velocidad están comprendidas dentro de los límites del recinto dado. Designemos la energía de los recintos por medio de ε_1, ε_2, ε_3, . . ., y el número de partículas correspondientes a cada uno de los recintos por N_1, N_2, N_3, . . . En este caso, al dar los números N_1, N_2, N_3, . . . se da la distribución de las partículas por energías.

Los distintos estados del sistema determinados por distintos valores de los números N_1, N_2, N_3, . . . pueden realizarse con mayor

o menor probabilidad. Es natural que admitamos que *el estado que se realiza con más frecuencia será aquel que se caracterice por tener la mayor probabilidad.* De esta forma el problema se reduce a hallar aquella distribución de las partículas por energías que tiene la mayor probabilidad. El cálculo correspondiente nos lleva a la fórmula de Boltzmann, según la cual el número de partículas dN_ε cuyas energías se encuentran en un intervalo de energías dado ε, $\varepsilon + d\varepsilon$ será

$$dN_\varepsilon = N_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon, \qquad (1)$$

donde N_0 es el número total de partículas.

Tiene importancia señalar que en esta teoría clásica las dimensiones de los recintos elementales no están limitadas más que por la condición de que puedan contener un número de partículas suficientemente grande, con la particularidad de que cuanto menor es el tamaño de los recintos más detallada es la definición que se obtiene del estado del sistema. En la suposición inicial el número de partículas correspondientes a cada recinto no está limitado por nada y se determina estadísticamente por las leyes de la teoría de probabilidades.

Otra cosa es lo que ocurre en la estadística cuántica. El volumen de los recintos elementales no puede tomarse aquí tan pequeño como se quiera. Por el «principio de incertidumbre» (§ 363) entre las «tolerancias» Δx, Δv_x, etc. tiene lugar la correlación $\Delta x \cdot \Delta v_x \cong \frac{h}{m}$, etc. Este hecho encuentra su expresión en que las dimensiones de los recintos del espacio μ tienen que suponerse iguales a

$$\Delta\tau_l = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta v_x\, \Delta v_y\, \Delta v_z = \frac{h^3}{m^3}. \qquad (2)$$

Además, en la teoría cuántica se tiene en cuenta la imposibilidad de distinguir las partículas iguales. Finalmente, en la teoría cuántica hay que tomar en consideración el hecho de que la partícula tiene un momento espinorial que puede caracterizarse por un número cuántico semientero (electrones, protones, etc.), entero o, en un caso particular, igual a cero (fotones). Las partículas con momento espinorial semientero cumplen el principio de Pauli, según el cual en cada nivel energético dado no puede haber más de dos partículas que tengan momentos espinoriales de direcciones distintas. Esto conduce a la ley de la distribución de las partículas por energías conocida por el nombre de distribución de Fermi:

$$dN_\varepsilon = \frac{\sqrt{2} \cdot V m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{Ae^{\varepsilon/kT} + 1} d\varepsilon, \qquad (3)$$

donde V es el volumen que ocupan todas las partículas y A es una magnitud que depende del número de partículas, de sus masas y de la temperatura. Desde el punto de vista de la teoría cuántica la distribución (3) debe emplearse en lugar de la distribución de Boltzmann (1) cuando se trata de electrones y de otras partículas elementales con momento espinorial semientero. En el t. II, § 163 ya hicimos alusión al empleo de la ley de Fermi en la teoría de la conductibilidad eléctrica. Allí mismo se hizo la comparación de la distribución de Fermi con la de Boltzmann y se indicó que para densidades pequeñas y altas temperaturas la distribución de Fermi coincide prácticamente con la de Boltzmann.

Para las partículas que tienen momento espinorial entero o que carecen de él (partículas α y núcleos con números de masa y de carga pares y algunas moléculas) la distribución viene dada por la fórmula llamada de Bose-Einstein:

$$dN_\varepsilon = \frac{\sqrt{2}\cdot Vm^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{Ae^{\varepsilon/kT}-1}\,d\varepsilon, \qquad (4)$$

que se distingue de la de Fermi únicamente en el signo de la unidad que hay en el denominador.

La diferencia que hay entre la estadística de Fermi y la de Bose-Einstein y sus relaciones con la estadística clásica de Boltzman puede explicarse sobre la base del caso particular de tres partículas *iguales* que se distribuyen entre tres estados. Supongamos que en estos estados se tienen en cuenta las distintas direcciones de los momentos espinoriales, de forma que, por el principio de Pauli, en un estado no puede haber más de una partícula.

Es evidente que la cantidad de distribuciones numéricas distintas de las tres partículas en los tres niveles es igual a diez; todas estas distribuciones se representan en las tres filas superiores de la tabla XXIV.

Tabla XXIV

1er estado	3	0	0	2	2	1	0	1	0	1
2° estado	0	3	0	1	0	2	2	0	1	1
3er estado	0	0	3	0	1	0	1	2	2	1
Boltzmann	1	1	1	3	3	3	3	3	3	6
Bose-Einstein	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Fermi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Desde el punto de vista de la estadística clásica, que admite la identificación individual de las partículas, cada una de las seis distribuciones que comienzan en la cuarta y terminan en la novena

puede realizarse de tres maneras distintas, por ejemplo, la cuarta distribución podrá ofrecer las siguientes variantes:

1. En el 1er estado las partículas 1ª y 2ª; en el 2° estado la 3ª.
2. En el 1er estado las partículas 2ª y 3ª; en el 2° estado la 1ª.
3. En el 1er estado las partículas 1ª y 3ª; en el 2° estado la 2ª.

Lo mismo puede decirse de las demás distribuciones hasta llegar a la décima. La décima distribución puede realizarse de seis maneras. Según Boltzmann, a cada una de estas distribucionos individuales se le atribuye un mismo peso estadístico. En ostas condiciones el peso estadístico de la cuarta distribución, por ejemplo, es tres veces mayor que el de la primera, y el de la décima, seis veces mayor que el de la primera (véase la fila cuarta de la tabla XXIV). Por esta razón, desde el punto de vista clásico, la probabilidad de que se realicen las distintas distribuciones no es la misma. Por ejemplo, la probabilidad de que se realice la cuarta distribución es tres veces mayor que la de que ocurra la primera, y la de que se realice la última es seis veces mayor que la de que ocurra la primera. La probabilidad de cada una de las tres primeras distribuciones es igual a 1/27, la de la última, 6/27, y la de cada una de las restantes 3/27.

Desde el punto de vista de la teoría cuántica las partículas iguales no se pueden distinguir, por ejemplo, en la cuarta distribución la experiencia puede dar únicamente lo siguiente: dos de las tres partículas se hallan en el primer nivel y una en el segundo. Según Bose-Einstein a todas las distribuciones numéricas se les atribuye el mismo peso estadístico y, por lo tanto, a todas las distribuciones numéricas que recoge la tabla XXIV les corresponde la misma probabilidad, igual a 1/10. Si la partícula tiene un momento espinorial semientero y, por consiguiente, cumple el principio de Pauli, de las diez distribuciones numéricas sólo es posible la última. De aquí, según Fermi, que a todas las distribuciones, excepto la última, se les debe atribuir un peso estadístico igual a cero. De acuerdo con esto, para las partículas que tienen momento espinorial semientero la probabilidad de que ocurran todos los estados, menos el último, es igual a cero. La probabilidad de que se realice el último es igual a la unidad, es decir, ésta es la única distribución posible de las tres partículas en los tres estados.

CAPITULO XXXII

Transformación nuclear natural y artificial

§ 367. Núcleo atómico y su característica. Como vimos en el § 339, el núcleo atómico se caracteriza por tener una carga positiva E múltiplo del valor numérico de la carga del electrón: $E = Z|e|$; la magnitud Z se llama *número de carga*, carga nuclear o número atómico y es igual al número de orden del elemento en el sistema periódico de Mendeléiev. De segunda característica del núcleo atómico puede servir *su masa* M_n. Esta masa está relacionada con el peso atómico del elemento. En el t. I, § 43 indicamos que en la Química se toma como peso atómico de un elemento cualquiera la relación que existe entre la masa de su átomo M_A y $\frac{1}{16}M_O$, donde M_O es la masa del átomo de oxígeno. Como quiera que en la Química los pesos atómicos se determinan por aquellas relaciones en peso en que los distintos elementos sustituyen al oxígeno en las combinaciones químicas, los pesos atómicos químicos caracterizan las propiedades medias de los átomos, sin tener en cuenta su composición isotópica. En realidad la mayoría de los elementos tienen varios *isótopos*, es decir, varias clases de átomos cuyas masas M_A son distintas a pesar de que tienen un mismo número de carga Z. Por esta razón, el concepto de peso atómico requería una determinación más exacta. Nosotros entendemos por peso atómico A de cualquier isótopo puro de un elemento dado la razón de la masa de un átomo M_A a $\frac{1}{16}M_O$, donde M_O es la masa del átomo del isótopo más difundido (y a la vez más ligero) del oxígeno. El peso atómico de este isótopo del oxígeno se toma igual a 16, 00000. Los pesos atómicos así definidos de los isótopos puros se hallan por medio del espectrómetro de masas.

El valor absoluto de la masa (en gramos) del isótopo del oxígeno de peso atómico $A = 16$ se puede hallar conociendo su peso molecular μ (igual a 16,00) y el número de Avogadro N:

$$M_0 = \frac{\mu}{N} = \frac{16{,}00}{6{,}023 \cdot 10^{23}} = 26{,}576 \cdot 10^{-24} \text{ g}.$$

A una unidad de peso atómico le corresponde una masa de

$$\frac{26{,}576 \cdot 10^{-24}}{16} = 1{,}662 \cdot 10^{-24} \text{ g},$$

de donde el valor absoluto de la masa M_A del átomo de cualquier isótopo se determina por la igualdad

$$M_A = 1{,}662 \cdot 10^{-24} \cdot A \text{ g}.$$

Como la masa del electrón es casi dos mil veces menor que la del núcleo del átomo más ligero, es decir, del átomo de hidrógeno, la masa del núcleo M_n de cualquier isótopo se diferencia muy poco de la del átomo en su conjunto M_A. No obstante, la precisión de las mediciones modernas hace que sea posible apreciar esta diferencia y, por lo tanto, debe tenerse en cuenta en algunos cálculos. Como el número de electrones que forman parte de la envoltura electrónica del átomo normal es igual a Z, tendremos que entre las masas M_n y M_A existirá la correlación:

$$M_n = M_A - Zm,$$

donde m es la masa del electrón. En unidades de peso atómico la masa del electrón es igual a $5{,}48 \cdot 10^{-4}$. En el átomo de hidrógeno la masa del electrón representa una fracción del 0,05% del peso total del átomo. Para otros átomos esta fracción es aún menor.

Ya a comienzos del siglo pasado fue lanzada la hipótesis de que los átomos de todos los elementos tenían una estructura compleja y que estaban formados por átomos de hidrógeno. Posteriormente fue desechada esta hipótesis basándose en el hecho de que los pesos atómicos de los elementos resultaron no ser múltiplos enteros del peso atómico del hidrógeno. El descubrimiento de los isótopos pareció que desmentía este hecho, puesto que si diversos elementos tenían pesos atómicos no enteros esto podía explicarse por la complejidad de su composición isotópica. No obstante, las mediciones con espectrómetros de masas demostraron que los pesos atómicos de los isótopos puros tampoco son múltiplos enteros del peso atómico del hidrógeno (o de 1/16 del peso atómico del isótopo ligero del oxígeno). La discrepancia entre los pesos atómicos de los isótopos puros y los valores enteros es muy pequeña. Pero se trata de discrepancias completamente reales que han sido medidas con un alto grado de exactitud.

En la tabla XXV se dan los pesos atómicos de los isótopos estables de los 11 primeros elementos del sistema periódico de Mendeléiev.

El número entero más próximo al peso atómico del isótopo puro se llama *número de masa* o número másico; nosotros lo designaremos con la letra M. El número de masa M, junto con el número de carga (o atómico) Z, es una de las características principales del núcleo. Los núcleos de distintos isótopos se designan con un símbolo, que corresponde al del elemento químico, en cuya parte superior derecha se escribe su número de masa y en la inferior izquierda el número de carga. Por ejemplo, el isótopo del litio de número de masa 7 se designa por ${}_3Li^7$ y el isótopo de este mismo elemento de número de masa 8, por ${}_3Li^8$. Más adelante veremos que el número de masa determina la cantidad de partículas elementales que entran en la composición del núcleo.

Tabla XXV

Peso atómico de los isótopos

Z	Isótopo	% en la mezcla natural	Peso atómico
1	H^1	99,98	1,00812
1	D^2	0,02	2,01472
2	He^3	$\sim 10^{-4}$	3,01701
2	He^4	100	4,00388
3	Li^6	7,9	6,01690
3	Li^7	92,1	7 01804
4	Be^9	100	9,01497
5	B^{10}	18,4	10,01605
5	B^{11}	81,6	11,01286
6	C^{12}	98,9	12,00398
6	C^{13}	1,1	13,00766
7	N^{14}	99,62	14,00750
7	N^{15}	0,38	15,00489
8	O^{16}	99,76	16,00000
8	O^{17}	0,04	17,00450
8	O^{18}	0,20	18,00470
9	F^{19}	100	19,00452
10	Ne^{20}	90,00	19,99881
10	Ne^{21}	0,27	21,00018
10	Ne^{22}	9,73	21,99864
11	Na^{23}	100	22,99680

El núcleo más simple es el del isótopo ligero del hidrógeno (*protón*), para el que tanto el número de carga como el de masa son iguales a la unidad.

En la tabla XXV puede verse fácilmente que los pesos atómicos de los isótopos son algo menores que el más cercano de los múltiplos enteros del peso atómico del hidrógeno. Por ejemplo, el peso atómico del hidrógeno cuadruplicado es igual a 4,03248, mientras que el peso atómico del helio es 4,00388. De esta forma, si admitimos que el átomo de helio está formado por cuatro átomos de hidrógeno tendremos que reconocer que existe un «defecto» de masa igual a 0,0286 g por cada mol de helio. Más adelante veremos que en la composición de los núcleos entran, además de protones, otras partículas (neutrones, § 379) que no figuran en la composición del isótopo ligero del hidrógeno, a pesar de lo cual *la masa de los núcleos es menor que la suma de las masas de las partículas elementales que entran en sus composiciones.* Cada núcleo se caracteriza por tener un *defecto de masa* Δm *determinado.*

En el § 300 vimos que la teoría de la relatividad establece la correlación entre la masa y la energía. La variación de la masa de un sistema en una magnitud Δm implica una variación de la energía de dicho sistema cuya magnitud será

$$\Delta W = \Delta m \cdot c^2, \qquad (1)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. De aquí se deduce que *el defecto de masa Δm de un núcleo expresa la cantidad de energía que se desprende al formarse dicho núcleo con las partículas elementales.* El núcleo tiene una masa menor que la suma de las masas de las partículas elementales que lo integran porque al formarse dicho núcleo se desprende una enorme cantidad de energía.

A la variación de la masa en una unidad de peso atómico le corresponde una variación de la energía

$$\Delta W = 1{,}662 \cdot 10^{-24} \cdot 9 \cdot 10^{20} \text{ erg} = 1{,}496 \cdot 10^{-3} \text{ erg}.$$

Esta misma magnitud se puede expresar en electrón-voltios, teniendo presente que 1 eV $= 1{,}601 \cdot 10^{-12}$ erg:

$$\Delta W = \frac{1{,}496 \cdot 10^{-3}}{1{,}601 \cdot 10^{-12}} \text{ eV} = 931{,}8 \text{ MeV}, \qquad (2)$$

el MeV (mega electrón-voltio) es igual a 10^6 eV. El defecto de masa calculado para una partícula elemental de las que integran el núcleo (es decir, la magnitud $\Delta m/M$) constituye para la mayoría de los núcleos 0,009 unidades de peso atómico aproximadamente, lo que según (2) equivale a 8,5 MeV. Es interesante comparar esta magnitud con la energía que se desprende en las reacciones químicas, que suele ser igual a 2—3 eV. Como puede verse, cuando las partículas elementales se unen para constituir un núcleo se desprende una energía millones de veces mayor (por unidad de masa de la sustancia que reacciona) que la que se desprende en las reacciones químicas. Estas energías son tan grandes que van ligadas a sensibles variaciones de las masas. En las reacciones químicas también se producen variaciones de las masas, pero como las cantidades de energía que en ellas se desprenden o absorben son muchísimo menores, estas variaciones son prácticamente inapreciables.

La gran cantidad de energía que se desprende cuando se forman los núcleos con las partículas elementales indica que los núcleos atómicos representan de por sí formaciones extraordinariamente resistentes. Esto explica las grandes dificultades que presenta la desintegración nuclear artificial.

La transformación natural de los elementos presentes en la corteza terrestre se observa muy raras veces y principalmente entre los elementos más pesados que figuran al final del sistema periódico de Mendeléiev. Estas transformaciones de los núcleos se conocen con el nombre de *radiactividad natural.*

§ 368. Radiactividad natural. En el año 1896 el físico francés. A. Becquerel estudiando las sales de uranio descubrió que éstas emiten unos rayos invisibles que producen el ennegrecimiento de las placas fotográficas. La investigación de los rayos del uranio en presencia de un campo magnético puso de manifiesto que estos rayos están formados por tres componentes. Una de estas componentes se desvía como debe hacerlo un flujo de partículas cargadas positivamente. Esta componente recibió el nombre de *rayos* α. La segunda componente se desvía lo mismo que un flujo de partículas cargadas negativamente, y la tercera no experimenta desviación alguna en presencia del campo magnético. Estas dos últimas componentes recibieron los nombres respectivos de *rayos* β y γ.

Dos años después Pierre Curie y Marie Curie-Sklodowska descubrieron dos nuevos elementos, el *radio* y el *polonio*, capaces de emitir radiaciones análogas a las del uranio pero más intensas. Descubrieron además que también tienen propiedades radiactivas el torio, elemento que ya era conocido.

Las investigaciones llevadas a cabo posteriormente sirvieron para establecer que la emisión radiactiva presenta las siguientes características: a) es capaz de producir efectos biológicos y químicos, en particular el ennegrecimiento de las placas fotográficas; b) ionizan los gases; c) excitan fluorescencia en muchos cuerpos sólidos y líquidos; d) tienen un gran poder de penetración.

Los rayos más penetrantes son los γ, los cuales pasan a través de espesores considerables de cuerpos sólidos, contándose entre estos últimos los metales. Los rayos α son menos penetrantes, pero pueden pasar también a través de capas delgadas de cuerpos sólidos, como, por ejemplo, a través del vidrio.

La temperatura de los cuerpos radiactivos es siempre mayor que la del medio que los rodea. Esto demuestra que el proceso radiactivo va acompañado de un desprendimiento constante de energía.

En 1908 Rutherford y sus colaboradores descubrieron espectroscópicamente que en una ampolla que contenía una pequeña cantidad de sal de radio ($RaCl_2$) habían aparecido dos nuevos gases que antes no existían en dicha ampolla. Uno de ellos producía rayas espectrales idénticas a las del helio; el otro espectro no coincidía con el de ninguno de los elementos conocidos hasta entonces. Este nuevo gas fue denominado *emanación del radio* y más tarde *radón*. La primera de estas denominaciones se debe a que al principio solamente se le encontraba en presencia del radio. En la actualidad se conocen varios isótopos de esta emanación. Las investigaciones llevadas a cabo sobre las propiedades de este gas demostraron que corresponde al grupo de los gases inertes; que tiene un número de carga (atómico) $Z = 86$ y un número de masa $M = 222$. Estas observaciones llevaron a la conclusión de que la radiactividad es un *proceso natural de disgregación del núcleo atómico*. Como resultado de esta desinte-

gración el elemento madre se transforma en otros. En el caso del radio la desintegración consiste en que del núcleo del átomo de radio se expulsa una partícula α, la cual es idéntica al núcleo del átomo de helio; esta partícula α después de neutralizarse se transforma en un átomo de helio ordinario. La parte restante del núcleo representa de por sí el núcleo de un nuevo elemento, el *radón*, que también es radiactivo y que está sujeto a transformaciones ulteriores.

Si el radio se coloca en una ampolla cerrada, la cantidad de radón aumentará en ella con bastante rapidez al principio y después quedará equilibrada y permanecerá invariable. Este equilibrio se establece cuando la cantidad de radón recién generado por el radio es igual

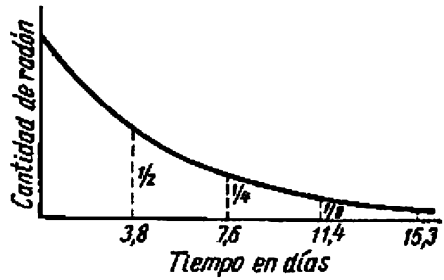

Fig. 376. Curva de la desintegración del radón.

a la cantidad de radón que se desintegra. Si se toma cierta cantidad de radón y se coloca en una ampolla cerrada donde no haya radio, esta cantidad irá disminuyendo ininterrumpidamente según la ley que representa gráficamente la fig. 376. Al cabo de 3,825 días quedará solamente la mitad, después de otros 3,825 días quedará la cuarta parte de la cantidad inicial y así sucesivamente. El espacio de tiempo $\tau = 3{,}825$ días se llama *período de semidesintegración, semiperíodo o vida mitad*. Si llamamos m_0 a la masa de la cantidad inicial de radio, la ley empírica de la disminución de esta cantidad con el tiempo t tiene la forma

$$m = m_0 e^{-\lambda t}, \tag{1}$$

donde λ es una constante que se llama *constante de desintegración radiactiva*. La forma de esta ley se explica fácilmente teniendo en cuenta que el número de átomos dN que se desintegran durante el tiempo dt es proporcional a la cantidad de átomos que existen:

$$-dN = \lambda N\, dt, \tag{2}$$

donde λ es una magnitud constante. Esta igualdad se puede escribir de la forma

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt.$$

Integrando esta expresión obtenemos:

$$\ln N = -\lambda t + C$$

donde C es la constante de integración. Cuando $t = 0$ tenemos que $\ln N_0 = C$, donde N_0 es la cantidad inicial de átomos. Aplicando el valor de C que hemos obtenido podemos escribir la fórmula (3) de la forma:

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t,$$

o pasando a la función exponencial

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{4}$$

que se corresponde con la ley empírica (1). La forma más fácil de comprobar en la práctica el cumplimiento de la ley exponencial de la desintegración es tomar sobre el eje de ordenadas de un sistema

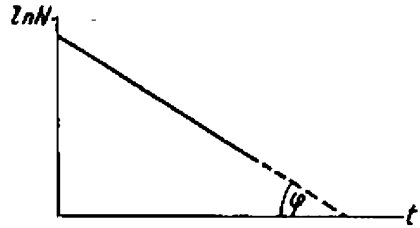

Fig. 377. Curva de la variación del $\ln N$ en función del tiempo.

de coordenadas cartesianas el $\ln N$ y sobre el eje de abscisas el tiempo t. En este caso, de acuerdo con la correlación (3), se obtiene una recta cuya inclinación determina el valor de la constante de desintegración $\operatorname{tg} \varphi = \lambda$ (fig. 377). La ley de la desintegración (4) es justa para todos los elementos radiactivos que se conocen.

La magnitud de la constante de desintegración λ es fácil de relacionar con el período de semidesintegración τ. Por definición, cuando $t = \tau$ tenemos que $N = \frac{1}{2} N_0$, de donde por (4)

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t}.$$

Tomando logaritmos obtenemos

$$\lambda \tau = \ln 2$$

o

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}. \tag{5}$$

Determinemos ahora la cantidad equilibrada de una sustancia radiactiva dada B, generada por otra sustancia radiactiva A («ma-

dre»). El número de átomos dN' de la sustancia B que surgen es igual al valor absoluto del número de átomos de la sustancia madre A que se desintegran, por consiguiente, de acuerdo con la fórmula (2) tenemos

$$dN' = \lambda N\, dt.$$

donde las magnitudes λ y N se refieren a la sustancia madre. Durante este mismo tiempo el número de átomos de la sustancia B que se desintegran será

$$-dN'' = \lambda' N'\, dt,$$

donde λ' y N' se refieren a la sustancia B. El equilibrio se establecerá cuando $dN' = -dN''$, de donde

$$\lambda N = \lambda' N'_0. \tag{6}$$

donde N'_0 es el número de átomos B cuando existe equilibrio.

Si se conocen N y N'_0 la correlación (6) permite hallar por medio de una de las constantes de desintegración (λ o λ') la otra constante. Esta correlación se emplea para hallar λ (y, por consiguiente, el período τ) en aquellas sustancias que se desintegran tan de prisa o tan despacio que hacen que la fórmula (4) sea prácticamente inaplicable. Las observaciones demuestran que los períodos de semidesintegración de las distintas sustancias radiactivas son muy diferentes. Así, el uranio tiene un período igual a $4{,}4 \cdot 10^9$ años; el radón, como ya dijimos, tiene $\tau = 3{,}825$ días y el elemento que se designa por RaC' tiene un período de semidesintegración de 10^{-9} s solamente.

La correlación entre el número de núcleos que se desintegran y el número de núcleos que existen (2) tiene *carácter estadístico*; esta correlación es justa únicamente cuando el número N es grande. La desintegración de cada núcleo determinado tiene el carácter de fenómeno casual. De aquí se deduce que deberá existir cierta fluctuación del número de núcleos que se desintegran.

Sea, por ejemplo, una sustancia radiactiva cuya desintegración es tan lenta que durante el tiempo de observación t su cantidad puede considerarse invariable. Dividamos el tiempo de observación t en k intervalos δt, de manera que $t = k\delta t$. Por término medio, durante el tiempo δt se desintegrará el número de átomos siguiente:

$$\delta \bar{n} = \lambda N\, \delta t,$$

donde N es el número de átomos de la sustancia radiactiva que estudiamos. En realidad, durante cada intervalo δt_i se desintegra un número de átomos δn_i algo diferente del número medio δn:

$$\delta n_i = \delta \bar{n} + \Delta$$

donde Δ es la discrepancia con el número medio; las discrepancias pueden ser positivas o negativas, pero la suma de todas ellas durante el período de observación t será igual a cero. Como se demuestra en la teoría de probabilidades, cuando k es grande la probabilidad p de una discrepancia determinada Δ viene dada

por la fórmula:

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta\bar{n}}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\delta\bar{n}}}. \qquad (7)$$

Las grandes discrepancias Δ son poco frecuentes. La fórmula (7) puede comprobarse prácticamente midiendo la ionización de un gas producida por la emisión radiactiva o contando directamente, por el centelleo (§ 370), el número de núcleos que se desintegran durante el intervalo δt_1. Las mediciones de este tipo han demostrado que la fórmula (7) se cumple y, por lo tanto, confirman que la desintegración de los núcleos tiene carácter casual.

§ 369. Ley de desplazamiento. La desintegración radiactiva como todo otro proceso, se desarrolla de acuerdo con la ley de la conservación de las cargas eléctricas y con la ley de la conservación de las masas y energías. Por la primera de estas leyes *la suma de las cargas de las partículas que aparecen es igual a la carga del núcleo madre.* La segunda ley puede escribirse de la forma siguiente: si M_n es la masa del núcleo madre y M_i la masa de las partículas surgidas,

$$M_n = \Sigma M_i + \frac{\Delta W}{c^2}, \qquad (1)$$

donde ΔW es la cantidad de energía que se desprende durante la desintegración y c es la velocidad de la luz en el vacío. Cuando se trata de radiactividad natural la energía ΔW corresponde a una masa que viene expresada en pequeñas fracciones de la unidad de peso atómico, por lo tanto, de la fórmula (1) se deduce que *la suma de los números de masa de las partículas surgidas es igual al número de masa del núcleo madre.*

Como ya dijimos, la transformación radiactiva del radio se reduce a la emisión de una partícula α; este proceso se llama *desintegración* α. El segundo tipo de desintegración va ligado a la emisión de rayos β. Los experimentos de desviación de los rayos de las sustancias radiactivas en presencia de un campo magnético han demostrado que los rayos β son un flujo de electrones muy rápidos. De esta forma la *desintegración* β consiste en que el núcleo madre emite un electrón. El tercer tipo de rayos, es decir, los rayos γ, es una radiación electromagnética cuya naturaleza es idéntica a la de los rayos X de onda corta. Estos rayos acompañan a los procesos de desintegración α y β.

La ley de la conservación de las cargas y de la constancia de las sumas de los números de masa permiten establecer la llamada *ley de desplazamiento*, por la que se puede determinar qué nuevo elemento aparecerá como resultado de una desintegración α o β determinada. Durante la desintegración α el núcleo madre emite un núcleo de átomo de helio $_2He^4$, es decir, una partícula cuyos números de carga y de masa son respectivamente 2 y 4. Por esto el nuevo elemento deberá tener un número de carga con dos unidades menos y un

números de masa con cuatro unidades menos que el núcleo madre. Designando con el símbolo X el núcleo madre y con el símbolo Y el núcleo descendiente o hijo, podemos escribir el proceso de desintegración α de la forma esquemática siguiente:

$$_{Z}X^{M} \rightarrow {}_{Z-2}Y^{M-4} + {}_{2}He^{4}. \qquad (2)$$

Como el número de carga (o atómico) determina el número de orden del elemento en el sistema periódico de Mendeléiev, del esquema (2) se deduce que *la desintegración α origina un nuevo elemento químico que en el sistema periódico se encuentra dos puestos antes que el elemento madre.*

De ejemplo puede servir la desintegración α del radio ($_{88}Ra^{226}$), que al emitir una partícula α se transforma en la emanación $_{86}Rn^{222}$.

$$_{88}Ra^{226} \rightarrow {}_{86}Rn^{222} + {}_{2}He^{4}.$$

Esta emanación es el radón, que tiene un número de masa 4 unidades menor que el radio y que es un gas inerte que se encuentra en el sistema periódico dos puestos antes que el elemento alcalinotérreo radio.

Al producirse la desintegración β el núcleo del elemento madre emite un electrón. La masa del electrón es casi dos mil veces menor que la del átomo de hidrógeno, por lo que el número de masa del electrón es aproximadamente igual a cero. La carga del electrón es numéricamente igual a la del protón, pero tiene signo negativo, de donde se deduce que para el electrón debe tomarse $Z = -1$.

De acuerdo con esto designaremos el electrón con el símbolo $_{-1}e^{0}$; entonces el esquema de la desintegración β será:

$$_{Z}X^{M} \rightarrow {}_{Z+1}Y^{M} + {}_{-1}e^{0}.$$

El número de masa del núcleo nuevo será igual al número de masa del núcleo madre, mientras que el número de carga (atómico) será una unidad mayor. *Como resultado de la desintegración β se obtiene un elemento químico nuevo que ocupa en el sistema periódico de Mendeléiev el puesto siguiente al del elemento madre.*

Las dos leyes de desplazamiento que hemos citado permiten comprender totalmente todas las transformaciones sucesivas que produce la radiactividad natural de los elementos pesados que existen en la corteza terrestre. Existen *tres series o familias de elementos radiactivos*, encabezadas por el uranio $_{92}U^{238}$, el torio $_{90}Th^{232}$ y el isótopo del uranio $_{92}U^{235}$ llamado también *actino-uranio* (AcU). Esta última serie se llama serie del actinio*.

*) En la actualidad ha quedado establecido que existe una cuarta serie o familia radiactiva encabezada por el elemento transuránico de $Z = 95$ (serie del neptunio).

En la fig. 378 se representan las transformaciones sucesivas que tienen lugar en cada una de las tres series radiactivas. Sobre los ejes de abscisas se han tomado los números de carga Z y sobre el de ordenadas el número de masa M. En estos diagramas la desintegración α produce un desplazamiento hacia la izquierda y hacia abajo, mientras que la desintegración β produce un desplazamiento horizontal hacia la derecha. Las tres series terminan en isótopos *estables* (no radiactivos) del plomo ($Z = 82$). Algunos de los miembros de estas series tienen nombre de ascendencia histórica: uranio X_1 (UX_1), uranio X_2 (UX_2); radio A y radio B (RaA y RaB); mesotorio ($MsTh_1$ y $MsTh_2$), etc. Todos ellos son isótopos de los elementos cuyos números de carga Z están comprendidos entre $Z = 92$ y $Z = 81$. Por ejemplo, el radón ($_{86}Rn^{222}$), el torón ($_{86}Tn^{220}$) y el actinón ($_{86}An^{219}$) son tres isótopos diferentes del gas inerte de $Z = 86$ (emanación). Los miembros de las series del torio y del actinio de símbolos ThC'' y AcC'' son dos isótopos radiactivos (de $M = 208$ y 207) del talio, el cual tiene en estado natural dos isótopos estables, el $_{81}Tl^{203}$ y el $_{81}Tl^{205}$.

Las tres series tienen ramificaciones debidas a que un mismo elemento puede experimentar las desintegraciones α y β. Así, en la serie del uranio el elemento $_{83}RaC^{214}$ puede transformarse en RaC'^{214} por desintegración β o en $_{81}RaC''^{210}$ por desintegración α. Después el RaC' experimenta la desintegración α y el RaC'' la desintegración β; estas dos desintegraciones llevan, como puede verse fácilmente, a la aparición de un mismo nuevo elemento, el $_{82}RaD^{210}$ (isótopo radiactivo del plomo). Detengámonos también en la ramificación que empieza en el $_{89}Ac^{227}$. En la inmensa mayoría de los casos (99%) el núcleo de este elemento emite una partícula β y se transforma en el $_{90}RaAc^{227}$ (isótopo del torio). Pero en casos poco frecuentes (1%) el núcleo del $_{89}Ac^{227}$ emite una partícula α y se transforma en el elemento de $Z = 87$ y $M = 223$; éste es isótopo radiactivo del elemento vaticinado por Mendeléiev ekacesio (o francio), que no existe en forma estable. En las series radiactivas del uranio y del torio también se producen en cantidades muy pequeñas núcleos de $Z = 85$, $M = 218$, y $Z = 85$ y $M = 216$, que son isótopos radiactivos de otro elemento también vaticinado por Mendeléiev, el ekayodo (o astato).

Las tres series están encabezadas por elementos que tienen un gran período de semidesintegración: el $_{92}U^{238}$ que tiene un período $\tau = 4{,}4 \cdot 10^9$ años; el torio que tiene $\tau = 1{,}8 \cdot 10^{10}$ años y el AcU con $\tau = 4 \cdot 10^8$ años. Esto explica el hecho de que existan aún en la corteza terrestre elementos radiactivos. En épocas remotas debieron desarrollarse procesos de integración de estos elementos por otros más ligeros. Al caer en la superficie de la Tierra estos elementos comenzaron a desintegrarse, convirtiéndose en los ascendientes de todos los demás elementos radiactivos naturales. Pero estos elemen-

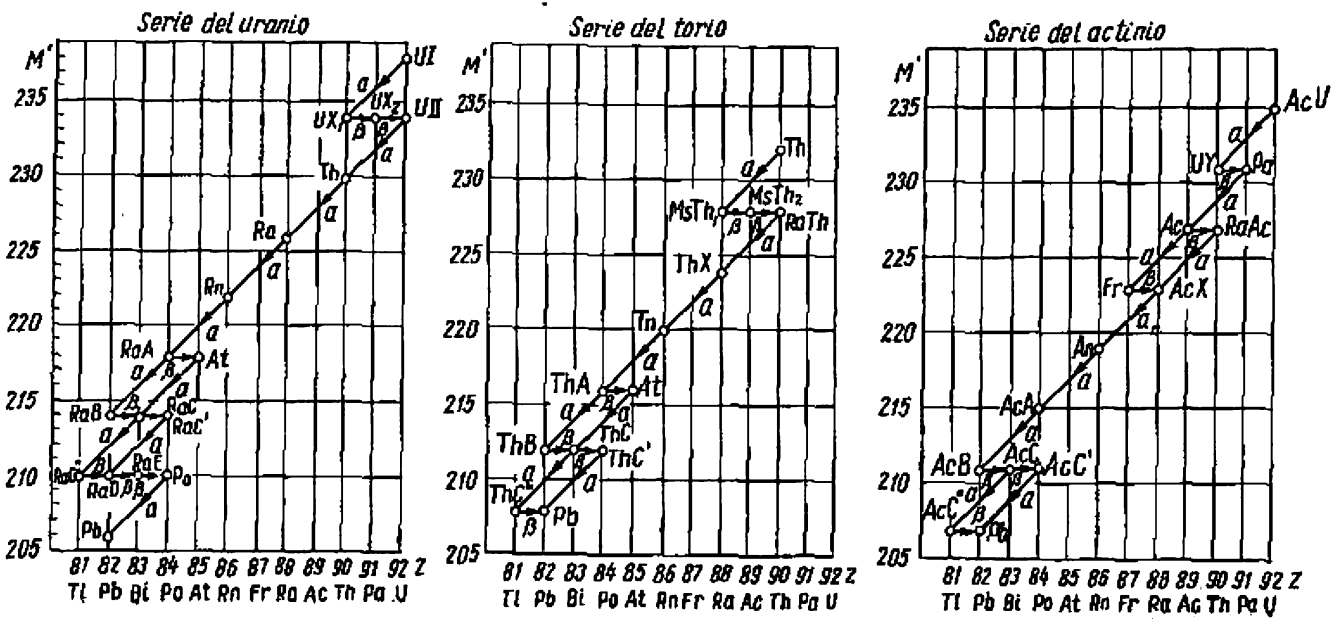

Fig. 378. Transformaciones de las series radiactivas.

tos no han tenido tiempo de desintegrarse por completo en el plazo transcurrido desde su integración hasta nuestros días. En los yacimientos de elementos radiactivos siempre se encuentra plomo, el cual es el producto final de su desintegración. Como ya hemos dicho, la serie del uranio termina en el isótopo Pb^{206}, la del torio en el isótopo Pb^{208} y la del actinio en el Pb^{207}. De acuerdo con esto los minerales de uranio (en los que existen ${}_{92}U^{238}$ y ${}_{92}U^{235}$) contienen plomo que es mezcla de los *dos* isótopos Pb^{206} y P^{207} y el mineral de torio contiene plomo que es el isótopo puro Pb^{208}. Este es uno de los pocos casos en que un isótopo estable se encuentra en la corteza terrestre en forma aislada.

Además de los elementos radiactivos que hemos mencionado también presentan radiactividad, aunque muy pequeña, el potasio ($\tau = 1{,}3 \cdot 10^9$ años), el rubidio ($\tau = 6{,}5 \cdot 10^{10}$ años) y el samario ($\tau = 6{,}7 \cdot 10^{11}$ años).

En la actualidad sabemos que existe una gran cantidad de isótopos radiactivos de otros elementos. Estos isótopos no se encuentran en estado natural en la corteza terrestre, sino que se obtienen únicamente por vía artificial. Esto se explica porque su período de semidesintegración es relativamente pequeño y por esto, aunque existieran alguna vez en la corteza terrestre, han tenido tiempo de desintegrarse por completo.

§ 370. Métodos de observación de los fenómenos radiactivos. La radiactividad comenzó a estudiarse basándose en su acción fotográfica o en la ionización del aire producida por las radiaciones α, β y γ. Como término de comparación de la actividad de los diferentes elementos radiactivos se tomaba su poder ionizante. En el año 1910 el Congreso Internacional de Radiología aprobó como unidad de radiactividad la actividad del radón en equilibrio con 1 g de radio puro. A esta unidad se le dio el nombre de *curie*. Además de esta unidad se utilizan sus derivadas, el *milicurie* y el *microcurie*.

La radiaticividad se observa también por medio de la fluorescencia que producen en los cuerpos sólidos.

Las grandes energías que se desprendon durante la desintegración radiactiva permiten detectar partículas α y β aisladas. De esta forma, en el campo de la radiactividad se pueden estudiar procesos elementales aislados, cosa que desempeña un gran papel en todo el desarrollo moderno de la Física nuclear.

Estudiemos los diversos métodos que se utilizan para registrar partículas aisladas.

1. Método del centelleo. Este es el procedimiento más simple de registrar partículas aisladas y se basa en que la emisión de luz provocada en un cuerpo fluorescente (por ejemplo, en el sulfuro de zinc) por el choque de una partícula es tan intensa que puede ser percibida a simple vista (cuando el ojo está adaptado, § 305). Si

se interpone una pantalla de sulfuro de zinc en el camino a seguir por un flujo de partículas α y se observa con un microscopio de poco aumento, en el campo visual de este último se ven destellos aislados (*centelleo*). Cada uno de estos destellos corresponde al choque de una partícula α con la pantalla. De esta forma se puede contar directamente el número de partículas α que llegan a la pantalla y determinar el sitio de esta última en que caen.

El método del centelleo sirve también para observar las partículas β rápidas.

El cálculo directo del número de partículas α que llegan a la pantalla fluorescente da la posibilidad de hallar el número de partículas emitidas en todos los sentidos por una cantidad determinada de sustancia radiactiva. Para esto no hay más que multiplicar el número de destellos observado por $4\pi/\omega$, donde ω es el ángulo sólido bajo el cual se ve la pantalla desde el sitio en que se encuentra la preparación radiactiva. Por este procedimiento se estableció que 1 g de Ra emite en un segundo $3{,}7 \cdot 10^{10}$ partículas α.

Conociendo este número se puede calcular el de Avogadro N por la cantidad de helio que se genera durante la desintegración radiactiva. Si colocamos una cantidad determinada de radio en un recipiente cerrado, del que no puedan escaparse las partículas α, en él comenzará a acumularse helio. Examinando la serie del uranio (fig. 378) se ve que después del Ra van los elementos Rn, RaA y RaC′ que también emiten partículas α. En nuestro caso nos limitaremos a considerar estos tres miembros de la serie, puesto que el RaD tiene un período de semidesintegración relativamente grande ($\tau = 22$ años) y por eso el siguiente elemento (Po) con radiactividad α se acumula en cantidades insignificantes (cuando la observación no dura demasiado tiempo). Cuando los cuatro miembros de la serie Ra, Rn, y RaA RaC′ se encuentren en estado de equilibrio emitirán en la unidad de tiempo el mismo número de partículas α, número que en conjunto será $n = 3{,}7 \cdot 10^{10} \cdot 4\,\text{g}^{-1}\text{s}^{-1} = 14{,}8 \cdot 10^{10}\,\text{g}^{-1}\text{s}^{-1}$. A costa de estas partículas α se irá acumulando helio en el recipiente. Las mediciones directas demuestran que en estas condiciones cada gramo de radio genera 172 mm³ de helio al año, o que representa el siguiente número de moléculas por segundo:

$$\nu = \frac{172}{22{,}4 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} = 2{,}43 \cdot 10^{-13}\ \text{mol/s},$$

de donde hallamos que el número de Avogadro

$$N = \frac{n}{\nu} = \frac{14{,}8 \cdot 10^{10}}{2{,}43 \cdot 10^{-13}} = 6{,}07 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1},$$

que coincide, dentro de los límites de los errores de observación, con el valor de N determinado por otros procedimientos.

El método del centelleo se utiliza actualmente en los llamados *contadores de centelleo*. Estos aparatos tienen un cristal luminiscente situado inmediatamente delante de un fotomultiplicador (véase el § 305), el cual bajo la acción de la luz del centelleo crea un impulso de corriente registrable. Existen muchas sustancias fosforescentes, sobre todo orgánicas, cuyo tiempo de desexcitación es muy pequeño (del orden de 10^{-9} s); la duración del impulso de corriente en el fotomultiplicador es aún menor y alcanza 10^{-10} s.

Estas circunstancias permiten registrar impulsos que se suceden entre sí con intervalos muy pequeños, por lo que el aparato posee un alto poder separador con respecto al tiempo. Cuando se trata de registrar partículas diferentes los contadores de centelleo son más eficaces que los de ionización. Hay fósforos cuyo rendimiento luminoso es proporcional a la energía de las partículas que producen el destello, cosa que da la posibilidad de utilizar este contador para medir la energía de las partículas.

2. **Cámara de Wilson.** El funcionamiento de la cámara de Wilson se basa en el hecho de que los iones pueden servir en los gases de centros de condensación del vapor. Si a través de un espacio que contenga gas y vapor sobresaturado se hace saltar una partícula rápida, que produzca a su paso iones, sobre estos iones se formarán gotitas. En la cámara se observa la trayectoria de la partícula en forma de una estrecha franja de niebla. Si existe una iluminación lateral suficientemente intensa esta trayectoria se puede observar a simple vista o fotografiarse.

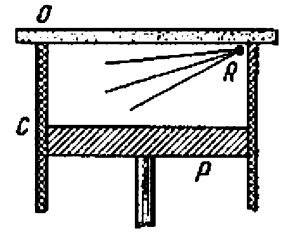

Fig. 379. Esquema de la cámara de Wilson.

En la fig. 379 se ve el esquema de la cámara de Wilson: C es un recipiente cilíndrico que contiene gas y vapor saturado de agua o de otro líquido cualquiera; la parte superior del cilindro va cerrada con un vidrio O. En el cilindro C se puede mover el émbolo P. Cuando el émbolo desciende rápidamente el gas experimenta una expansión adiabática que da lugar a que se enfríe, con lo que el vapor pasa al estado sobresaturado. Si en la cámara se introdujo previamente una pequeña cantidad de preparación radiactiva R, las partículas que esta preparación emite ionizan el gas a lo largo de sus trayectorias y la niebla que se forma en torno a los iones hace que estas trayectorias sean visibles. En la foto 6 (véase el apéndice) se ven las huellas de las partículas α emitidas por una preparación de ThC.

La cámara de Wilson sirve también para observar las trayectorias que siguen las partículas β. Como la cantidad de iones que estas partículas generan en el gas, por unidad de longitud, es menor que la que producen las partículas α, las huellas que dejan a su paso son más débiles. Las partículas β relativamente lentas producen huellas encorvadas, debido a que cambian fácilmente de dirección cuando chocan con los átomos del gas; las partículas β rápidas siguen trayectorias rectilíneas. De esta forma, por el aspecto de las huellas que dejan las partículas en la cámara de Wilson, podemos formarnos una idea de la naturaleza de la partícula que se observa.

D. V. Skobeltsín perfeccionó este método situando la cámara de Wilson en un campo magnético constante paralelo al eje de la

cámara. En este caso la trayectoria de la partícula β representa una línea helicoidal (las trayectorias de las partículas α experimentan poca deformación debido a la gran masa que poseen). En el caso más simple, es decir, cuando la partícula β se mueve perpendicularmente a la dirección del campo magnético, su trayectoria toma la forma de arco de circunferencia cuyo radio R es igual (véase el t. II, § 217):

$$R = \frac{c}{e/m} \frac{v}{H}, \qquad (1)$$

donde H es la intensidad del campo magnético y v la velocidad de la partícula.

Como la razón e/m correspondiente a las partículas β (electrones) es conocida, por la fórmula (1) se puede determinar la velocidad v y, por consiguiente, la energía cinética de la partícula β que se observa. Cuando se trata de partículas β rápidas hay que tener en cuenta la variación de la masa en función de la velocidad.

3. **Contadores de ionización.** Otro aparato que se emplea mucho en la actualidad es el contador de partículas de ionización. Estos contadores pueden ser de filamento (fig. 380, *a*) o de punta

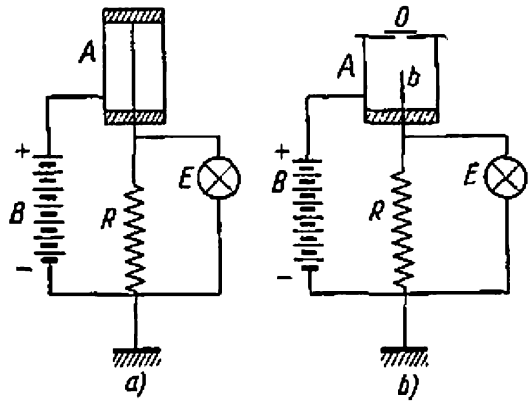

Fig. 380. Esquema de los contadores: *a*, de filamento; *b*, de punta.

(fig. 380, *b*). El contador de filamento está formado por un tubo metálico A cuyas bases se cierran con aisladores. A lo largo del eje del tubo hay un hilo metálico tenso. El contador se llena de un gas cualquiera a baja presión (10-20 cm de la columna de mercurio). El hilo del contador se une a tierra a través de una resistencia grande R. Entre este hilo y las paredes del tubo se crea por medio de una batería B una diferencia de potencial V, la cual debe ser algo menor que la tensión disruptiva del gas que hay en el contador. Cuando una partícula rápida llega al contador ioniza el gas y a causa

de esto y de la acción de la diferencia de potencial V se produce la disrupción del gas. A través del contador empieza a pasar corriente y a lo largo de la resistencia R se produce una caída de potencial que se mide con el electrómetro E. Los parámetros del contador se eligen de tal manera que la descarga a través de él cese en el momento en que se interrumpa la ionización del gas. De esta forma, cada vez que una partícula rápida llega al contador se produce una corriente de poca duración (impulso) que se aprecia por la separación de los hilos del electrómetro E. En la actualidad estos contadores se suelen unir a esquemas radiotécnicos amplificadores que permiten registrar la llegada de cada partícula por medio de un contador mecánico o de un destello luminoso que se puede fotografiar.

En el contador de punta (fig. 380, *b*) el hilo se sustituye por una aguja *b*. En este caso la tapa del extremo delantero del tubo *A* tiene un orificio *O* que se cierra con una hoja metálica fina, que sirve para que las partículas penetren en el contador con más facilidad. El contador de punta puede contener gas a baja presión o la presión atmosférica. El principio por el que funciona este contador es el mismo que el del contador de filamento.

Los contadores en que la intensidad de la corriente que pasa es proporcional al número de iones producidos por la partícula se llaman *proporcionales*. Estos permiten distinguir la acción de las partículas α de la de las β, que producen una ionización más débil. Las condiciones para el funcionamiento del contador proporcional se pueden elegir de manera que registre solamente la llegada de partículas muy ionizantes (partículas α).

Estos contadores sirven también para observar los rayos γ, los cuales se registran por los electrones secundarios (fotoelectrones, electrones de Compton) que producen.

A veces se emplea el llamado esquema de coincidencia. Este esquema consiste en que el dispositivo radiotécnico amplificador registra únicamente los impulsos simultáneos de dos (o más) contadores. Por consiguiente, este esquema registra exclusivamente la partícula que pasa por los dos contadores.

4. Método de las placas fotográficas de capa gruesa. Este método fue elaborado por los físicos soviéticos L. V. Misovski y A. P. Zhdánov. Se basa en que cada una de las partículas α que llegan a la placa hace que en aquellos granos de emulsión fotográfica por que pasa se descomponga el bromuro de plata. Después de revelar la placa quedan en su gruesa capa de emulsión (cuyo espesor es de 50-300 μ) las huellas (en forma de puntos sucesivos ennegrecidos) de las trayectorias seguidas por las partículas. Estas huellas se observan después al microscopio. Una ventaja de este método es su acción aditiva. La descomposición del bromuro de plata producida por una partícula se conserva durante cierto tiempo, por lo que la misma placa se puede utilizar para registrar los caminos que siguen

muchas partículas, aunque pasen a considerables intervalos de tiempo unas de otras.

5. **Contadores de Cherenkov.** Estos contadores se basan en la radiación de Cherenkov (§ 331) que producen las partículas que se mueven en un medio con velocidad mayor que la de la luz en ese mismo medio c/n. Inicialmente el efecto Cherenkov se descubrió como una radiación de los electrones rápidos producidos por los rayos γ. Posteriormente resultó que de acuerdo con las concepciones teóricas esta radiación es emitida por cualquier partícula cargada (por ejemplo, el protón) que se mueva con una velocidad $v > c/n$. Cuando las partículas son rápidas la potencia de la radiación producida por una de ellas es suficiente para que pueda ser registrada por los receptores de luz modernos más sensibles (fotomultiplicadores). El contador se hace en forma de cilindro de sustancia transparente que tenga el mayor índice de refracción n posible y poca dispersión (plexiglás, lucita u otros). La ventaja que ofrece el contador de Cherenkov con respecto a los otros es que da la posibilidad de determinar la dirección en que se mueve la partícula y la magnitud de su velocidad.

§ 371. **Desintegración alfa.** La velocidad inicial de las partículas α que emiten los elementos radiactivos es del orden de 10^9 cm/s, lo que corresponde a energías de varios MeV.

Al pasar a través de una sustancia cualquiera las partículas α pierden paulatinamente su velocidad, cosa que en definitiva hace que se paren. La longitud de las huellas de las trayectorias que siguen las partículas α de los distintos elementos radiactivos observadas en la cámara de Wilson con aire a presión normal oscila entre 2,6 y 11,5 cm aproximadamente. Durante este recorrido la partícula α pierde tanta velocidad que después deja de ser capaz de ionizar el aire. Para un mismo elemento radiactivo la longitud de todas las huellas es aproximadamente la misma, cosa que demuestra la gran uniformidad de las velocidades de las partículas α al ser expulsadas del núcleo. La longitud del camino R que recorre la partícula α se llama *alcance o recorrido**). En la figura 381 (línea de trazo continuo) se muestra la variación, en función de la magnitud R, del número n de partículas α que recorren un camino igual o mayor que un valor determinado de R. Como puede verse, hasta cierto valor $R_{mín}$, el número de partículas permanece prácticamente constante. Después el número de partículas cuyo alcance $R > R_{mín}$ disminuye rápidamente. Esto demuestra que los alcances de las partículas α emitidas por una misma sustancia radiactiva varían dentro de unos límites muy pequeños. La curva de trazo punteado da la distribución del número de partículas según sus alcances.

---

*) Algunos autores lo llaman «rango», del inglés «range». (*N. del T.*)

La pérdida de energía que experimentan las partículas α al pasar a través de una sustancia se debe, principalmente, a sus choques con los electrones, con la particularidad de que en cada choque la partícula pierde solamente una parte pequeñísima de su energía. Para que la partícula α se pare por completo tiene que sufrir un

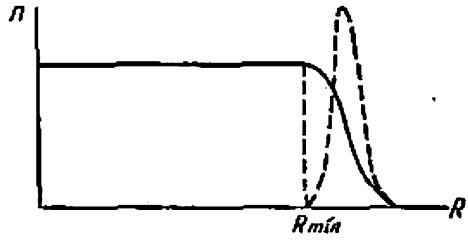

Fig. 381. Curva del alcance de las partículas α.

gran número de choques. La diferencia de alcances tiene carácter fluctuoso y es pequeña en comparación con el propio alcance.

El alcance R es proporcional aproximadamente al cubo de la velocidad inicial de la partícula α:

$$R \cong av^3. \qquad (1)$$

Esta correlación es justa para las partículas α de velocidad media. Cuando se trata de partículas α rápidas el alcance aumenta de forma proporcional a v^4 aproximadamente.

Las velocidades de las partículas α se pueden medir exactamente por la desviación que experimentan en presencia de un campo magnético. El primero que consiguió realizar estas mediciones fue P. L. Kápitsa, que creó para ello una instalación especial que permitía obtener campos magnéticos transitorios muy intensos (de várias centenas de miles de oerstedios). Las mediciones en presencia de campos magnéticos demostraron que cada sustancia radiactiva emite, en general, partículas α de varios grupos, cuyas velocidades se diferencian un poco entre sí. Dentro de cada grupo las velocidades son bastante uniformes. Además de las partículas α de alcance normal cada elemento emite una cantidad reducida de partículas α de gran alcance. Así, por ejemplo, el radio por cada millón de partículas α con alcance de 7 cm emite cerca de 28 partículas α con alcance de 9 cm y cerca de 5 partículas con alcance de 11 cm.

Existe una relación determinada entre la velocidad inicial de la partícula α y el período de semidesintegración τ de los elementos radiactivos que la emiten: *cuanto menor es el semiperíodo del elemento radiactivo, tanto más rápidas son las partículas α que emite.* Cuantitativamente esta relación viene expresada por la llamada regla de Geiger — Nuttáll, que fue establecida basándose en el análisis

de los datos empíricos.

$$\ln \lambda = A \ln R + B, \qquad (2)$$

donde R es el alcance de la partícula α, λ es la constante de desintegración radiactiva, A es una constante universal y B una constante característica de cada serie radiactiva. Como $R \cong av^3$ y $\lambda \sim \frac{1}{\tau}$, de la correlación (2) se deduce que los núcleos que tienen un semiperíodo pequeño emiten partículas α rápidas.

El alcance, según Geiger, es igual a

$$R = av^3 = a'E^{3/2},$$

donde v es la velocidad de la partícula α, E es la energía y a y a' son magnitudes constantes, es decir:

$$\ln \lambda = A' \ln v^3 + B = A'' \ln E + B. \qquad (2a)$$

Esta fórmula expresa la tendencia general a que aumente la energía al mismo tiempo que λ. Las curvas $\ln \lambda = f(E)$ tienen la forma que representa la fig. 382. La experiencia demuestra que la ecuación (2a) se cumple únicamente en primera aproximación.

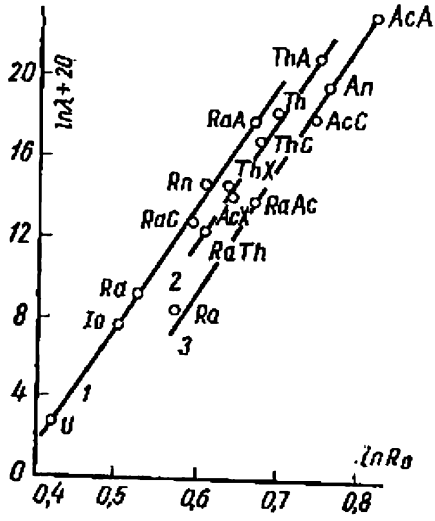

Fig. 382. Diagrama de Geiger—Nuttall.
Serie del uranio (1), del torio (2) y del actinio (3).

Los experimentos sobre la difusión de las partículas α (§ 339) muestran que entre la partícula α y el núcleo de un átomo cualquiera actúan las fuerzas de repulsión de Coulomb hasta distancias de 10^{-12}—10^{-13} cm. Cuando la difusión está producida por núcleos ligeros a la distancia de 10^{-12} cm se observan discrepancias con la ley de Coulomb: la fuerza de repulsión es menor que debería ser si se cumpliera dicha ley. Ocurre algo así como si junto a la fuerza de repulsión coulombiana actuara una fuerza de atracción suplementaria. No obstante, salvo raras excepciones (§ 374) los choques de las partículas α con los núcleos atómicos son elásticos. Esto indica que en torno al núcleo existe una barrera de potencial cuya altura máxima es mayor que la energía cinética inicial de las partículas α que a él llegan. Pero al mismo tiempo el proceso de desintegración α

pone de manifiesto que en los núcleos de los elementos pesados existen partículas α. Por consiguiente, dentro del núcleo debe haber un pozo de potencial. El campo potencial total del núcleo puede representarse con una curva del tipo de la que se muestra en la fig. 383. Las partes exteriores de esta curva son hipérbolas, lo que corresponde al carácter coulombiano del campo fuera del núcleo.

El análisis de los datos experimentales demuestra que las velocidades de las partículas α emitidas al desintegrarse el núcleo no concuerdan con los postulados de la Mecánica clásica. En calidad de ejemplo veamos lo que ocurre con la desintegración α del uranio. Los experimentos demuestran que las rapidísimas partículas α que

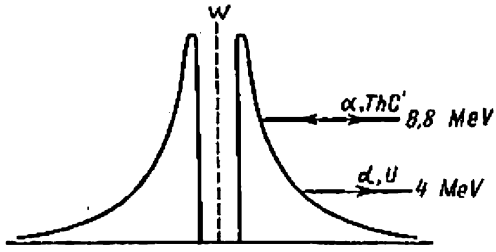

Fig. 383. Barrera de potencial del uranio.

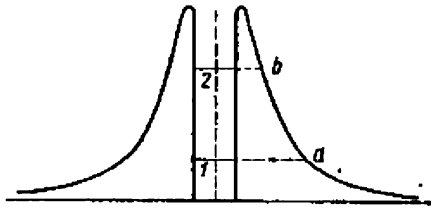

Fig. 384. Niveles de las partículas α en el núcleo.

emite el ThC' con energías de 8,8 MeV son difundidas por el núcleo del uranio de acuerdo con la ley de Coulomb. Por consiguiente, el máximo de la barrera potencial del núcleo del uranio es superior a 8,8 MeV (fig. 383). De esto se deduce, desde el punto de vista clásico, que las partículas α que *emite* el núcleo del uranio deberán tener una energía mayor de 8,8 MeV, puesto que para poder salir del núcleo tienen que vencer la barrera de potencial. Pero en realidad la energía de estas partículas α es igual a 4 MeV solamente. Este hecho, totalmente incomprensible desde el punto de vista clásico, se explica por la Mecánica cuántica. Como vimos en el § 364, en la Mecánica cuántica se demuestra que existe cierta probabilidad de que las partículas elementales se infiltren a través de una barrera de potencial. De esta forma, *el proceso de emisión de las partículas α por los núcleos de los elementos radiactivos tiene un carácter específicamente mecanocuántico.*

De la Mecánica cuántica se deduce que la probabilidad de que una partícula se infiltre a través de una barrera de potencial es tanto mayor cuanto menor es la anchura de la barrera. En la fig. 384 puede verse que la anchura *d* de la barrera es mayor en sus partes inferiores y menor en las superiores. Por esto, si la partícula α se encuentra en el nivel profundo *1* de un núcleo radiactivo cualquiera la probabilidad de que pueda infiltrarse a través de la barrera será pequeña;

esto quiere decir que este núcleo tiene un gran período de semidesintegración. Pero si a pesar de todo la partícula se «infiltra» a través de la barrera, se encontrará en un punto *a* bajo de la curva de potencial y la velocidad que adquiera a costa de las fuerzas de repulsión del núcleo será pequeña. Por el contrario, si la partícula se encuentra en un nivel elevado *2*, la probabilidad de que se infiltre será grande y, al mismo tiempo, será grande también la velocidad que adquiera cuando se halle fuera del núcleo. El núcleo en que la partícula α se encuentra en un nivel tan elevado tendrá un período de semidesintegración pequeño y emitirá partículas α rápidas. De esta forma la teoría cuántica conduce directamente a las correlaciones que se deducen de la regla de Geiger — Nuttall. Para definir estrictamente el proceso de la desintegración α hay que conocer exactamente la forma de la curva potencial del núcleo.

§ 372. **Espectros de rayos γ y de conversión interna.** La desintegración de muchos elementos radiactivos (tanto la desintegración α como la β) va acompañada de la emisión de rayos γ. Al ocurrir esto, los rayos γ pueden producir un efecto fotoeléctrico sobre la capa electrónica del mismo átomo que se desintegra. Este proceso se llama *conversión interna*, y los electrones expulsados por los rayos γ se llaman *electrones de conversión*. La probabilidad de que ocurra el proceso de conversión interna es grande y puede alcanzar un 100%; en este último caso los rayos γ primarios no se aprecian, siendo los electrones de conversión los únicos que se observan. La energía eV de los electrones de conversión está relacionada con la energía $h\nu$ del fotón γ por la misma correlación que el efecto fotoeléctrico ordinario:

$$eV = h\nu - A, \qquad (1)$$

donde A es el trabajo necesario para arrancar un electrón de la capa dada.

Como la energía de los fotones γ es grande, según la correlación (1) también serán grandes las velocidades de los electrones de conversión. Estas velocidades son del mismo orden que las de las partículas β, es decir, que las de los electrones emitidos directamente por el núcleo. A esto se debe que durante mucho tiempo los investigadores confundiesen los electrones de conversión con las partículas β, cosa que dificultaba el estudio de los fenómenos de la radiactividad natural.

La comprobación de que unos electrones son realmente electrones de conversión se efectúa basándose en la igualdad (1). El trabajo de arranque de un electrón de la capa del átomo es numéricamente igual a la energía que tienen los electrones en las correspondientes órbitas. En los átomos pesados los electrones internos se encuentran en las capas completas K, L, M, N, cuyas energías conocemos por los

datos radioscópicos. Por lo tanto, si el núcleo emite una radiación γ monocromática de frecuencia ν deberán aparecer electrones de conversión de las energías siguientes:

$$eV_1 = h\nu - W_k, \quad eV_2 = h\nu - W_{L_I}, \quad eV_3 = h\nu - W_{L_{II}}, \text{ etc.} \quad (2)$$

donde W_K, W_{L_I}, $W_{L_{II}}$, son las energías de los niveles de rayos X del átomo que aparece como resultado de la radiación γ.

En la primera columna de la tabla XXVI se da la energía en kiloelectrón-voltios de los electrones de conversión observados durante la desintegración RaB → RaC; en la segunda columna figuran las energías W de los niveles de los electrones correspondientes a las capas del átomo que tiene $Z = 83$, y en la cuarta, la energía de los electrones de conversión $h\nu - W$, donde $h\nu$ se ha tomado igual a 52,91 keV. Como puede verse, los valores recogidos en la primera y cuarta columna coinciden dentro de los límites de los errores de observación. De aquí se deduce que la correlación (2) se cumple. La magnitud 52,91 keV es la energía $h\nu$ del fotón γ primario.

El examen del material recopilado en la tabla XXVI permite también resolver la cuestión de cuál de los dos átomos, el precursor o el descendiente, es el que emite los rayos γ. El proceso radiactivo

Tabla XXVI

Energía de los electrones de conversión de las diferentes capas del elemento de $Z = 83$

Energía observada de los electrones de conversión, en keV	Energía W de los niveles del átomo de $Z = 83$	Nivel	Energía calculada de los electrones de conversión $h\nu - W$
36,74	16,34	L_I	36,57
37,37	15,67	L_{II}	37,24
39,63	13,38	L_{III}	39,53
48,85	3,99	M_I	48,92
49,10	3,68	M_{II}	49,23
47,66	3,17	M_{III}	49,74
51,90	0,93	N_I	51,98

RaB → RaC es una desintegración β durante la cual el elemento cuyo número de carga es $Z = 82$ se transforma en el elemento de número de carga $Z = 83$. Como quiera que la correlación (2) se cumple cuando se parte de los niveles energéticos de las capas del elemento de $Z = 83$, quiere decir que el rayo γ es emitido por el núcleo del elemento descendiente RaC. El análisis posterior de los datos experi-

mentales demuestra que en todos los casos conocidos de desintegración α y β *los rayos* γ *son emitidos por el núcleo resultante de la desintegración.*

Los núcleos pueden emitir no una, sino varias rayas γ de distintas frecuencias ν_i. A cada una de estas rayas le corresponderá, de acuerdo con la igualdad (2), su grupo de electrones de conversión. Las frecuencias de las rayas γ se determinan generalmente por las velocidades de los electrones de conversión, basándose en la igualdad (2). En la fig. 385 se muestra esquemáticamente el espectrógrafo magnético de A. I. Alijánov, que sirve para medir

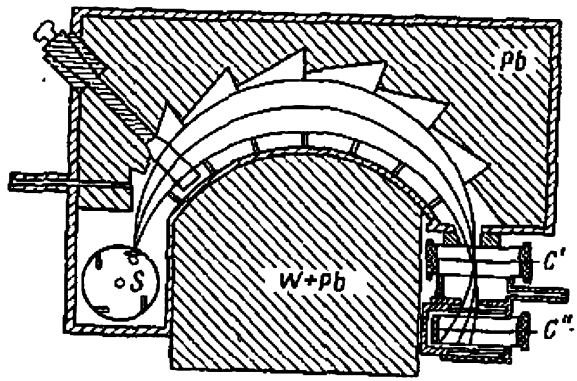

Fig. 385. Espectrógrafo magnético de A. I. Alijánov.

las velocidades de los electrones de conversión. En este espectrógrafo se utiliza el método de enfoque con campo magnético transversal (t. II, § 217). Los electrones que emite la preparación radiactiva S, sometidos a la acción de un campo magnético perpendicular al plano del dibujo, describen arcos de circunferencia de radio R determinado y van a parar a los dos contadores C' y C'' que funcionan según un esquema de coincidencia. Las sólidas paredes del aparato protegen a los contadores contra posibles incidencias de partículas cuyas trayectorias sean distintas de los arcos de circunferencia indicados. El montaje de los contadores según el esquema de coincidencia contribuye a este mismo fin. Cuando el campo magnético tiene una intensidad determinada H a los contadores van a parar únicamente electrones de velocidad v determinada. Variando la intensidad del campo se pueden registrar sucesivamente los electrones que tienen otras velocidades.

D. V. Skobeltsín aplicó el efecto Compton para determinar las longitudes de onda de los rayos γ por las velocidades de los electrones de retroceso.

Las velocidades de los electrones de retroceso se hallaron por el torcimiento de las huellas dejadas por ellos al pasar por una cáma-

ra de Wilson situada en un campo magnético. En una serie de casos las longitudes de onda de los rayos γ han sido medidas por medio de la difracción en cristales, de la misma forma que se miden las longitudes de onda de los rayos X. Las longitudes de onda de los rayos γ se encuentran aproximadamente entre los límites de 0,2 ~ ~ 0,01 Å. Las rayas del espectro de rayos γ se distinguen por un alto grado de monocromaticidad.

Todo núcleo que emite rayos γ emite también un espectro de rayos X, puesto que debido al proceso de conversión pierde uno de sus electrones internos y en sus capas resulta posible la transición de los electrones al puesto que queda vacío.

La emisión de rayos γ demuestra que los núcleos pueden hallarse en estado excitado. Sin entrar en detalles de la estructura del núcleo

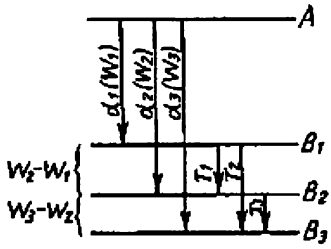

Fig. 386. Niveles energéticos del núcleo precursor y del núcleo descendiente.

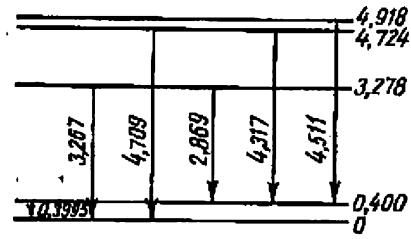

Fig. 387. Esquema de los niveles energéticos del núcleo de ThC″.

podemos afirmar que la emisión de rayos γ está determinada por correlaciones energéticas semejantes a las que tienen lugar en la capa electrónica del átomo cuando se produce una emisión de luz visible o de rayos X. Si W y W' son las energías del núcleo en dos estados distintos, el rayo γ emitido al producirse la transición entre estos estados tendrá una frecuencia

$$\nu = \frac{W'}{h} - \frac{W}{h}. \qquad (3)$$

El hecho de que el núcleo que se forma tenga distintos niveles energéticos está de acuerdo con la existencia de varios grupos de partículas α con distintas velocidades. Supongamos que el núcleo precursor se halla en un estado energético A determinado (fig. 386) y emite partículas α de tres grupos de velocidades α_1, α_2 y α_3 cuyas energías respectivas son W_1, W_2 y W_3. Entonces el núcleo que se forma se encontrará en uno de los tres estados energéticos B_1, B_2 y B_3, entre los que habrá una diferencia de energías igual a $W_2 - W_1$ y $W_3 - W_2$. Las transiciones entre estos niveles dan lugar a la emisión de rayos γ. Como la frecuencia de los rayos γ viene determi-

nada por la correlación (3), obtenemos que la frecuencia de los rayos γ del nuevo elemento se puede calcular partiendo de la diferencia de las energías que tienen las partículas α del elemento precursor. Esta conclusión se ve confirmada por los datos empíricos existentes. Puede servir de ejemplo la desintegración α ThC → ThC″. El núcleo ThC emite partículas α de cinco velocidades distintas. Por la diferencia entre las energías de estas partículas se puede construir el esquema de los niveles energéticos del núcleo ThC″ que se muestra en la fig. 387. Formalmente entre estos niveles pueden existir 10 transiciones. Pero en realidad solamente se observan rayos γ de las seis frecuencias diferentes que corresponden a las transiciones que en la fig. 387 se marcan con flechas. Las demás transiciones evidentemente deben considerarse «prohibidas».

En la tabla XXVII se recogen los valores de las energías correspondientes a las seis rayas γ antedichas calculados por el esquema de la fig. 387 y los valores observados.

Los valores de $h\nu$ calculados coinciden con los observados, dentro de los límites del error de observación. El tiempo que permanece el núcleo en el estado excitado es muy pequeño. En aquellos casos en que el núcleo descendiente carece de estados excitados la desintegración no va acompañada de emisión de rayos γ.

La existencia de los estados exitados de los núcleos se confirma por el hecho de que existan partículas α de gran recorrido. Al núcleo

Tabla XXVII

Energía de las rayas γ del ThC″

$h\nu$ calculada eV×10⁻⁵	$h\nu$ observada eV×10⁻⁵
4,518	4,511
4,324	4,317
4,724	4,709
2,878	2,869
3,278	3,267
0,400	0,399

en estado excitado le corresponde un nivel energético elevado, por esta razón la partícula α que se «infiltra» a través de la barrera de potencial desde este nivel (compárese con la fig. 384) tendrá una gran velocidad y, por consiguiente, un gran alcance. El poco tiempo que el núcleo permanece en estado excitado es la causa de que el número de partículas α de gran alcance sea pequeño.

§ 373. Desintegración beta. El estudio de los rayos β es uno de los problemas más difíciles de la radiactividad. Los electrones

secundarios que aparecen como resultado de la conversión de los rayos γ y se superponen a los electrones primarios (partículas β) emitidas por el núcleo. Solamente después de que se consiguió esclarecer el origen de los electrones de conversión fue posible obtener datos seguros sobre las propias partículas β. Las mediciones llevadas a cabo con diversas sustancias radiactivas demostraron que *cada vez que se produce un acto individual de desintegración* β *el núcleo emite un electrón (partícula* β).

El estudio de la distribución de las partículas β por velocidades se realizó por el procedimiento de la desviación en presencia de un campo magnético. Resultó que esta distribución se caracteriza por tener un espectro continuo: *las partículas* β *emitidas pueden*

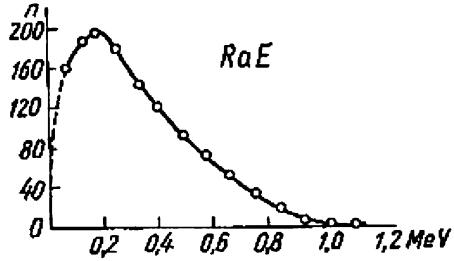

Fig. 388. Curva de la distribución de las partículas β por energías.

tener todas las energías posibles, desde cierto límite superior determinado hasta cero. En la fig. 388 se reproduce la curva de distribución de las partículas β por energías para el RaE. En todos los casos la distribución viene dada por curvas suaves que tienen un máximo y un límite bien definido por la parte de las grandes energías.

La explicación del espectro continuo de las partículas β presentaba dificultades considerables. La radiación α demostró que los núcleos pueden hallarse en un número pequeño de estados energéticos discretos. Y como en las series radiactivas las desintegraciones α y β alternan, al producirse la desintegración β deberían liberarse determinadas energías W_1, W_2, . . . De aquí se deduce que las partículas β deberían formar, lo mismo que las α, un grupo o un número pequeño de grupos con velocidades determinadas. La hipótesis más simple que elimina esta dificultad es la que supone que inicialmente todas las partículas β son expulsadas del núcleo con una misma energía, igual a la energía máxima; la pérdida parcial de la energía está relacionada con los procesos que tienen lugar fuera del núcleo y que tienen carácter secundario. Pero esta hipótesis se contradice con los experimentos calorimétricos directos. Uno de estos experimentos consistió en colocar una preparación de un elemento radiactivo β en un calorímetro con gruesas paredes de cobre

y medir la energía liberada a intervalos de tiempo determinados. Como las paredes eran impracticables para los rayos β, el calorímetro debería medir la energía *total* liberada por la desintegración β. Si la hipótesis de que las velocidades iniciales de las partículas β son iguales fuera cierta, la energía medida por el calorímetro debería ser la correspondiente a la energía máxima de las partículas β. Pero la realidad es que *esta energía coincidió con la energía media del espectro continuo.*

La explicación del espectro continuo de las partículas β se hace más difícil por el hecho de que *el balance total de las energías que se liberan durante las transformaciones radiactivas sucesivas viene determinado por el valor máximo de las energías de las partículas* β. Esto se puede demostrar examinando uno de los casos de ramificación de las series radiactivas. Tomemos, por ejemplo, la ramificación que empieza en el elemento ThC.

Como puede verse en la fig. 378, son posibles las dos series de transformaciones siguientes:

$$1)\ \mathrm{ThC} \xrightarrow{\beta} \mathrm{ThC'} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Pb};$$

$$2)\ \mathrm{ThC} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{ThC''} \xrightarrow{\beta} \mathrm{Pb}.$$

En ambos casos resulta un mismo isótopo estable del plomo.

La primera serie se caracteriza por liberar las energías siguientes (en eV):

$\mathrm{ThC} \xrightarrow{\beta} \mathrm{ThC'}$; la energía máxima de las partículas β:	$22{,}5 \cdot 10^5$
$\mathrm{ThC'} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Pb}$; la energía de la partícula α	$89{,}5 \cdot 10^5$
Total	$112{,}0 \cdot 10^5$

La segunda serie se caracteriza por las siguientes energías (en eV):

$\mathrm{ThC} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{ThC''}$; la energía de la partícula α	$62{,}0 \cdot 10^5$
$\mathrm{ThC''} \xrightarrow{\beta} \mathrm{Pb}_{(\mathrm{excit.})}$; la energía máxima de las partículas β	$17{,}9 \cdot 10^5$
radiación γ; la energía del fotón γ	$32{,}0 \cdot 10^5$
Total	$111{,}9 \cdot 10^5$

Como vemos, en ambas series se libera la misma energía (si se tiene en cuenta la energía *máxima* de las partículas β). Confrontando los hechos citados obtenemos: a) las partículas β tienen individualmente energías distintas; la energía que mide el calorímetro es la que corresponde a la energía media de las partículas β; b) para obtener un balance correcto de las energías que se liberan en las distintas series de transformaciones hay que tener en cuenta que la energía que se libera *en cada* desintegración β es igual a la energía máxima de las partículas β.

Algunos físicos burgueses basándose en la confrontación de estos hechos intentaron sacar la conclusión falsa, en contradicción con toda la tendencia materialista del desarrollo de la Física, de que

en los actos individuales de las transformaciones nucleares no se cumple la ley de la conservación de la energía.

Pero la salida de esta difícil situación fue señalada por la hipótesis según la cual en cada desintegración β el núcleo expulsa, además del electrón (partícula β), otra partícula sin carga y de masa muy pequeña. Esta partícula recibió el nombre de *neutrino*. Gracias a la carencia de carga y a su poca masa, el neutrino tiene un gran poder de penetración. Esto explica los resultados de las mediciones calorimétricas: las paredes del calorímetro no pueden detener a los neutrinos y por esto el calorímetro lo único que mide es la energía de las partículas β, que es menor que la energía total de la transformación. La energía total que se libera durante la desintegración β del núcleo se distribuye entre dos partículas: un electrón (partícula β) y un neutrino. Cuanto mayor es la energía del electrón, menor es la del neutrino y viceversa.

Designando el neutrino con el símbolo ${}_0\nu^0$ podemos escribir el esquema de la desintegración β de la forma siguiente:

$$ {}_Z X^M \rightarrow {}_{Z+1}Y^M + {}_{-1}e^0 + {}_0\nu^0. $$

La observación directa del neutrino es extraordinariamente difícil, ya que su sección eficaz es muy pequeña y puede penetrar a través de grandes espesores de sustancias sin sufrir choques. Los primeros intentos de descubrir el neutrino tuvieron por objeto hallar el retroceso que experimenta el núcleo al producirse la desintegración β. A. I. Alijánov y A. I. Alijanián propusieron para esto aplicar el llamado proceso de captura de un electrón K, inverso a la desintegración β. La captura de un electrón K consiste en que uno de los electrones de la capa K del átomo es capturado por el núcleo, el cual se transforma en otro núcleo cuyo número Z es una unidad menor que núcleo precursor. La única partícula expulsada en esta transformación es un neutrino. El esquema de la captura de un electrón K se escribe de la forma siguiente:

$$ {}_Z X^M + {}_{-1}e^0 \rightarrow {}_{Z-1}Y^M + {}_0\nu^0. $$

Como el neutrino emitido tiene cierta cantidad de movimiento, de acuerdo con la ley de la conservación de la cantidad de movimiento el núcleo debe experimentar un retroceso. Este fenómeno fue descubierto por J. S. Allen en la reacción nuclear

$$ {}_4Be^7 + {}_{-1}e^0 \rightarrow {}_3Li^7 + {}_0\nu^0. $$

Los experimentos demostraron que el núcleo de ${}_3Li^7$ sufre en realidad un retroceso. La masa en reposo del neutrino es menor que 1/1 000 de la masa en reposo del electrón.

C. L. Cowan y F. Reines en 1956 emplearon otro esquema para este experimento. Observaron el proceso de unión de un neutrino

${}_0\nu^0$ con un protón ${}_1p^1$, como resultado de lo cual aparece un neutrón ${}_0n^1$ y un positrón ${}_{+1}e^0$ (véanse los §§ 375 y 376):

$${}_1p^1 + {}_0\nu^0 \rightarrow {}_0n^1 + {}_{+1}e^0.$$

Esta reacción se produce muy raras veces. Pero para la observación se utilizó el flujo de neutrinos emitido por un reactor atómico (§ 381) en el cual se desarrollaba un proceso intenso de desintegración β. El choque de los neutrinos con los protones tenía lugar en un gran volumen de agua (200 l). El positrón emitido durante la reacción se une rápidamente con uno de los electrones de la molécula de agua. Como resultado de esto se produce la transformación de la pareja electrón-positrón en dos fotones, cada uno con una energía de 0,51 MeV (véase el § 376). Para poder descubrir el neutrón se disuelve en el agua cierta cantidad de una sal de cadmio. Los núcleos de cadmio capturan los neutrones y emiten rayos γ duros. En las condiciones del experimento la captura de un neutrón se producía aproximadamente 5 μ s después de la aparición del neutrón. De esta forma cada acto de unificación de un neutrino con un protón debe ir acompañado primero de la emisión de dos fotones (cada uno con una energía de 0,51 MeV) y, después de transcurrir cierto tiempo, de la emisión de un fotón γ duro. Para registrar todas estas radiaciones se emplearon detectores líquidos de centelleo y 150 fotomultiplicadores. Las observaciones demostraron que las radiaciones esperadas se producen efectivamente y que se suceden en el orden vaticinado. Esto confirmó la existencia de la reacción producida por el neutrino y, por lo tanto, la existencia del propio neutrino.

§ 374. Desintegración nuclear por choque con partículas α. La gran resistencia de los núcleos de los elementos no radiactivos hace pensar que su desintegración artificial se puede conseguir únicamente ejerciendo sobre ellos una acción exterior extraordinariamente enérgica. Esta acción exterior puede producirse al chocar con una partícula α. Los elementos radiactivos naturales pueden servir de fuente de la gran energía que se necesita para la desintegración de los núcleos estables. Y efectivamente, la primera desintegración artificial de los núcleos fue realizada en el año 1919 por Rutherford empleando para el bombardeo partículas α. El esquema del aparato de Rutherford se muestra en la fig. 389. Dentro de una cámara *C* se colocaba sobre un carro una preparación *A* de sustancia radiactiva natural. El carro permitía desplazar la preparación dentro de la cámara. Esta última se podía llenar de gases distintos. El aparato tenía una pantalla *F* de hoja de aluminio cuyo espesor se elegía de forma que pudiera absorber las partículas α emitidas por la preparación *A*. Detrás de la pantalla *F* se ponía otra pantalla fluorescente *S* que se podía observar con el microscopio *M*. Cuando la cámara se llenaba de nitrógeno en la pantalla *S* se observaba

centelleo, a pesar de que las partículas α no podían llegar a ella a través de la hoja de aluminio. Si la cámara se llenaba de oxígeno o de CO_2 no se producía centelleo en la pantalla. Rutherford supuso

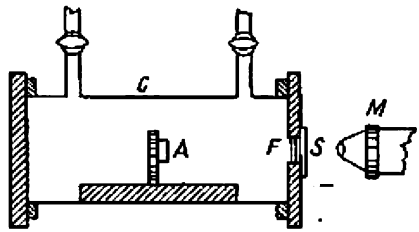

Fig. 389. Esquema del aparato de Rutherford para la desintegración de los núcleos del nitrógeno con partículas α.

que el centelleo que se observaba era producido por partículas de gran poder de penetración que aparecían en el nitrógeno por efecto del bombardeo con las partículas α.

Se realizaron experimentos para comprobar la desviación que sufrían estas partículas en presencia de un campo magnético y resultó que dichas partículas eran protones, que en el aire tienen un alcance de hasta 40 cm.

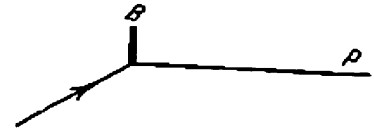

Fig. 390. Formación de las huellas de los caminos seguidos por las partículas α en forma de bifurcación.

El proceso de la aparición de los protones fue explicado por Rutherford de la forma siguiente: cuando se produce una colisión «frontal» de una partícula α rápida con un núcleo de nitrógeno, la partícula α penetra en dicho núcleo y se forma un núcleo inestable cuyo número de carga es 9 y el de masa 18 (isótopo inestable del fluor). Este núcleo se desintegra seguidamente en un protón y un isótopo del oxígeno cuyo número de masa es 17. La reacción nuclear en conjunto puede escribirse de la forma siguiente:

$$_7N^{14} + {}_2He^4 \rightarrow ({}_9F^{18}) \rightarrow {}_8O^{17} + {}_1H^1.$$

La transformación del núcleo de nitrógeno por la acción del choque con la partícula α fue confirmada por las fotografías obtenidas en la cámara de Wilson. Entre un gran número de fotografías de huellas de trayectorias de las partículas α se descubrieron casos individuales en que el camino recorrido por la partícula α terminaba en una bifurcación (fig. 390). En este caso se producen dos huellas nuevas: una larga y fina p, perteneciente al protón, y otra corta y gruesa B, perteneciente al núcleo de oxígeno $_8O^{17}$ que experimentaba el retroceso. Se descubrieron 8 casos de bifurcación en un número total de 500 000 fotografías de trayectorias de partículas α en

el nitrógeno. De aquí se deduce que el choque suficientemente intenso de una partícula α con un núcleo de nitrógeno, que da lugar a la penetración de aquélla en éste, ocurre muy raras veces, es decir, una vez por cada 50 000 aproximadamente.

Reacciones análogas se descubrieron después para una serie de elementos (B, F, Al, Si, S, K, etc.); todas ellas transcurren según el esquema

$$_zX^M + {}_2He^4 \rightarrow (_{z+2}C^{M+4}) \rightarrow {}_{z+1}Y^{M+3} + {}_1H^1 + \Delta W,$$

donde $(_{z+2}C^{M+4})$ representa al núcleo intermedio inestable y ΔW a la diferencia entre las energías internas de las partículas que existían antes de la reacción ($_zX^M$ y $_2He^4$) y de las partículas que aparecen después de la misma ($_{z+1}Y^{M+3}$ y $_1H^1$). El signo positivo de ΔW indica la liberación de energía durante la reacción; el negativo, la absorción de energía. Estas reacciones se llaman reacciones (α, p), donde la primera letra indica la partícula que bombardea (partícula α) y la segunda letra la partícula emitida (protón).

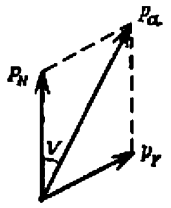

Fig. 391. Cumplimiento de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento al desintegrarse el núcleo.

La desintegración de los núcleos al ser bombardeados con partículas α se realiza cumpliendo las leyes de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento. Llamando W_α, W_H y W_Y respectivamente a las energías cinéticas de la partícula α, del protón y del nuevo núcleo $_{z+1}Y^{M+3}$, tendremos que de acuerdo con la ley de la conservación de la energía

$$W_\alpha + \Delta W = W_H + W_Y. \qquad (1)$$

De la misma forma, llamando $\mathbf{p}_\alpha$, $\mathbf{p}_H$ y $\mathbf{p}_Y$ respectivamente a los vectores cantidad de movimiento de la partícula α, del protón y del núcleo Y, según la ley de la conservación de la cantidad de movimiento tendremos:

$$\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{p}_H + \mathbf{p}_Y. \qquad (2)$$

Designando por θ el ángulo entre las direcciones de los movimientos de la partícula α y del protón emitido (fig. 391) y basándonos en (2) tendremos:

$$p_Y^2 = p_\alpha^2 - p_H^2 - 2p_\alpha p_H \cos\theta. \qquad (3)$$

Teniendo en cuenta que entre la energía cinética y la cantidad de movimiento tiene lugar la correlación $W = \frac{p^2}{2M}$, donde M es la masa de la partícula, podemos escribir la igualdad (1) de la forma:

$$\frac{p_\alpha^2}{2M_\alpha} + \Delta M = \frac{p_H^2}{2M_H} + \frac{p_Y^2}{2M_Y}. \qquad (4)$$

Eliminando de las igualdades (3) y (4) la magnitud p_Y^2, obtenemos:

$$\Delta W = W_\alpha \left(\frac{M_\alpha}{M_Y} - 1\right) + W_H \left(\frac{M_H}{M_Y} + 1\right) - \frac{p_\alpha p_H}{M_Y} \cos 0. \qquad (5)$$

La energía cinética y la cantidad de movimiento de la partícula α y del protón se hallan por medio de la longitud de sus recorridos; las razones de las masas M_α/M_Y y M_H/M_Y son magnitudes conocidas. El ángulo 0 se puede medir en las fotografías de las bifurcaciones. Para esto hay que hacer una fotografía estereoscópica de las trayectorias de las partículas con dos cámaras fotográficas, puesto que cada foto da solamente una proyección de la trayectoria sobre el plano de la placa fotográfica. De esta forma, la igualdad (5) da la posibilidad de hallar la energía de las transformaciones nucleares. Al realizarse la transformación del núcleo de nitrógeno que antes mencionamos se absorbe una energía de 1,26 MeV, por lo que el esquema completo de esta reacción se puede escribir de la forma:

$$_7N^{14} + {}_2He^4 \rightarrow (_9F^{18}) \rightarrow {}_8O^{17} + {}_1H^1 - 1{,}26 \text{ MeV}.$$

Existen reacciones nucleares que se realizan con desprendimiento de energía, por ejemplo:

$$_9F^{19} + {}_2He^4 \rightarrow (_{11}Na^{23}) \rightarrow {}_{10}Ne^{22} + {}_1H^1 + 1{,}58 \text{ MeV}.$$

La energía de la reacción nuclear se puede calcular también por otro procedimiento, basándose en los defectos de masa de los núcleos (§ 367). Antes de la reacción nuclear teníamos un núcleo $_zX^M$ de masa M_X y una partícula α de masa M_α; después de la reacción resultó un núcleo $_{z+1}Y^{M+2}$ de masa M_Y y un protón de masa M_p. El defecto total de masa es

$$\Delta m = (M_X + M_\alpha) - (M_Y + M_p).$$

Esta magnitud, de acuerdo con la correlación $\Delta W = \Delta m \cdot c^2$, puede servir de medida de la energía de la reacción. Para el caso de la desintegración del nitrógeno tenemos los siguientes valores de las masas:

Partículas precursoras	Partículas descendientes
$_2He^4$; $M_\alpha = 4{,}00386$	$_1H^1$; $M_H = 1{,}00813$
$_7N^{14}$; $M_N = 14{,}00753$	$_8O^{17}$; $M_O = 17{,}00450$
$M_N + M_\alpha = 18{,}01139$	$M_O + M_H = 18{,}01263$

El defecto de masa resulta en este caso igual a

$$\Delta m = 18{,}01139 - 18{,}01263 = -0{,}00124.$$

Por consiguiente la masa de las partículas descendientes excede a la masa de las precursoras en 0,00124 unidades de peso atómico. Este «aumento» de masa se debe a la absorción de una cantidad

de energía $\Delta W = \Delta m \cdot c^2$. Como según dijimos en el § 367 una unidad de peso atómico equivale a una energía de 931,8 MeV, obtenemos que

$$\Delta W = -0{,}00124 \cdot 931{,}8 \text{ Mev} = -1{,}16 \text{ MeV},$$

lo que dentro de los límites de los errores de observación coincide perfectamente con el valor de $\Delta W = -1{,}26$ MeV obtenido basándose en la igualdad (5). Las mismas coincidencias tienen lugar para otras reacciones nucleares. Estas coincidencias *comprueban directamente la correlación* $\Delta W = \Delta m \cdot c^2$, *que expresa la relación que existe entre la energía y la masa.* Al mismo tiempo *confirman también el hecho de que las leyes de la conservación de la energía y de la conservación de la cantidad de movimiento se cumplen también en los actos elementales de las transformaciones nucleares.*

Para terminar, examinemos otra reacción nuclear:

$$_{13}Al^{27} + {}_2He^4 \rightarrow (_{15}P^{31}) \rightarrow {}_{14}Si^{30} + {}_1H^1.$$

Resulta que en esta reacción se producen protones de diferentes velocidades. En la fig. 392 se representa el número de protones que

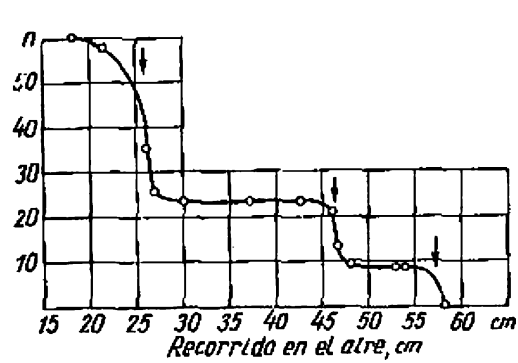

Fig. 392. Alcance de los protones que aparecen al desintegrarse el núcleo del aluminio.

recorrieron un espacio dado R o mayor. Como puede verse existen tres grupos de protones, uno de los cuales tiene un alcance de 28 cm y los otros dos los tienen respectivamente de 47 cm y 58 cm. Estos grupos de protones se obtienen cuando las partículas α que bombardean tienen una velocidad determinada. Cuando estas partículas α tienen otras velocidades el mismo aluminio produce otros grupos de protones. El alcance máximo de los protones de aluminio es de 66 cm. La existencia de estos grupos de protones con velocidades determinadas y, por consiguiente, con energías determinadas, indica que el núcleo que se forma (en este caso el $_{14}Si^{30}$) tiene dife-

rentes niveles de energía. El núcleo recién formado estará en estado normal cuando el protón emitido tiene la energía máxima; cuando los protones emitidos son más lentos el núcleo se encuentra en estado excitado. Durante la transición del núcleo de un estado excitado al estado normal tiene lugar la emisión de rayos γ.

La probabilidad de que una partícula α penetre en el núcleo con que choca depende de la velocidad de dicha partícula. Si la energía de la partícula α coincide con la de uno de los niveles de energía del núcleo bombardeado la probabilidad de penetración de ésta en el núcleo aumenta considerablemente: en este caso tenemos la *desintegración por resonancia*. En el aluminio la desintegración por resonancia se produce cuando la energía de las partículas α es igual a 4,0; 4,49; 4,86 y 5,25 MeV. Como seleccionar la energía de las partículas α es difícil, la desintegración por resonancia se observa bombardeando con partículas α un blanco sólido de espesor suficiente. Debido al enfrenamiento que sufren, las partículas α tendrán diferentes velocidades dentro de cada una de las capas del blanco y en alguna de ellas su velocidad resultará ser la necesaria para que se produzca la desintegración por resonancia. Al variar el espesor del blanco varía periódicamente la cantidad de protones emitidos.

§ 375. Neutrones. La transformación artificial de los núcleos producida por el bombardeo con partículas α condujo al descubrimiento de una nueva partícula elemental, el neutrón. El neutrón es una partícula neutra cuya masa es aproximadamente igual a la del protón. La historia del descubrimiento del neutrón es la siguiente: en el año 1930 Bothe descubrió que al bombardear el berilio ($_4Be^9$) con partículas α se produce una radiación de gran poder de penetración. Se supuso que esta radiación estaba formada por rayos γ duros, que aparecían porque al unirse la partícula α con el núcleo del $_4Be^9$ resultaba un isótopo muy excitado del carbono $_6C^{13}$, el cual al pasar a su estado normal emite un fotón $h\nu$ de gran energía. De esta forma se supuso que este fenómeno transcurre según el esquema siguiente:

$$_4Be^9 + {}_2He^4 \rightarrow (_6C^{13}) \rightarrow {}_6C^{13} + h\nu. \qquad (1)$$

donde $(_6C^{13})$ simboliza al núcleo excitado del isótopo del carbono $_6C^{13}$. Se midió la absorción de los rayos antedichos por el plomo y esto dio por resultado que cada fotón debería tener una energía de cerca de 7 MeV. En 1932 Irene Curie y F. Joliot Curie descubrieron que el efecto ionizante de los rayos del berilio aumenta mucho si se les hace pasar a través de una lámina de parafina. El esquema de este experimento se muestra en la fig. 393, donde A es un disco metálico sobre el que se extiende una preparación radiactiva que sirve de manantial de partículas α; B es la lámina de berilio; J una

cámara de ionización con una ventana cerrada por una hoja metálica delgada *a*. La radiación del berilio, debido a a su gran poder de penetración, produce en el gas de la cámara *J* una ionización muy débil. Si delante de la cámara se sitúa una capa de parafina *C*, la ionización que se produce en la cámara aumenta considerablemente. Este efecto fue explicado suponiendo que la radiación del berilio arranca protones de la parafina, los cuales producen una fuerte acción ionizante.

La parafina dura (miembros superiores de los hidrocarburos saturados de la serie grasa C_nH_{2n+2}) contiene un gran número de átomos de hidrógeno por unidad de volumen, por esto el arrancar de ella protones es más probable que de cualquier otra sustancia.

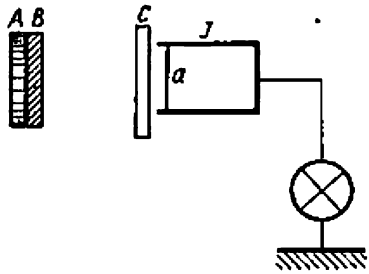

Fig. 393. Esquema del experimento de I. Curie y F. Joliot-Curie.

El protón arrancado de la parafina por la radiación del berilio tiene un alcance en el aire de cerca de 40 cm, lo que corresponde a una energía de cerca de 5 MeV. Suponiendo que el protón se acelera a costa del choque elástico con el fotón γ, a este último hay que atribuirle una energía de cerca de 55 MeV, que es mucho mayor que el valor obtenido por la absorción. Este valor de 55 MeV tampoco concuerda con el que resulta del cálculo basado en la determinación del defecto de masas. Conociendo los pesos atómicos del $_4Be^9$, $_2He^4$ y $_6C^{13}$ y la energía de las partículas α con que se bombardean, se puede hallar que el defecto de masas correspondiente al proceso que transcurre según el esquema (1) es igual a 0,01665 unidades de peso atómico, lo que equivale a una energía de 15,5 MeV. De esta forma la energía de los fotones γ no puede ser mayor de 15,5 MeV.

Posteriormente se demostró que la radiación del berilio era capaz de acelerar otros núcleos, con la particularidad de que si se considera que esta radiación es de fotones γ a éstos hay que atribuirles una energía que depende de la naturaleza de los núcleos de retroceso. Así, en el caso de e surjan núcleos de retroceso de nitrógeno, a los fotones hay que atribuirles una energía de 90 MeV. J. Chadwick demostró que todas estas dificultades quedaban eliminadas suponiendo que la radia ión emitida por el berilio bombardeado por partículas α está constituida por partículas neutras de masa aproximadamente igual a la del protón. Como ya dijimos, estas partículas recibieron el nombre de neutrones. Nosotros designaremos al neutrón con el símbolo $_0n^1$, puesto que el número de carga del neutrón $Z = 0$ y su número de masa $M = 1$. En estas condiciones, el proceso de formación de los neutrones al bombardear el berilio

con partículas α se escribe de la forma:

$$_4Be^9 + {}_2He^4 \rightarrow (_6C^{13}) \rightarrow {}_6C^{12} + {}_0n^1. \qquad (2)$$

Los neutrones, como no tienen carga eléctrica, interaccionan débilmente con los átomos y las moléculas junto a los cuales pasan, hecho que explica su escasa potencia para ionizar los gases y su gran poder de penetración. Las colisiones de los neutrones con los núcleos de los átomos se realizan como choques entre esferas elásticas, en los que se cumplen las leyes de la conservación de la energía y de la conservación de la cantidad de movimiento. De aquí resulta que si v es la velocidad inicial del neutrón, la velocidad v' del núcleo de retroceso (cuando el choque sea central) será:

$$v' = \frac{2M_n}{M_n + M} v, \qquad (3)$$

donde M_n es la masa del neutrón y M la del núcleo de retroceso.

Entre las velocidades v'_1 y v'_2 de dos núcleos de retroceso diferentes, cuyas masas respectivas sean M_1 y M_2, siempre que la velocidad de los neutrones sea la misma existirá, según (3), la correlación siguiente:

$$\frac{v'_1}{v'_2} = \frac{M_n + M_2}{M_n + M_1}.$$

Esta correlación permite hallar la masa del neutrón M_n. El hecho de que diferentes parejas de núcleos conduzcan al mismo valor de la masa del neutrón M_n sirve de confirmación a la hipótesis de Chadwick de que la radiación del berilio no está constituida por fotones, sino por partículas más «pesadas». Según los datos modernos la masa del neutrón $M_n = 1{,}00893$, es decir, un poco mayor que la del protón $M_p = 1{,}00813$.

La reacción (2) no es la única que hace que los núcleos emitan neutrones. Son muchos los casos conocidos en que el bombardeo con partículas α origina neutrones. Estas reacciones [reacciones (α, n)] pueden representarse mediante el esquema:

$$_ZX^M + {}_2He^4 \rightarrow (_{Z+2}C^{M+4}) \rightarrow {}_{Z+2}Y^{M+3} + {}_0n^1 + \Delta W.$$

Como ejemplo citaremos las reacciones siguientes:

$$_3Li^7 + {}_2He^4 \rightarrow (_5B^{11}) \rightarrow {}_5B^{10} + {}_0n^1,$$
$$_5B^{11} + {}_2He^4 \rightarrow (_7N^{15}) \rightarrow {}_7N^{14} + {}_0n^1.$$

En muchos casos el núcleo resultante después de la emisión del neutrón se encuentra en estado excitado. En estos casos se produce la emisión de rayos γ. Los neutrones que aparecen como resultado de la reacción (α, n) tienen energías muy grandes; en toda una serie de casos presentan espectros energéticos discretos. Por

ejemplo, los neutrones del berilio poseen las energías 13,7; 12,0; 7,6; 6,2 y 4,6 MeV.

Actualmente ha quedado establecido que el neutrón libre no es estable, sino que se desintegra en un protón, un electrón y un neutrino. La vida del neutrón dura cerca de 30 min.

Como el neutrón no tiene carga eléctrica no experimenta repulsión por parte del núcleo cargado positivamente y puede fácilmente acercarse y penetrar en él. En este caso el neutrón produce una transformación nuclear. Anteriormente indicamos que las transformaciones nucleares no sólo se producen por la acción de los neutrones rápidos, sino también por la de los lentos, cuyas velocidades son iguales a las velocidades térmicas de los átomos. Los neutrones se pueden moderar haciéndolos pasar a través de cualquier sustancia que contenga hidrógeno (parafina, agua). Entonces, en cada choque elástico con un protón, el neutrón cede una parte considerable de su energía hasta que ésta no se iguala con la del movimiento térmico de los átomos.

Los neutrones de velocidades «térmicas» dan lugar a reacciones nucleares del tipo (n, α), es decir, reacciones en las que como resultado de la captura de un neutrón el núcleo inestable que se produce emite una partícula α; puede servir de ejemplo la reacción:

$$_5B^{10} + {}_0n^1 \rightarrow (_5B^{11}) \rightarrow {}_3Li^7 + {}_2He^4.$$

Como resultado se obtiene un isótopo estable del litio ($_3Li^7$) y helio. Esta reacción se utiliza para detectar los neutrones. En este caso las paredes de la cámara de ionización se recubren de una combinación química que contenga boro. La captura del neutrón por el boro provoca la emisión de partículas α, la cual se pone de manifiesto por su acción ionizante.

Los neutrones pueden producir, además de las reacciones (n, α), otras que dan por resultado la unión del neutrón con un núcleo formando un isótopo estable más pesado del núcleo precursor. Esta reacción va acompañada de la emisión de rayos γ y se designa con el símbolo (n, γ). Por ejemplo, por medio de la unión de un neutrón con el núcleo del isótopo estable ligero $_3Li^6$ se puede obtener su isótopo estable pesado $_3Li^7$.

Como segundo ejemplo de la reacción tipo (n, γ) citaremos la que da lugar a la formación del núcleo del isótopo pesado del hidrógeno (deuterón).

$$_1H^1 + {}_0n^1 \rightarrow {}_1D^2 + h\nu.$$

Esta reacción tiene especial interés porque muestra la posibilidad de considerar el deuterón como formado por dos partículas elementales, un protón y un neutrón. Este punto de vista se ve confirmado por el hecho de que existe el proceso inverso, de descomposición del deuterón por la acción de una radiación γ dura. Este

proceso se conoce con el nombre de *fotodesintegración del núcleo* y transcurre según el esquema siguiente:

$$_1D^2 + h\nu \rightarrow {}_1H^1 + {}_0n^1.$$

Hay reacciones en virtud de las cuales el núcleo precursor emite un deuterón, por ejemplo:

$$_7N^{14} + {}_0n^1 \rightarrow {}_6C^{13} + {}_1D^2.$$

En una serie de casos se observan reacciones inversas a aquellas en que se produce el neutrón. Por ejemplo, una reacción inversa a la (2) (en que se origina el neutrón bombardeando el berilio con partículas α) es la siguiente:

$$_6C^{12} + {}_0n^1 \rightarrow {}_4Be^8 + {}_2He^4.$$

Finalmente señalaremos que la probabilidad de que un neutrón sea capturado por un núcleo depende mucho de la velocidad de los neutrones; para un

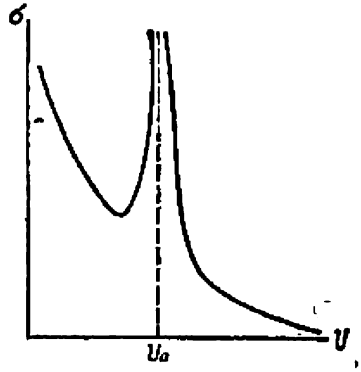

Fig. 394. Captura resonante de los neutrones.

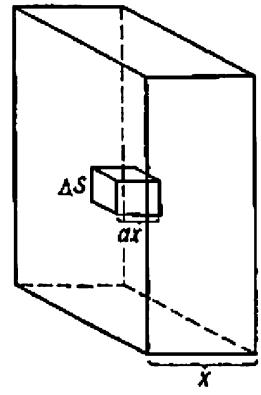

Fig. 395. Esquema para el cálculo de la sección eficaz de captura de los neutrones.

valor determinado de esta velocidad, la captura de los neutrones tiene carácter de resonancia (fig. 394).

Introduzcamos el concepto de *sección eficaz de captura del neutrón* σ. Supongamos que sobre la unidad de superficie de una capa plano-paralela de cualquier sustancia inciden perpendicularmente en la unidad de tiempo n_0 neutrones.

Llamemos N_0 al número de átomos que hay en la unidad de volumen de la sustancia en cuestión. Entonces, en el volumen de un paralelepípedo que tenga ΔS de sección transversal y dx de longitud (fig. 395) habrá un número de átomos

$$N = N_0\, dx\, \Delta S.$$

El número de neutrones por unidad de tiempo que, en el espesor de la capa dx, tienen choques con átomos en virtud de los cuales resultan capturados

puede considerarse igual a

$$-dn = \sigma n N = \sigma n N_0\, dx\, \Delta S,$$

donde n es el número de neutrones que inciden sobre la superficie ΔS en la unidad de tiempo; si ΔS es igual a la unidad de superficie, $n = n_0$ y la última igualdad toma la forma

$$-dn_0 = \sigma n_0 N_0\, dx \quad \text{o} \quad \frac{dn_0}{n_0} = -\sigma N_0\, dx.$$

Integrando esta igualdad dentro de los límites del espesor x, obtenemos:

$$\ln n_{0x} = -\sigma N_0 x + C, \tag{4}$$

donde n_{0x} es el número de neutrones que pasan por una capa de espesor x sin ser capturados, y C es la constante de integración. El valor de esta constante lo hallamos basándonos en que cuando $x = 0$ tendremos que $n_{0x} = n_0$, de donde $C = \ln n_0$.

Los valores de las secciones eficaces de captura σ hallados por la igualdad (4) dependen mucho de la velocidad de los neutrones. Esta dependencia es diferente para distintas sustancias. En la fig. 394 se da la variación típica de σ en función de v. Para un valor determinado de $v = v_0$ la curva presenta un máximo agudo, donde la captura tiene carácter de resonancia. En la región de las velocidades pequeñas σ es aproximadamente proporcional a $\frac{1}{v}$. Para los neutrones de velocidades «térmicas» la sección eficaz de captura es generalmente una magnitud del orden de 10^{-24} cm^2. Pero para algunas sustancias σ es mucho mayor, por ejemplo, para el boro $\sigma = 5{,}4 \cdot 10^{-22}$ cm^2 y para el cadmio $\sigma = 3 \cdot 10^{-21}$ cm^2.

Las secciones eficaces de difusión elástica son por lo general de un orden de magnitud mayor que la sección eficaz de captura fuera de resonancia. Como unidad de sección eficaz se toma el *barn*, que es igual a 10^{-24} cm^2. Por ejemplo, la sección eficaz del núcleo de nitrógeno referida a la reacción (α, p) es igual a 1 barn y las secciones eficaces antes mencionadas del boro y del cadmio, referidas a la captura de neutrones «térmicos», son iguales respectivamente a $5{,}4 \cdot 10^3$ y $3 \cdot 10^3$ barn.

§ 376. Radiactividad artificial. Positrones. I. Curie y F. Joliot-Curie bombardeando diferentes sustancias con partículas α hallaron que en una serie de casos la sustancia bombardeada continúa radiando después de retirar la fuente de partículas α. La intensidad de esta radiación disminuye exponencialmente con el tiempo, de manera análoga a como ocurre en el caso de los elementos radiactivos naturales. Esto hizo suponer que como resultado del bombardeo con partículas α *pueden originarse isótopos radiactivos de elementos que en condiciones normales solamente se encuentran en forma de isótopos estables no radiactivos.* Posteriormente se supo que esta misma generación de isótopos radiactivos tiene lugar en las transformaciones nucleares provocadas por neutrones. Por ejemplo, si el isótopo natural estable del sodio ${}_{11}Na^{23}$ se bombardea con neutrones se obtiene el isótopo radiactivo ${}_{11}Na^{24}$; esta reacción se desarrolla de acuerdo con el esquema (n, γ):

$${}_{11}Na^{23} + {}_0n^1 \rightarrow {}_{11}Na^{24} + h\nu.$$

El isótopo $_{11}Na^{24}$ presenta radiactividad β con un período de semidesintegración $\tau = 14{,}8$ horas. De acuerdo con la ley de desplazamiento cuando el núcleo $_{11}Na^{24}$ emite la partícula β aparece un núcleo de magnesio $_{12}Mg^{24}$.

$$_{11}Na^{24} \rightarrow {}_{12}Mg^{24} + {}_{-1}e^{0} + h\nu.$$

El isótopo del magnesio $_{12}Mg^{24}$ forma parte de los isótopos estables de este elemento, que en estado natural presenta los tres isótopos siguientes: $_{12}Mg^{24}$, $_{12}Mg^{25}$ y $_{12}Mg^{26}$.

Las reacciones del tipo (n, p) también originan isótopos radiactivos, por ejemplo:

$$_{7}N^{14} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{6}C^{14} + {}_{1}H^{1}.$$

El isótopo $_{6}C^{14}$ también presenta radioactividad β, con un período de semidesintegración mayor de 5 000 años. Como resultado de esta desintegración β vuelve a producirse nitrógeno:

$$_{6}C^{14} \rightarrow {}_{7}N^{14} + {}_{-1}e^{0}.$$

Esta última reacción es interesante por lo siguiente: las partículas precursoras fueron un núcleo de nitrógeno y un neutrón; como resultado de la reacción se obtuvo el núcleo de nitrógeno y, en lugar del neutrón, aparecieron un protón y un electrón. De esta forma el neutrón parece desintegrarse en un protón y un electrón. Pero a pesar de esta transformación no puede considerarse que el neutrón consta simplemente de un protón y de un electrón. Todo este proceso tiene el carácter de *transformación relativa* de unas partículas elementales en otras.

De la unión del neutrón con un mismo núcleo pueden resultar reacciones distintas según la velocidad que tenga el neutrón. Por ejemplo, si el núcleo del isótopo $_{9}F^{19}$ del flúor se une con un neutrón lento (de energía menor de 1,5 MeV) se produce la reacción:

$$_{9}F^{19} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{9}F^{20} + h\nu.$$

En el caso de neutrones más rápidos (1,5 — 3,7 MeV) como resultado de la reacción se obtiene un isótopo del nitrógeno y helio:

$$_{9}F^{19} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{7}N^{16} + {}_{2}He^{4}.$$

Finalmente, si los neutrones son muy rápidos (con más de 60 MeV) el núcleo de flúor se desintegra en varias partículas:

$$_{9}F^{19} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{6}C^{11} + 3{}_{1}p^{1} + 6{}_{0}n^{1}.$$

Los isótopos radiactivos artificiales presentan con frecuencia un nuevo tipo de desintegración desconocido entre los elementos radiactivos naturales que figuran al final del sistema periódico de Mendeléiev. Estos isótopos pueden emitir una partícula cargada positivamente de masa igual a la de un electrón; la carga de esta

partícula coincide en valor absoluto con la carga del electrón, de la que se diferencia únicamente por su signo. Esta partícula recibió el nombre de *positrón*. La existencia de los positrones fue descubierta al estudiar los rayos cósmicos, de los que nos ocuparemos más adelante. Ahora nos limitaremos a mencionar una serie de reacciones nucleares que conducen a la formación de isótopos con radiactividad β^+ (positrónica). Puede servir de ejemplo la serie de reacciones (α, n). Así, cuando se bombardea el isótopo ${}_5B^{10}$ del boro con partículas α se origina un isótopo del nitrógeno que posee radiactividad β^+. Este proceso se desarrolla según el esquema:

$$ {}_5B^{10} + {}_2He^4 \rightarrow ({}_7N^{14}) \rightarrow {}_7N^{13} + {}_0n^1, $$
$$ {}_7N^{13} \rightarrow {}_6C^{13} + {}_{+1}e^0, $$

donde el símbolo ${}_{+1}e^0$ sirve para designar el positrón. El semiperíodo de este isótopo radiactivo del nitrógeno es igual a 11 min.

De la expulsión de un positrón del núcleo del ${}_7N^{13}$ resulta el isótopo ${}_6C^{13}$ del carbono, es decir, un elemento que tiene el mismo número de masa pero cuyo número de carga es una unidad menor, es decir, un elemento que se encuentra un puesto antes en el sistema periódico de Mendeléiev. Es evidente que este género de ley de desplazamiento deberá referirse a todos los casos de radiactividad β^+. Por esto podemos escribir el siguiente esquema general de la desintegración positrónica:

$$ {}_ZX^M \rightarrow {}_{Z-1}Y^M + {}_{+1}e^0. $$

La desintegración β^+, lo mismo que la β^-, va acompañada de la emisión de neutrinos.

El descubrimiento de los positrones jugó un gran papel en el desarrollo de nuestros conocimientos sobre las partículas elementales. Antes del descubrimiento de los positrones se consideraba que había una diferencia esencial entre los portadores de cargas elementales $|e|$ positivas y negativas. Los portadores de la carga elemental negativa $-e$ son los electrones, cuya masa es muy pequeña. Como portadores de la carga elemental positiva $+e$ no se conocían más que los protones, relativamente pesados, que son núcleos del más simple de los átomos, es decir, del de hidrógeno (${}_1H^1$). Pero entonces quedaba claro que existen positrones, es decir, partículas análogas a los electrones que se distinguen de éstos solamente por el signo de su carga. No obstante, entre los electrones y los positrones existe una gran diferencia. Los electrones son un tipo de partículas elementales que se detectan con relativa facilidad: las capas externas de todos los átomos están formadas por electrones, los electrones se encuentran en los metales en estado «libre» y en los tubos de vacío se pueden obtener flujos de electrones. Los positrones, por el contrario, se encuentran con poca frecuencia, a lo que se debe que fueran

descubiertos mucho más tarde que los electrones: solamente se observan en los fenómenos relacionados con los rayos cósmicos y con los casos de radiactividad β^+ que presentan los isótopos inestables obtenidos artificialmente.

El estudio ulterior de las propiedades de los positrones sirvió para demostrar que existe *un proceso de transformación de los pares electrón-positrón en fotones y un proceso inverso, de formación de pares electrón-positrón a partir de los fotones.*

Si un flujo de positrones emitido, por ejemplo, por el isótopo radiactivo ${}_7N^{13}$ del nitrógeno se dirige sobre una placa metálica se producirán rayos γ duros. Estos rayos γ proceden de la unión de los positrones con los electrones libres del metal, los cuales, como resultado de esta unión, dejan de existir como tales y se transforman en fotones de gran energía. Este fenómeno, descubierto por Anderson, recibió en la literatura extranjera el nombre de «*aniquilación*» de las partículas y se relacionó con las concepciones idealistas erróneas sobre la supuesta posibilidad de destruir la materia. En realidad el proceso de «aniquilación» se reduce *a la transformación de una forma de la materia (electrones y positrones) en otra forma de la materia (fotones).* La contraposición de la luz (fotones) a la materia, que con frecuencia se encuentra en la literatura burguesa, es totalmente inconsistente desde el punto de vista filosófico. Como decía Lenin, «la única «propiedad» de la materia con cuya admisión está ligado el materialismo filosófico, es la propiedad de ser una realidad objetiva»*). La luz es una realidad objetiva que existe fuera de nuestra conciencia y, en este sentido, la luz es una de las formas concretas de la materia.

La transformación de los pares electrón-positrón en fotones se realiza cumpliendo la ley de la conservación de la energía y la ley de la conservación de la cantidad de movimiento. La energía correspondiente a la masa en reposo m_0 del electrón es igual a m_0c^2; esta misma energía es la que corresponde a la masa en reposo del positrón. Por esto, para que se cumpla la ley de conservación de la energía al transformarse los pares positrón-electrón en fotones deberá cumplirse la igualdad

$$W_\Phi = 2m_0c^2 + W_{c1} + W_{c2}, \qquad (1)$$

donde W_Φ es la energía de los fotones que aparecen y W_{c1} y W_{c2} las energías cinéticas del electrón y del positrón antes del choque. Para que se cumpla la ley de la conservación de la cantidad de movimiento *es necesario que como resultado de la transformación del par positrón-electrón aparezcan dos fotones.* Efectivamente, si tomamos

*) V. I. Lenin, «*Materialismo y empiriocriticismo*», Ediciones en lenguas extranjeras, Moscú, 1948, pág. 297 o Editorial Política, La Habana, 1963, pág. 251.

un sistema de coordenadas cuyo origen coincida con el centro de las masas del positrón y del electrón, la suma de sus cantidades de movimiento con respecto a este sistema será igual a cero. Por consiguiente también deberá ser igual a cero la suma de las cantidades de movimiento de los fotones aparecidos. Esta condición se cumplirá si aparecen dos fotones $h\nu$ iguales y salen despedidos en sentidos opuestos. Si las energías cinéticas W_{c1} y W_{c2} del electrón y del positrón son pequeñas, la energía de cada uno de los fotones que aparecen, de acuerdo con la igualdad (1) será:

$$h\nu = m_0c^2.$$

La magnitud m_0c^2, expresada en megaelectrón-voltios, es igual a 0,511 MeV. De esta forma cuando un par electrón—positrón se transforma deben aparecer dos fotones con una energía mínima de 0,511 MeV cada uno. Estas condiciones de la teoría fueron confirmadas por experimentos directos. L. A. Artsimóvich, A. I. Alijánov y A. I. Alijanián colocaron una fuente de positrones entre dos contadores. Esta fuente de positrones se rodeó de una envoltura de plomo cuyo espesor era suficiente para poder absorber todos los positrones sin detener sensiblemente los rayos γ duros. Dentro de esta envoltura los positrones se unían a los electrones dando lugar a la formación de fotones. Los contadores dieron *siempre resultados coincidentes*, lo que fue una demostración de que en cada uno de los actos individuales de transformación de un par electrón-positrón surgieron dos fotones lanzados en sentidos opuestos. La determinación del grado de «dureza» de los rayos γ confirmó que los fotones aparecidos tienen efectivamente una energía aproximada de 0,5 MeV.

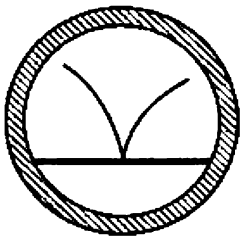

Fig. 396. Trayectorias de un par electrón-positrón.

En cierto grado existe también el proceso inverso, es decir, el de un fotón que encontrándose en el campo de cualquier núcleo se transforma en un par electrón—positrón. En este caso la ley de la conservación de la cantidad de movimiento no condiciona el número de fotones que deben transformarse: un fotón engendra un par electrón-positrón. De acuerdo con la igualdad (1) la energía mínima de un fotón capaz de transformarse en par electrón-positrón es $h\nu = 2m_0c^2 = 1{,}02$ MeV. La transformación del fotón en par electrón-positrón ocurre principalmente en el campo de los núcleos de los elementos pesados. Cuando la energía del fotón que se transforma es mayor de 1,02 MeV, el resto se emplea en comunicar energía cinética al positrón y al electrón. La formación de estos pares fue observada iluminando plomo con rayos γ duros emitidos por el ThC″. Las huellas de las partículas aparecidas se fotografiaron en la cámara

de Wilson; estas huellas, en presencia de un campo magnótico, se desviaban en sentidos opuestos y tenían la forma de dos arcos iguales que partían de un mismo punto (fig. 396). Este hecho sirvió de confirmación directa de que la radiación engendra el par electrón-positrón.

La energía de los fotones de los rayos γ del ThC″ es igual a 2,6 MeV. Como ya hemos dicho, para que se produzca un par hace falta una energía aproximada de 1 MeV, por consiguiente, 1,6 MeV debe invertirse en comunicar velocidad a las nuevas partículas. Efectivamente, las mediciones directas de las velocidades del positrón y del electrón llevadas a cabo demostraron que la suma de sus energías cinéticas era igual a 1,6 MeV.

§ 377. Transformaciones nucleares producidas por partículas aceleradas artificialmente. Hasta ahora hemos estudiado las transformaciones nucleares producidas directamente por las partículas α, procedentes de la radiactividad natural, o por los neutrones, producidos a su vez por el bombardeo de las sustancias correspondientes con partículas α. Por lo tanto la transformación artificial de los elementos, en fin de cuentas, ocurría siempre a costa de la radiactividad natural. Naturalmente tiene gran interés acelerar artificialmente las partículas hasta energías suficientes para que al chocar puedan producir transformaciones nucleares. Como para conseguir esto se necesitan energías muy grandes (del orden de millones de electrón-voltios), los procedimientos técnicos para acelerar las partículas hasta dichas energías ofrecen considerables dificultades.

Los métodos artificiales de aceleración de las partículas no sólo permiten causar la desintegración valiéndose de los núcleos de helio (partículas α), sino también por medio de los protones y de los deuterones rápidos. Históricamente la primera reacción realizada con protones acelerados artificialmente fue la desintegración del litio. Esta reacción fue llevada a cabo en el año 1930 por dos colaboradores de Rutherford, Cockcroft y Walton, que para acelerar los protones (núcleos de hidrógeno ordinario) emplearon una instalación con transformadores que creaba un campo de aceleración cuya diferencia de potencial alcanzaba hasta 600 000 V. La Física moderna dispone de una serie de métodos para acelerar las partículas hasta energías muy considerables, que llegan a ser de decenas y hasta de centenares de millones de electrón-voltios.

Veamos estos métodos:

1. Generador electrostático de Van de Graaff. La construcción de este generador se basa en la posibilidad de cargar una esfera hueca conductora hasta un alto grado potencial transmitiéndole las cargas desde dentro (t. II, § 133). El esquema de la estructura de este generador se muestra en la fig. 397, donde A y A' son dos

esferas metálicas huecas montadas sobre dos columnas B y B' aisladoras. Las cargas se hacen llegar a las esferas por medio de dos cintas sin fin m y n. Estas cintas son de material aislante (seda o tejido cauchotado) y reciben las cargas de un transformador de 10—20 kV

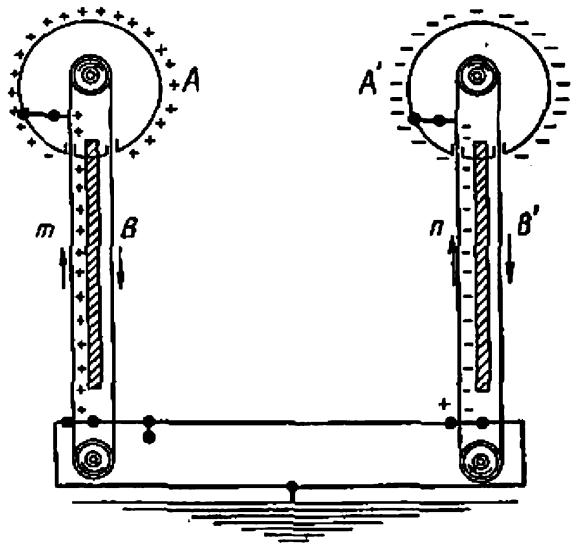

Fig. 397. Esquema del generador de Van de Graaff.

provisto de kenotrones para rectificar la corriente. Una de las esferas se carga positivamente y la otra negativamente. Este tipo de generador permite obtener diferencias de potencial de hasta $7 \cdot 10^6$ V.

2. **Ciclotrón.** La idea de este aparato, construido por primera vez en el año 1932 por Lawrence, consiste en lo siguiente: la partícula cargada se acelera en el vacío con un campo eléctrico que se crea en la apertura que hay entre dos cajas planas semicirculares A y B (llamadas «des» o «D's» por su forma en D) (fig. 398). Un campo magnético perpendicular a las bases de estas cajas hace que la partícula gire y la obliga a pasar otra vez por la apertura entre las dos «des». En este momento un generador radiotécnico adecuado hace que cambien los signos de las cargas de ambas cajas, de forma que el campo que existe en la apertura vuelva a acelerar la partícula. Como resultado de esto la partícula se mueve siguiendo una trayectoria en espiral (que en la fig. 398, *a* se representa con línea punteada) experimentando una nueva aceleración cada vez que pasa por la apertura. Si la diferencia de potencial que se crea entre las «des» es igual a V_0 y la partícula da n vueltas, en fin de cuentas experimentará la aceleración correspondiente a un campo cuya diferencia de potencial total sea $V = 2nV_0$. De esta forma, con

una diferencia de potencial relativamente pequeña V_0 y haciendo que la partícula dé un número de vueltas n grande, se puede conseguir acelerarla hasta que su energía tenga un valor bastante considerable.

La posibilidad de realizar el ciclotrón se basa en que el tiempo t que emplea la partícula en dar una vuelta, moviéndose por su trayectoria en espiral, no depende de su velocidad. Esto permite

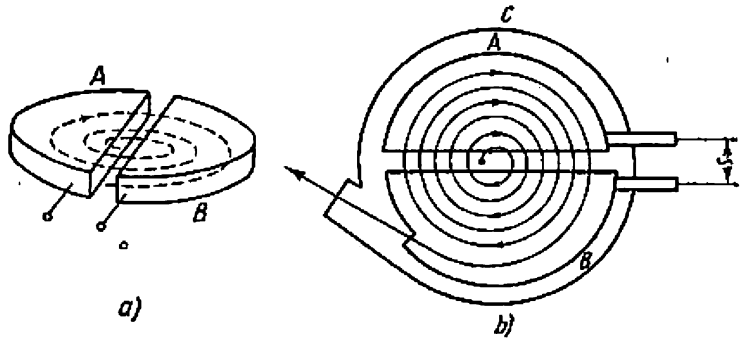

Fig. 398. Esquema del ciclotrón.

cambiar los signos de las cargas en ambas «des» con una frecuencia circular constante $\omega = \frac{2\pi}{t}$. Efectivamente, si la intensidad del campo magnético es igual a H, el radio R, de la semicircunferencia que describe la partícula dentro de una de las «des», será

$$R = \frac{cv}{\frac{e}{m} H},$$

donde v es la velocidad de la partícula (constante mientras se mueve dentro de una de las «des») y e/m es la razón de su carga a su masa. De aquí tendremos que el tiempo t' que dura el movimiento en una de las «des» será

$$t' = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi c}{\frac{e}{m} H}, \qquad (1)$$

es decir, un valor constante que no depende de la velocidad v. Por consiguiente, el tiempo $t = 2t'$ tampoco depende de la velocidad.

En la fig. 398, *b* se muestra el esquema del ciclotrón en el plano. Las dos cajas semicirculares («des») A y B se encuentran dentro de una cámara plana C de la que se extrae el aire. Esta cámara se encuentra entre los polos de un electroimán. En los ciclotrones grandes el diámetro de los polos del electroimán alcanza 1,5 m y aún más. La fuente de iones es un arco pequeño que arde en el centro del

ciclotrón. Este arco está rodeado de paredes metálicas en las que hay un solo orificio pequeño para que puedan salir los iones. A la región en que arde el arco llega constantemente un gas, que sirve para que se formen los iones. El gas que desde esta región se infiltra en la parte restante del ciclotrón se extrae con una bomba.

Con el ciclotrón se pueden acelerar protones, deuterones y núcleos de helio. Con su ayuda también se pueden obtener neutrones, bombardeando con iones el elemento correspondiente. Por ejemplo, bombardeando el berilio con deuterones se pueden obtener neutrones por medio de la reacción:

$$_4Be^9 + {}_1D^2 \rightarrow {}_5B^{10} + {}_0n^1.$$

Por este procedimiento se consiguen flujos de neutrones de tal potencia que para obtenerlos serían necesarios varios kilogramos de una sustancia radiactiva natural.

La condición (1), necesaria para poder acelerar las partículas en el ciclotrón, se cumple únicamente mientras la variación de la masa de las partículas en función de la velocidad es despreciable. Pero cuando las velocidades son grandes se deja sentir (de acuerdo con la teoría de la relatividad) que la masa de la partícula acelerada depende de la velocidad; entonces la condición (1) se infringe y en adelante no es posible seguir acelerando las partículas en el ciclotrón. Esta circunstancia limita la energía que se puede comunicar a las partículas por medio del ciclotrón. Para las partículas ligeras esta limitación empieza antes, puesto que ellas llegan más pronto a las grandes velocidades. La energía máxima que pueden alcanzar los deuterones en el ciclotrón es de cerca de 100 MeV. El físico soviético V. I. Veksler fue el primero en demostrar que las partículas se podían seguir acelerando si la frecuencia del generador o la intensidad del campo magnético se iba variando muy despacio (adiabáticamente). Este mismo principio, llamado de la *estabilidad de fase*, fue propuesto simultáneamente por McMillan en los EE.UU. A partir del año 1947 se han construido una serie de instalaciones que funcionan por el principio de la estabilidad de fase y que han recibido los nombres de *fasotrones*, *sincrotrones*, *sincrofasotrones*, *sincrociclotrones*, etc. En el Instituto unificado de investigaciones nucleares de Dubna (URSS) funciona un fasotrón con un electroimán cuyos polos tienen 6 m de diámetro. Este fasotrón permite acelerar los protones hasta energías de 660 MeV y las partículas α hasta energías de 840 MeV. En esta instalación se pueden conseguir, mediante el bombardeo de blancos a propósito, neutrones con energía de hasta 600 MeV.

En Berkeley (EE.UU) se construyó un sincrofasotrón (llamado «Bevatrón») que acelera los protones hasta energías de 6 300 MeV. Uno de los aceleradores más grandes de este tipo es el sincrofasotrón del Instituto unificado de investigaciones nucleares, que tiene un

electroimán circular, formado por 12 bloques, cuyo diámetro exterior mide 72 m. En este sincrofasotrón se pueden acelerar partículas hasta energías de 10 000 MeV. Recientemente ha comenzado a funcionar en la URSS el sincrofasotrón más grande del mundo, cuya potencia es de $70 \cdot 10^9$ eV.

3. **Betatrón.** Este aparato sirve para acelerar electrones, que debido a su pequeña masa no se pueden acelerar hasta energías considerables en el ciclotrón. Los electrones se aceleran en este aparato por medio de un campo eléctrico rotacional que se produce como resultado de la variación del campo magnético. La teoría de este procedimiento fue elaborada por el físico soviético Y. P. Terletski. La posibilidad de la aceleración en el betatrón no está limitada por la variación de la masa en función de la velocidad. El betatrón consiste en un recipiente toroidal de vacío situado entre los dos polos de un electroimán. Al variar con el tiempo la intensidad del campo magnético H surge un campo eléctrico rotacional (t. II, § 242), de líneas de fuerza circulares, que acelera constantemente a los electrones. La variación del campo magnético se realiza haciéndolo aumentar durante un corto espacio de tiempo (del orden de 10^{-3} s). Este lapso es suficiente para que los electrones den centenares de millares de vueltas siguiendo una órbita circular y alcancen energías de hasta 100 MeV. Estos electrones tan rápidos emiten rayos γ muy duros al chocar con un blanco duro. Los rayos γ así obtenidos se pueden emplear para la desintegración nuclear.

Los métodos de acelerar las partículas que acabamos de indicar dieron la posibilidad de realizar un gran número de reacciones nucleares y de estudiar las propiedades de los isótopos de diferentes elementos obtenidos en ellas.

Como ejemplo citaremos las reacciones producidas por el bombardeo del litio con protones rápidos. El litio natural consta de dos isótopos, el ${}_3Li^7$ y el ${}_3Li^6$. Bombardeando el ${}_3Li^7$ se obtiene la reacción:

$$ {}_3Li^7 + {}_1H^1 \rightarrow ({}_4Be^8) \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^4. $$

Como puede verse, en fin de cuentas resultan dos núcleos de helio (partículas α). Pero el núcleo del ${}_4Be^8$ no siempre se disgrega en dos partículas α. En algunos casos este núcleo pasa a un estado estable emitiendo un fotón γ con una energía de 17,2 MeV; en este caso la reacción tiene la forma:

$$ {}_3Li^7 + {}_1H^1 \rightarrow ({}_4Be^8) \rightarrow {}_4Be^8 + h\nu. $$

El segundo isótopo del litio ${}_3Li^6$, al ser bombardeado con protones rápidos conduce a la reacción:

$$ {}_3Li^6 + {}_1H^1 \rightarrow ({}_4Be^7) \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^3. $$

Por consiguiente, en este caso también se producen dos núcleos de helio, pero uno de ellos tiene el peso atómico ordinario 4, mien-

tras que el otro tiene un peso atómico 3. Así fue descubierto el isótopo ligero del helio $_2He^3$, que es estable. En condiciones naturales este isótopo existe en la Tierra en cantidades extraordinariamente pequeñas: se encuentra mezclado con el helio atmosférico ordinario en la proporción aproximada de 0,0001%.

Los deuterones rápidos producen diversas reacciones nucleares. Estas reacciones transcurren frecuentemente según el tipo (d, p) o (d, n), es decir, con generación de un protón o de un neutrón, con la particularidad de que ambos tipos de reacciones pueden realizarse bombardeando un mismo elemento. Como ejemplo daremos a conocer la reacción que se produce cuando se bombardean deuterones con deuterones; esta reacción se desarrolla por uno de los esquemas siguientes:

$$_1D^2 + {}_1D^2 \rightarrow {}_2He^3 + {}_0n^1, \quad {}_1D^2 + {}_1D^2 \rightarrow {}_1H^3 + {}_1H^1.$$

En el primer caso vuelve a formarse el isótopo ligero del helio $_2He^3$. En el segundo caso se origina el isótopo pesado del hidrógeno de peso atómico 3; este isótopo del hidrógeno recibió el nombre de *tritio* o *tritón* ($_1T^3$). El tritio es radiactivo, emite una partícula β (electrón) y se convierte en el isótopo del helio $_2He^3$:

$$_1T^3 \rightarrow {}_2He^3 + {}_{-1}e^0.$$

El período de semidesintegración del tritio es de cerca de 12 años el valor exacto de su masa es 3,01700.

La reacción $_1D^2 + {}_1D^2 \rightarrow {}_2He^3 + {}_0n^1$ se emplea para obtener neutrones.

Bombardeando con deuterones el isótopo ligero del litio $_3Li^6$ aparecen dos partículas α:

$$_3Li^6 + {}_1D^2 \rightarrow ({}_4Be^8) \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^4.$$

Durante esta reacción se libera una gran cantidad de energía (22,7 MeV).

Si se bombardea con deuterones el isótopo del litio $_3Li^7$ se obtiene un isótopo radioactivo del litio:

$$_3Li^7 + {}_1H^2 \rightarrow ({}_4Be^9) \rightarrow {}_3Li^8 + {}_1H^1.$$

El litio $_3Li^8$ es radioactivo y tiene un semiperíodo de 0,88 s; su desintegración transcurre según el esquema:

$$_3Li^8 \rightarrow {}_4Be^8 + {}_{-1}e^0.$$

El isótopo $_4Be^8$ también es inestable y en un período muy corto ($\sim 10^{-21}$ s) se desintegra en dos partículas α:

$$_4Be^8 \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^4.$$

De esta forma vemos que bombardeando el litio $_3Li^7$ con deuterones se obtiene toda una serie de transformaciones nucleares.

Cuando las partículas incidentes tienen la misma energía en ciertos casos pueden producirse reacciones distintas, por ejemplo, al bombardear los núcleos de ${}_9F^{19}$ con deuterones lentos pueden generarse núcleos de ${}_{10}Ne^{20}$, de ${}_9F^{20}$ y de ${}_8O^{17}$ con la emisión correspondiente, en calidad de segunda partícula, de un electrón, un protón o una partícula α. Los procesos de este tipo, que transcurren en una proporción determinada entre ellas, se llaman *procesos concurrentes*.

Detengámonos ahora en las reacciones provocadas por los rayos γ duros que se obtienen en los betatrones. En el § 375 ya hicimos mención de la existencia de la «fotodesintegración del núcleo», consistente en la desintegración de los deuterones en protones y neutrones producida por los fotones γ. He aquí otros casos de fotodesintegración del núcleo:

$$ {}_8O^{16} + h\nu \rightarrow {}_8O^{15} + {}_0n^1, \quad {}_8O^{15} \rightarrow {}_7N^{15} + {}_{+1}e^0 \ (\tau = 126\text{s}), $$

$$ {}_{12}Mg^{26} + h\nu \rightarrow {}_{11}Na^{25} + {}_1H^1, \qquad {}_{11}Na^{25} \rightarrow {}_{12}Mg^{25} + {}_{-1}e^0 \ (\tau = 62\text{s}). $$

En el primer caso el fotón expulsa del núcleo a un neutrón, en el segundo a un protón; en ambos casos se producen núcleos inestables de vida corta.

Los niveles energéticos intranucleares, entre los cuales la transición da lugar a la emisión de rayos γ, se pueden distinguir por su extraordinaria estrechez. En consonancia con esto las rayas del espectro γ poseen un alto grado de uniformidad por su frecuencia; su anchura relativa puede alcanzar valores de 10^{-16}.

En condiciones normales las rayas γ son más anchas, debido al movimiento térmico de los átomos (efecto Doppler) y están desplazadas por el efecto de retroceso. En el año 1958 el físico alemán Mössbauer demostró que estas causas secundarias del ensanche y desplazamiento de las rayas se pueden disminuir considerablemente enfriando la fuente de rayos γ hasta una temperatura de varios grados Kelvin. A esta temperatura tan baja la influencia del movimiento térmico se hace tan pequeña y los núcleos resultan encontrarse tan «rígidamente» encuadrados en la red cristalina del cuerpo sólido que la cantidad de movimiento que cede el fotón γ no se transmite a un núcleo aislado sino al conjunto de toda la red. Y como la red tiene una gran masa, la velocidad de retroceso resulta muy pequeña y la raya γ emitida no experimenta variaciones de frecuencia. En estas condiciones las frecuencias de las rayas de emisión y de absorción de los rayos γ coinciden con mucha exactitud unas con otras y el proceso de absorción de los rayos γ tienen un carácter agudamente resonante. Basta una pequeña variación Doppler de la frecuencia producida por la traslación mecánica de la fuente, con una velocidad de varios cm/s solamente, para que la intensidad de la absorción disminuya sensiblemente.

El efecto Mössbauer dio la posibilidad de realizar una comprobación muy interesante del principio de Einstein sobre la equivalencia de las fuerzas gravitatorias e inerciales. Como indicamos en el § 300, de este principio se deduce que la frecuencia de la radiación depende del campo de la fuerza de la gravedad. En las condiciones propias de la absorción resonante aguda de los rayos γ basta situar la fuente y la lámina absorbente a diferentes alturas sobre la superficie de la Tierra para que se note la variación de la frecuencia de los rayos γ al variar la gravedad. La diferencia en la absorción de los rayos γ se ha conseguido percibir cuando la diferencia de alturas entre la fuente y la lámina absorbente era igual a 21 m.

Gracias a las transformaciones nucleares artificiales se han conseguido obtener elementos que antes no figuraban en el sistema periódico de Mendeléiev. Entre estos elementos se encuentran, por ejemplo, los que tienen los números $Z = 43$, 61, 85 y 87. Tres de estos elementos fueron vaticinados por Mendeléiev con los nombres de ekamanganeso, ekayodo y ekacesio (véase el § 349). Todos ellos han sido obtenidos en forma de isótopos radiactivos inestables. El isótopo más estable es el elemento $Z = 43$, cuyo peso atómico es 99 (tecnecio), que tiene un período de semidesintegración de $4{,}7 \cdot 10^6$ años. El elemento cuyo número de orden es $Z = 61$ pertenece a las tierras raras (prometio o promecio).

El elemento de $Z = 85$ se llama astato (At). Por sus propiedades físico-químicas se asemeja a los halógenos F, Br y I. El elemento de $Z = 87$ es un metal alcalino pesado (francio), que en la primera columna del sistema periódico de Mendeléiev sigue al cesio. El astato y el francio son elementos inestables muy radiactivos; el período de semidesintegración del francio es igual a 21 min.

Artificialmente se han obtenido también algunos elementos transuránicos de $Z > 92$, de los que hablaremos más adelante (§ 380).

Estos últimos años, al bombardear con partículas α y protones extraordinariamente rápidos blancos de diversos metales se ha observado la aparición de unas nuevas partículas (mesones e hiperones, véanse los §§ 383 y 384), que antes se habían podido observar exclusivamente en los rayos cósmicos. En el año 1955 se consiguió demostrar que al bombardear con protones muy rápidos un blanco de cobre se producen partículas cargadas negativamente, cuya masa coincide con una exactitud de hasta un 5% con la masa del protón. Estas partículas son de por sí *antiprotones*, es decir, partículas simétricas a los protones, pero con carga negativa.

Antes de terminar este párrafo nos detendremos en otro tipo de transformaciones nucleares llamado *transición isomérica*. La existencia de esta transiciones y de los isótopos artificiales que se obtienen fue descubierta por I. V. Kurchátov y L. I. Rusínov. Al estudiar la radiactividad artificial del bromo, producida por bombardeo con neutrones, Kurchátov y Rusínov establecieron que el isótopo del bromo $_{35}Br^{80}$ tiene dos períodos de semidesintegración diferentes, uno de $\tau = 18$ min y otro con período mayor de 4 horas. Este caso se explica por el hecho de que el $_{35}Br^{80}$ puede existir en dos estados distintos («isoméricos»). El primero de estos estados es inestable; cuando el $_{35}Br^{80}$ se halla en este estado se transforma por radiación β en $_{36}Kr^{80}$, con un período $\tau = 18$ min. El segundo estado es metastable y cuando el $_{35}Br^{80}$ se encuentra en él no se disgrega. No obstante, la vida en este estado metastable es limitada e igual a 4,4 horas. Al pasar el $_{35}Br^{80}$ de su estado metastable al inestable vuelve a presentar radiactividad β y se transforma en $_{36}Kr^{80}$.

Los isótopos radiactivos de los elemontos que se obtienen artificialmente encuentran diversas aplicaciones prácticas. Algunos de ellos se utilizan en medicina para sustituir a las preparaciones radiactivas naturales. Ultimamente se ha comenzado a emplear en Química y sobre todo en Biología el *método de los átomos «trazadores»*. Este método se basa en la posibilidad de descubrir cantidades insignificantes de los isótopos inestables por su acción radiactiva. Por ejemplo, depositando en el suelo el isótopo radiactivo $_{20}Ca^{45}$ se puede descubrir después a qué parte de las plantas (hojas, frutos) va a parar dicho elemento.

§ 378. **Momentos nucleares.** Los electrones no sólo tienen carga y masa, sino también momento magnético; este último es igual a un magnetón de Bohr $\mu_0 = \frac{h}{2c}\frac{e}{m}$. Los núcleos atómicos, hablando en general, también tienen momentos mecánicos y magnéticos. El momento magnético del electrón condiciona el desdoblamiento de los niveles energéticos del átomo en varios subniveles, lo que a su vez da lugar a la estructura de los dobletes, tripletes, etc., de las rayas espectrales (§ 347). El momento magnético del núcleo también conduce a un desdoblamiento de los niveles energéticos de la capa electrónica del átomo, pero mucho más estrecho que el provocado por el momento magnético del electrón. Este desdoblamiento complementario de los niveles energéticos es el que determina la llamada *estructura hiperfina* de las capas espectrales.

En el año 1928 A. N. Terenin y L. N. Dobretsov descubrieron que cada una de las componentes del doblete amarillo del sodio $3s^2S_{1/2} - 3p^2P_J$ consta a su vez de dos rayas muy próximas entre sí. Esta estructura de las rayas es tan fina que solamente se puede observar con espectroscopios de gran poder separador y empleando focos luminosos especiales que produzcan rayas bien definidas. La estructura hiperfina de las rayas espectrales se puede explicar suponiendo que el núcleo del átomo tiene un momento mecánico $P_I = \sqrt{I(I+1)}\,\hbar$ (siendo I un número cuántico que caracteriza las propiedades del núcleo) y un momento magnético μ_I. El análisis de la estructura hiperfina permite determinar el valor del número cuántico I. Para los distintos núcleos I toma uno de los valores siguientes: 0, 1/2, 1, 3/2, etc.; por ejemplo, para el núcleo del sodio ($_{11}Na^{23}$) $I = 3/2$, para el del nitrógeno ($_7N^{14}$) $I = 1$, para el del calcio ($_{20}Ca^{40}$) $I = 0$. Cuando $I = 0$ no existe la estructura hiperfina. La magnitud del momento magnético de los núcleos constituye aproximadamente 1/1 000 del magnetón de Bohr. Pero la determinación de los momentos magnéticos de los núcleos por los datos espectroscópicos presenta considerables dificultades, puesto que exige un cálculo exacto de la energía de la interacción entre el núcleo y la capa electrónica.

El método directo para determinar los momentos magnéticos de los núcleos μ_I se basa en la desviación que experimentan los haces atómicos en presencia de un campo magnético. Este experimento se puede realizar siguiendo el mismo esquema que emplearon Stern y Gerlach para determinar el momento magnético de la capa electrónica del átomo (t. II, § 201). Por este procedimiento Stern y sus colaboradores determinaron el momento magnético del protón. Para ello estudiaron las desviaciones de un haz molecular de hidrógeno $({}_1H^1)_2$ en presencia de un campo magnético no uniforme. La molécula de hidrógeno puede encontrarse en dos estados diferentes, uno, con los momentos nucleares compensados (parahidrógeno) y otro, con los momentos nucleares paralelos entre sí (ortohidrógeno). Observando la escisión del haz de moléculas del ortohidrógeno en un campo magnético no uniforme Stern y sus colaboradores determinaron el momento magnético del núcleo de ${}_1H^1$, es decir, del protón. Los resultados de estas mediciones fueron inesperados. Naturalmente era de esperar que el momento magnético del protón viniera expresado por la misma fórmula que el momento magnético del electrón, con la única diferencia de cambiar la masa del electrón por la del protón. Como la masa del protón es 1 836 veces mayor que la del electrón, se esperaba que el momento magnético del protón resultaría igual a $\frac{1}{1\,836}$ magnetones de Bohr. Esta magnitud $\mu_N = \frac{1}{1\,836}\mu_0$ llegó a recibir la denominación especial de «magnetón nuclear». Pero las mediciones demostraron que el momento magnético del protón es aproximadamente 2,8 veces mayor que el magnetón nuclear μ_N. Según los datos modernos más exactos el momento magnético del protón $\mu_p = 2{,}7896\ \mu_N$.

Ultimamente se ha determinado un gran número de momentos nucleares por un *procedimiento «radioespectroscópico»* especial, basado en el cambio que experimenta la orientación del momento magnético de las partículas bajo la acción de una onda electromagnética cuya frecuencia entra en la región de las radiofrecuencias. Supongamonos un átomo en el estado $J = 0$; entonces el momento magnético de su capa electrónica será igual a cero y el momento magnético total coincidirá con el momento nuclear μ_I. En presencia de un campo magnético exterior de intensidad H este átomo tendrá una energía complementaria (compárese con el § 345)

$$\Delta W = \frac{M_I}{I}\mu_I H,$$

donde M_I es el número cuántico que determina la orientación del momento nuclear con relación a la dirección del campo magnético exterior H, que puede tomar los valores de $M_I = \pm I, \pm (I-1), \ldots$ Por la regla de selección son posibles las variaciones a saltos de la orientación del momento nuclear en las que $\Delta M_I = \pm 1$. Al ocurrir estos «cambios de orientación» en el campo magnético exterior se produce una variación de la energía cuyo valor numérico será igual a la magnitud

$$\delta(\Delta W) = \frac{\mu_I}{I} H. \qquad (1)$$

Para provocar el cambio de orientación hay que comunicarle al átomo desde el exterior una energía igual a la magnitud $\delta(\Delta W)$. Esta porción de energía puede comunicársele a costa de la absorción de una radiación cuya frecuencia sea

$$\nu = \frac{\delta(\Delta W)}{h}.$$

Poniendo aquí en lugar de $\delta(\Delta W)$ su valor según (1), obtenemos:

$$\nu = \frac{\mu_I H}{Ih}. \qquad (2)$$

No es difícil calcular que cuando $H \cong 1\,000$ oerstedios (Oe) la frecuencia ν resulta del orden de $10^6 - 10^7$ Hz, es decir, del orden de las frecuencias de las ondas de la radio ordinarias. El método radioespectroscópico de determinación

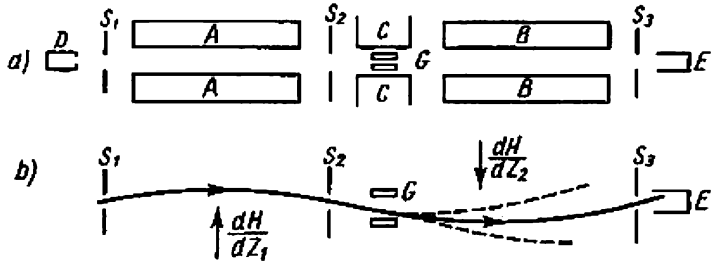

Fig. 399. Esquema del artificio para determinar los momentos nucleares por el método radioespectroscópico.

de los momentos magnéticos nucleares se basa en la aplicación de la correlación (2). Hallando experimentalmente la frecuencia ν con que ocurre el cambio de orientación de los átomos se puede calcular, por la igualdad (2), el valor de μ_I.

Para determinar cuándo se produce el cambio de orientación se utiliza el artificio representado esquemáticamente en la fig. 399, *a*. Dentro de un tubo metálico largo, del que se extrae el aire, se obtiene un haz atómico o molecular. Este haz se produce como resultado de la evaporación del material correspondiente en el horno D. El haz así obtenido, limitado por las rendijas S_1, S_2 y S_3 va a parar al receptor E, que registra la intensidad del haz. Dos imanes A y B crean un campo magnético no uniforme que desvía el haz, con la particularidad de que los gradientes de los campos de estos imanes tienen direcciones opuestas, de forma que los imanes desvían el haz en direcciones también opuestas. Eligiendo convenientemente los gradientes de ambos campos, la desviación provocada por el imán B compensa la producida por el imán A y el haz vuelve a llegar al receptor E. La trayectoria del haz en estas condiciones se representa en la fig. 399, *b* con línea de trazo continuo. Entre los dos imanes A y B hay un tercer imán C que crea un campo uniforme de intensidad H. Este campo tiene la misma dirección que los creados por los imanes A y B. Y como el haz no sufre desviación en presencia de un campo magnético constante, el tercer imán no varía la trayectoria de dicho haz. Esto es justo en el caso en que la orientación del momento magnético de las partículas permanece invariable durante todo el tiempo. Pero si dentro de los límites del campo H cambia la orientación de dichas partículas, también cambia la desviación que produce el imán B y, por consiguiente, la partícula que durante el recorrido cambia de

orientación no llegará al receptor E (la trayectoria de estas partículas se representa en la fig. 399, *b* por medio de líneas de trazo punteado). El cambio de orientación de las partículas se consigue creando un campo electromagnético variable por medio de un circuito de cobre G (que se encuentra entre los polos del imán C) al que se hace llegar una corriente alterna de gran frecuencia.

El experimento se reduce a escoger una frecuencia ν del campo electromagnético variable con la cual el haz deje de incidir sobre el receptor E. Este valor de la frecuencia da la posibilidad de hallar por la fórmula (2) el valor del momento nuclear μ_I. En la tabla XXVIII se dan los valores de I y la relación μ_I/μ_N para algunos núcleos.

Tabla XXVIII

Momentos nucleares

Z	Elemento	I	μ_I/μ_N
0	Neutrón	1/2	−1,9103
1	H^1	1/2	+2,7896
1	D^2	1	+0,8565
2	He^4	0	—
3	Li^6	1	−0,8213
3	Li^7	3/2	+3,2532
7	N^{14}	1	+0,403
8	O^{16}	0	—
11	Na^{23}	3/2	+2,215
19	K^{39}	3/2	+1,136
19	K^{40}	4	−1,290
49	In^{113}	9/2	+5,49

Como puede verse en esta tabla algunos núcleos dan un valor negativo de μ_I/μ_N; esto significa que el momento magnético de estos núcleos está dirigido en sentido contrario al del momento mecánico $\mathbf{P}_I$. El elemento que tiene mayor momento magnético es el indio, cuyo núcleo tiene un momento magnético 5,5 veces mayor que el magnetón nuclear μ_N. En la tabla XXVIII se dan también los valores de I y de μ_I/μ_N para el neutrón. Estos datos fueron obtenidos por medio de un experimento basado en que la difusión de los neutrones en el hierro imanado depende de la orientación que tenga el momento magnético de aquéllos. El cambio de orientación del campo magnético de los neutrones se efectúa también en este caso por el procedimiento radioespectroscópico que mencionamos al describir el artificio del experimento anterior. El hecho de que el neutrón (la partícula neutra) tenga momento magnético tiene gran interés para el estudio de la naturaleza de las partículas elementales.

Una variante del método radioespectroscópico puede utilizarse para investigar la estructura de las moléculas. En este caso el cuerpo sólido o líquido que contiene las moléculas a estudiar se sitúa en un campo magnético exterior. Cuando los campos magnéticos son del orden de 10 000 oerstedios las transiciones entre los niveles energéticos correspondientes a las distintas orientaciones del momento energético del núcleo responden a frecuencias que entran dentro de la región de las radiofrecuencias. Estas transiciones se pueden observar por medio de la absorción de las ondas electromagnéticas de longitud centimétrica. Los niveles experimentan un desplazamiento debido a los campos que existen en la molécula. La magnitud de estos corrimientos sirve para formarse una

idea de la estructura de las moléculas. El método de investigación de la estructura molecular que se basa en el principio antedicho se conoce con el nombre de *método de la resonancia magnético-nuclear*.

Los núcleos de ciertos elementos, además del momento de espín y del magnético, tienen un momento cuadripolar eléctrico. En la orientación de este momento cuadripolar influye el campo eléctrico de la molécula. El estudio de la *resonancia cuadripolar* también sirve para juzgar sobre la estructura de las moléculas.

§ 379. Estructura de los núcleos atómicos. Inicialmente se expresó la hipótesis de que los núcleos atómicos estaban formados por protones y electrones. Parecía que la existencia de los electrones dentro del átomo estaba suficientemente justificada por el hecho de la existencia de la radiactividad β. De acuerdo con esta hipótesis había que considerar que un núcleo con número de carga Z y número de masa M constaba del siguiente número de protones (N_p) y de electrones (N_e):

$$N_p = M, \quad N_e = M - Z. \tag{1}$$

Pero esta hipótesis tropezó con grandes dificultades cuando se intentaron explicar los valores de los momentos nucleares observados. Estas dificultades se pusieron de manifiesto por primera vez al estudiar las propiedades del núcleo del nitrógeno ${}_7N^{14}$. Este núcleo se caracteriza por tener un número cuántico $I = 1$ y un momento magnético aproximadamente igual a $\frac{1}{4\,500}$ del magnetón de Bohr μ_0. Pero según (1) el núcleo ${}_7N^{14}$ debería estar constituido por 14 protones y 7 electrones. Como el número de electrones es impar (siete), sus momentos magnéticos propios μ_0 no se pueden compensar totalmente entre sí. De aquí se deduce que el momento magnético del núcleo del nitrógeno debería ser igual a una magnitud próxima al magnetón de Bohr, pero que en realidad es mucho menor. Tampoco se pudo explicar el valor de $I = 1$ para el núcleo del nitrógeno. El número total de partículas (protones y electrones) que entraban en la composición del átomo era igual a $14 + 7 = 21$, es decir, otra vez un número impar. Los momentos espinoriales propios del protón y del electrón se caracterizan por tener números cuánticos 1/2 y pueden estar orientados paralela o antiparalelamente entre sí. De aquí se deduce que el momento espinorial del conjunto del núcleo debería caracterizarse por tener un número cuántico I de valor semientero (suma algébrica del impar 1/2). Esta conclusión contradice al valor observado de $I = 1$. Posteriormente esta misma discrepancia entre las deducciones teóricas y los datos experimentales fue descubierta en el caso del deuterón (${}_1D^2$). Según los datos empíricos el deuterón tiene $I = 1$ y su momento magnético es igual aproximadamente a $\frac{1}{2\,000}$ del magnetón de Bohr. De acuerdo con el esquema (1) este núcleo debe constar de dos protones y un electrón. De aquí se deduce que para el deuterón I debería tener uno de los dos

valores 1/2 ó 3/2 y su momento magnético debería ser aproximadamente igual a un magnetón de Bohr.

Otro punto de vista sobre la estructura de los núcleos hizo su aparición después de descubrirse los neutrones. Por vez primera el físico soviético D. D. Ivanenko expuso la hipótesis de que *los núcleos están formados exclusivamente de protones y neutrones*. Estas dos partículas, como partes componentes del núcleo, recibieron el nombre de *nucleones*. La hipótesis sobre la composición de los núcleos por nucleones es la que hoy se reconoce en general. Desde el punto de vista de esta hipótesis la desintegración β resulta ser, en cierto sentido, un fenómeno secundario. Uno de los neutrones del núcleo se transforma en protón, electrón y neutrino.

Un núcleo con número de carga Z y número de masa M consta del siguiente número de protones (N_p) y de neutrones (N_n):

$$N_p = Z, \quad N_n = M - Z. \tag{2}$$

El número total de partículas (nucleones) que entran en la composición del núcleo es igual a su número de masa M. En los núcleos de los elementos ligeros el número de neutrones es igual al de protones, por ejemplo: el núcleo de ${}_2He^4$ consta de dos neutrones y dos protones; el de ${}_6C^{12}$ consta de seis neutrones y seis protones, etc. Los núcleos de los elementos medios y pesados tienen exceso de neutrones, así, el núcleo de uranio ${}_{92}U^{238}$ consta de 92 protones y 146 neutrones.

La hipótesis de que los núcleos están formados por protones y neutrones elimina la dificultad encontrada al querer explicar el valor de los momentos nucleares. Veamos lo que ocurre con el deuterón. De acuerdo con el esquema (2) el deuterón consta de un protón y de un neutrón. El valor de $I = 1$ para este núcleo se explica directamente suponiendo que los momentos espinoriales del protón y del neutrón están dirigidos paralelamente entre sí. En este caso tendremos:

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

lo que está en concordancia con los datos experimentales.

Si se supone que el momento magnético del deuterón es igual a la suma algebraica de los momentos magnéticos del protón y del neutrón (véase la tabla XXVIII) se obtiene el valor

$$\mu_D = \mu_P + \mu_n = 2{,}7895\mu_N - 1{,}9103\mu_N = +0{,}8793\mu_N.$$

Este valor de μ_D se aproxima al valor observado de $\mu_D = +0{,}8565\mu_N$. El que haya cierta discrepancia se explica por el hecho de que el deuterón no se puede considerar como un simple sistema estático de un protón y un neutrón.

Como puede verse fácilmente, de forma análoga desaparecen las dificultades relativas al núcleo de nitrógeno ${}_7N^{14}$.

El esquema (2) da la posibilidad de calcular el defecto de masa para cualquier núcleo por las masas conocidas del protón y del neutrón. Llamemos respectivamente M_p, M_n y M_A a las masas del protón, del neutrón y del núcleo que se examina, entonces para el defecto de masa verdadera ΔM tenemos:

$$\Delta M = ZM_p + (M - Z)M_n - M_A. \quad (3)$$

De acuerdo con lo expuesto en el § 367 la magnitud $W = c^2\Delta M$ de la energía de ligadura entre todas las partículas que entran en la composición de un núcleo dado. La magnitud $c^2\Delta M/M$ da la energía de ligadura calculada para una partícula. En la tabla XXIX se dan los valores de la energía total de ligadura $c^2\Delta M$ y de la energía de ligadura por partícula $c^2\Delta M/M$ para una serie de núcleos (expresadas en megaelectrón-voltios).

En la fig. 400 se representan gráficamente los valores de la energía de ligadura por partícula $c^2\Delta M/M$ para diversos núcleos. *Para*

Tabla XXIX

Energías de ligadura de los núcleos atómicos

Núcleo	$c^2\Delta M$	$c^2 M/M$
$_1D_2$	2,18	1,09
$_1T_3$	8,33	2,78
$_2He^3$	7,60	2,53
$_2He^4$	28,21	7,03
$_3Li^6$	31,81	5,30
$_3Li^7$	38,96	5,57
$_4Be^9$	57,80	6,42
$_5B^{10}$	64,29	6,43
$_5B^{11}$	75,71	6,88
$_6C^{12}$	91,66	7,64
$_6C^{13}$	96,54	7,43
$_7N^{14}$	104,10	7,44
$_7N^{15}$	114,85	7,66
$_8O^{16}$	126,96	7,94
$_9F^{19}$	146,95	7,73
$_{10}Ne^{20}$	159,85	7,99
$_{11}Na^{23}$	186,44	8,11
$_{12}Mg^{24}$	197,52	8,23
$_{26}Fe^{56}$	486,08	8,68
$_{30}Zn^{64} - Sn^{120}$	—	$\sim 8,6$
$_{92}U^{238}$	1 780	7,5

todos los núcleos de peso atómico medio la energía de ligadura por partícula tiene aproximadamente un mismo valor, que es igual a 8,6 *MeV.*

El hecho de que los valores de la energía de ligadura por partícula sean aproximadamente iguales para todos los núcleos (excepto los más ligeros) lleva a una consecuencia muy importante: en el núcleo cada partícula interacciona solamente con las partículas vecinas más próximas. Si cada una de las partículas estuviera en interacción con todas las demás la energía total de ligadura del

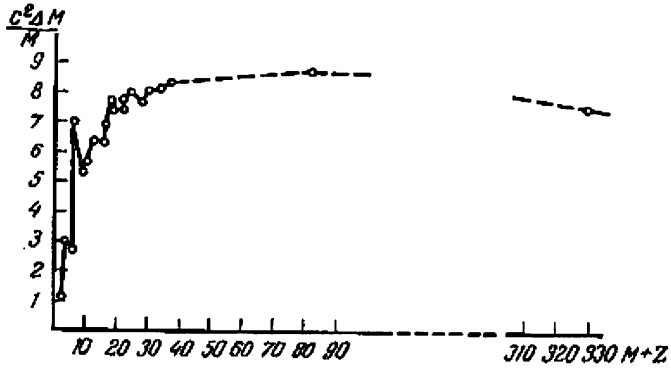

Fig. 400. Energía de ligadura por partícula en los núcleos.

núcleo sería una función cuadrática del número de partículas que hay en el núcleo, es decir, de M. Pero en realidad la energía total de ligadura crece aproximadamente de manera proporcional a la primera potencia de M.

Los experimentos demuestran también que los radios R de los núcleos son proporcionales a la raíz cuadrada del número de partículas M:

$$R = r_0 \sqrt[3]{M}, \qquad (4)$$

donde $r_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm es una constante. Esto quiere decir que las partículas están «empaquetadas» con la misma densidad en todos los núcleos. Sobre la base de todos los hechos mencionados apareció el modelo de núcleo llamado de la «*gota líquida*», desarrollado por Bohr, J. Frenkel y otros físicos. Según este modelo el núcleo está formado por partículas elementales (nucleones) de manera análoga a como una gota de líquido está formada por moléculas.

El modelo de la gota líquida permite calcular la energía de ligadura del núcleo. De acuerdo con la proporcionalidad aproximada que existe entre la energía de ligadura del núcleo y el número de partículas M, en la fórmula de la energía de ligadura W debe figurar un término $-aM$, donde a es constante (el signo menos corresponde a la atracción entre las partículas). A esta expresión

debe añadírsele un término de corrección que refleje el hecho de que los núcleos más estables son aquellos en que el número de protones es igual al de neutrones, es decir, los que tienen $M = 2Z$. Este término se puede representar de la forma $+ b\frac{(2Z - M)^2}{M}$. Teniendo en cuenta estas dos energías de interacción obtenemos para su suma la expresión:

$$W^{(\prime)} = -aM + b\frac{(2Z-M)^2}{M}. \tag{5}$$

El modelo de la gota líquida señala que los núcleos poseen una energía «superficial» análoga a la energía de la tensión superficial de las gotas líquidas. Es evidente que esta energía W_{sup} será proporcional al área de la superficie del núcleo:

$$W_{sup} = \sigma \cdot 4\pi R^2$$

donde σ es una constante. Conociendo la energía que se necesita para arrancar una partícula del núcleo se puede calcular el valor numérico de σ, que resulta ser igual a $\sigma \cong 10^{20}$ erg/cm^2. Poniendo en (6) en lugar del radio del núcleo su valor según (4); hallamos:

$$W_{sup} = N\pi\sigma r_0^2 M^{2/3}. \tag{6a}$$

Finalmente hay que tener en cuenta la energía W_C, relativa a la repulsión coulombiana de los protones. Esta energía puede calcularse y resulta ser igual a

$$W_C = \frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0}Z^2M^{-\frac{1}{3}}. \tag{7}$$

Utilizando las expresiones (5), (6a) y (7) hallamos la energía total de ligadura del núcleo:

$$W = -aM + b\frac{(2Z-M)^2}{M} + 4\pi\sigma r_0^2 M^{2/3} + \frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0}Z^2M^{-\frac{1}{3}}. \tag{8}$$

Los valores de los coeficientes a y b quedan sin determinar; pero si sus valores numéricos se hallan empíricamente para algunos núcleos y se ponen en la fórmula (8) se obtienen valores de W que concuerdan bien con los datos empíricos de los demás núcleos. (En la tabla XXIX se dan los valores *numéricos* (absolutos) de las energías de ligadura, por cuya razón se diferencian de W en el signo).

El modelo de la gota líquida permite examinar los procesos de captura de una partícula rápida por el núcleo y de desintegración posterior de este último (que tienen lugar durante las transformaciones artificiales de los núcleos) de la manera siguiente: como entre todas las partículas que hay en el núcleo existe una estrecha interacción, la energía cinética de la partícula que penetra en dicho núcleo se reparte entre todas ellas. Esto hace que el núcleo entre en un estado excitado que puede compararse con el calentamiento de una gota de líquido. L. D. Landáu demostró por primera vez que se puede hablar de «temperatura» del núcleo y de su elevación a costa de la energía de la partícula que penetra en él. Cuando la energía de excitación es de 10 MeV esta «temperatura» resulta ser igual a $\sim 10^{11}$ ° K. El proceso de la expulsión de la partícula del

núcleo excitado puede considerarse como la «evaporación». A consecuencia de la fluctuación una de las partículas del núcleo puede adquirir una energía que supere considerablemente a la energía media de las partículas del núcleo «calentado» y en estas condiciones puede vencer la tensión superficial y «evaporarse» del núcleo.

El núcleo, en cierto sentido, no sólo se puede comparar con una gota de líquido, sino también con un cristal. Lo mismo que en el cristal existe, para las partículas, una serie discreta de niveles energéticos que forman zonas determinadas (t. II, § 163), en el núcleo aparece también un gran número de niveles energéticos. Cuando las energías de excitación son pequeñas los niveles se encuentran entre sí a grandes distancias, pero a medida que aumenta la energía se van aproximando unos a otros y cuando ésta es del orden de 15 MeV representan prácticamente una región continua de estados de energía posibles. Este carácter de la distribución de los niveles se confirma con los datos experimentales. Los niveles inferiores se ponen de manifiesto durante la emisión de los rayos γ (§ 372), los superiores, situados muy próximos entre sí, durante la captura de los neutrones.

El hecho de que el núcleo esté formado por protones y neutrones indica que el papel de las fuerzas de interacción de Coulomb no es grande dentro del núcleo. Las fuerzas coulombianas se manifiestan solamente en la interacción entre los protones, y como son fuerzas de repulsión deberían dar lugar a que el núcleo se desintegrara. Las fuerzas que sujetan las partículas dentro del núcleo son las fuerzas de atracción entre neutrones y protones. Estas fuerzas disminuyen muy de prisa con la distancia, por eso se manifiestan principalmente dentro del núcleo.

Teniendo en cuenta el carácter de las fuerzas que actúan entre los protones y los neutrones se puede construir un modelo de núcleo más detallado que el de la gota líquida. Un modelo de este tipo, que recibió el nombre de *modelo nuclear de capas*, fue elaborado por M. Mayer y otros físicos. Según este modelo las partículas que forman el núcleo se encuentran situadas en diferentes capas, lo que determina la periodicidad que existe en las propiedades de los núcleos. Los núcleos en los que el número total de partículas es igual a 2, 8, 20, 50, 82 y 126 deben tener unas cualidades especiales. No obstante, la naturaleza de las fuerzas que actúan dentro de los núcleos sigue sin aclarar. Por esto la teoría del núcleo atómico se encuentra en estado embrionario y tiene que seguir desarrollándose.

§ 380. Fisión nuclear. Obtención de la reacción en cadena. El fenómeno de la fisión nuclear fue observado por vez primera en el uranio; este fenómeno puede transcurrir tanto con el núcleo en estado libre (fisión espontánea) como inducido por neutrones. La fisión espontánea fue descubierta por los físicos soviéticos K. A. Petrzhak

y G. N. Fliórov en los núcleos del $_{92}U^{238}$. Cuando ocurre esta fisión el núcleo del uranio se escinde en dos fragmentos, que son a su vez núcleos de elementos correspondientes a la parte media del sistema periódico de Mendeléiev. La fisión espontánea del uranio transcurre con mucha lentitud; la vida media de los núcleos de uranio (referida a la fisión espontánea) es igual a 10^{16} años.

La fisión de los núcleos del uranio inducida por neutrones fue descubierta como resultado de unos trabajos emprendidos en los años 1936-1937 por O. Hahn, L. Meitner y F. Strassmann con objeto de obtener artificialmente *elementos transuránicos*, es decir, elementos de $Z > 92$. Bombardeando el uranio con neutrones descubrieron que se producía radiactividad artificial (inducida) cuyos portadores no lograron identificar unívocamente durante mucho tiempo. Los numerosos experimentos realizados posteriormente permitieron establecer que el proceso observado consistía en la fisión del isótopo $_{92}U^{235}$ del uranio al anexionarse un neutrón lento. El uranio $_{92}U^{235}$ se escinde en dos fragmentos, que son núcleos de dos elementos de peso atómico medio; al producirse esta escisión surgen además tres neutrones libres. De la fisión pueden resultar distintos pares de fragmentos. Como ejemplo citaremos el proceso de fisión siguiente:

$$_{92}U^{235} + {}_0n^1 \rightarrow {}_{54}Xe^{139} + {}_{38}Sr^{95} + 2{}_0n^1.$$

Los dos núcleos, producto de la escisión, $_{54}Xe^{139}$ y $_{38}Sr^{95}$ se caracterizan por tener un exceso extraordinario de neutrones (los isótopos pesados estables del xenón y del estroncio son el $_{54}Xe^{136}$ y el $_{38}Sr^{88}$), por esto son inestables y experimentan una serie de transformaciones β sucesivas. Así, el $_{54}Xe^{139}$ lleva a la siguiente cadena de desintegraciones β:

$$_{54}Xe^{139} \xrightarrow[\beta]{} {}_{55}Cs^{139} \xrightarrow[\beta]{} {}_{56}Ba^{139} \xrightarrow[\beta]{} {}_{57}La^{139}.$$

Esta cadena termina en el isótopo estable del lantano $_{57}La^{139}$.

La fig. 401 representa la curva que expresa la cantidad (en %) de fragmentos con números másicos A diferentes que resultan de la escisión del $_{92}U^{235}$. Esta curva es simétrica con respecto a un mínimo, que corresponde a $A = 118$. De aquí se deduce que la fisión en dos fragmentos de masas iguales es menos probable que en fragmentos de masas algo diferentes. Escisiones en fragmentos de masas muy distintas (de más de 160 y menos de 76) no se producen.

La fisión del núcleo del uranio $_{92}U^{235}$ va acompañada de la liberación de una gran energía (150 *Me*V).

La valorización de la energía liberada durante la fisión se puede efectuar por medio de la fórmula (8) del § 379. El proceso de fisión consiste en que el núcleo gota en estado de excitación, inducido por el neutrón capturado, se escinde en dos gotas de dimensiones aproximadamente iguales. Como la energía

de ligadura entre las partículas es casi la misma para los núcleos pesados y para los núcleos de masas medias, la diferencia de energías entre el núcleo precursor y los dos núcleos nuevos viene determinada por los dos últimos términos de la fórmula (8) del § 379. El primero de estos términos expresa la energía superficial, que es proporcional al área de la superficie del núcleo. Supongamos que

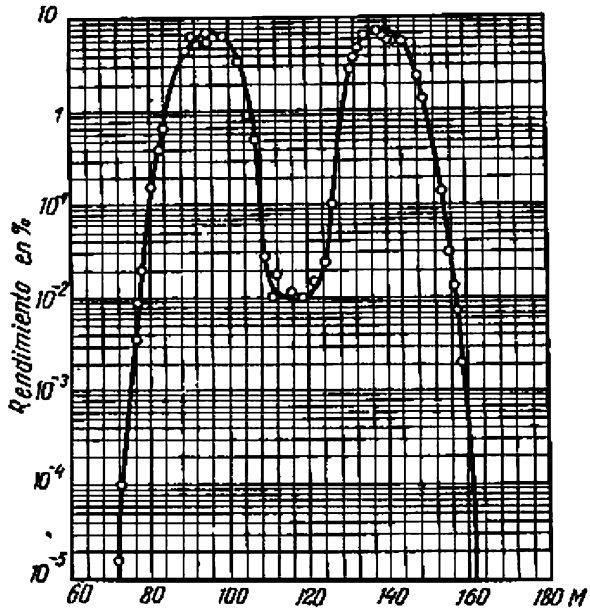

Fig. 401. Probabilidad de que aparezcan fragmentos de masas diferentes al escindirse el uranio.

el núcleo se escinde exactamente por la mitad. Llamando R al radio del núcleo precursor y R_1 al radio de los núcleos resultantes, la condición de la conservación de los volúmenes al producirse la escisión da:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\cdot\frac{4}{3}\pi R_1^3,$$

de donde para R_1 obtenemos:

$$R_1 = \frac{R}{2^{1/3}}.$$

La variación de la energía superficial, calculada por la fórmula (6) del § 379 resulta igual a

$$\Delta W_{sup} = \sigma 4\pi R^2 - 2\sigma\cdot 4\pi R_1^2 = \sigma\cdot 4\pi R^2 (1 - 2^{1/3}) \cong -0{,}26\sigma\cdot 4\pi R^2.$$

La energía superficial *aumenta* debido al aumento que experimenta la superficie del núcleo gota al escindirse en dos gotas.

El segundo término expresa la variación de la energía de las interacciones coulombianas entre las partículas del núcleo. Como quiera que esta energía

se expresa mediante el radio del núcleo y el número de carga por la fórmula $\frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{R}$, al escindirse el núcleo *disminuye* en la magnitud

$$\Delta W_C = \frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{R}\left(1-4^{-\frac{1}{3}}\right) \cong 0{,}37\cdot\frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{R}.$$

La variación total de la energía producida por la fisión (la energía liberada se considera positiva) es:

$$\Delta W \cong -0{,}26\sigma\cdot 4\pi R^2 + 0{,}37\cdot\frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{R}.$$

Esta variación será positiva o negativa en función de lo que sea mayor: la variación de la energía superficial del núcleo o la variación de la energía determinada por la interacción coulombiana entre las partículas. En los núcleos ligeros juega un papel muy importante la variación de la energía superficial, por esto la fisión de estos núcleos sólo se produce con consumo de energía. En los núcleos pesados (de gran Z) el papel más importante es la variación de la energía de las interacciones de Coulomb entre las partículas; la fisión de estos núcleos va acompañada de liberación de energía. Los cálculos correspondientes demuestran que la escisión con producción de energía ocurre en los núcleos en que $Z \simeq 90$.

El proceso de escisión de los núcleos del $_{92}U^{235}$ puede transcurrir en forma de reacción en cadena (es decir, creciente). Esto se explica por el hecho de que la escisión de un núcleo de $_{92}U^{235}$ produce, además de los fragmentos, dos o tres neutrones. Estos neutrones pueden provocar a su vez la escisión de dos o tres núcleos de $_{92}U^{235}$ y así sucesivamente. La reacción irá en aumento y en determinadas condiciones puede hacerse explosiva.

De hecho la realización de este tipo de reacción es difícil por dos causas. La primera de ellas consiste en que el uranio natural es una mezcla de dos isótopos, el $_{92}U^{238}$ y el $_{92}U^{235}$, de los cuales el $_{92}U^{238}$ (que representa una cantidad del 99% del total de la mezcla) captura la mayoría de los neutrones sin conducir a un proceso de fisión.

La segunda causa es que la escisión del $_{92}U^{235}$ es producida principalmente por los neutrones lentos, llamados «térmicos», mientras que los neutrones que resultan de la fisión son rápidos. Una parte de estos neutrones rápidos se puede escapar fuera de los límites del trozo de uranio tomado y otra parte es capturada por el $_{92}U^{238}$ (formándose el isótopo $_{92}U^{239}$). De esta forma sólo una parte de los neutrones producidos conduce a nuevos actos de fisión del $_{92}U^{235}$; el número de estos últimos neutrones puede resultar insuficiente y la reacción se interrumpe. Para mantener la reacción hay que enriquecer el uranio natural con el isótopo $_{92}U^{235}$ o retardar (moderar o «termalizar») artificialmente los neutrones.

El método de la moderación de los neutrones ha permitido realizar en los llamados reactores *de uranio* la reacción nuclear continua. Los neutrones se retardan en una sustancia cualquiera (por ejemplo, en grafito), en la cual experimentan principalmente choques elásticos. El esquema del proceso que transcurre en el reactor se muestra

en la figura 402. El neutrón n al ser capturado por el núcleo de $_{92}U^{235}$ provoca su escisión en dos fragmentos A y B y la formación de dos o tres neutrones rápidos n_1. Una parte de los neutrones que atraviesan la sustancia retardadora (moderador) son capturados por el uranio $_{92}U^{238}$ dando lugar a la formación del isótopo $_{92}U^{239}$ y otra parte vuelve a provocar la fisión del $_{92}U^{235}$, acompañada de la aparición de nuevos neutrones n_1' y así sucesivamente. En el reactor esta

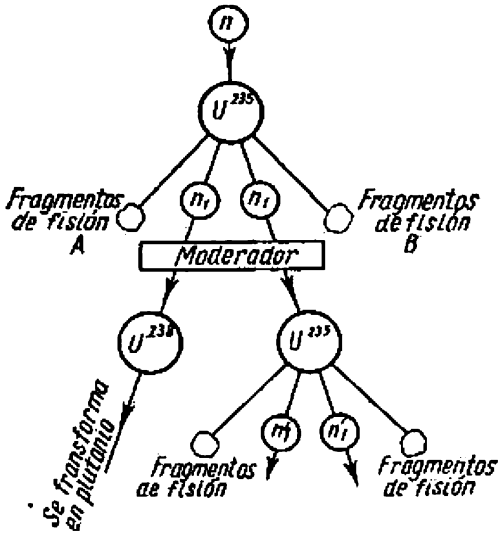

Fig. 402. Esquema del funcionamiento de un reactor de uranio.

reacción se puede desarrollar de forma estacionaria, liberándose una gran cantidad de energía. El esquema de la estructura de un reactor se muestra en el § 381.

La investigación de los procesos que se desarrollan en el reactor de uranio llevaron al descubrimiento de una serie de nuevos elementos transuránicos. Resultó que el isótopo $_{92}U^{239}$ es radiactivo β y tiene un período de semidesintegración $\tau = 23$ min. Como resultado de la desintegración β del $_{92}U^{239}$ aparece un elemento cuyo número de carga $Z = 93$ y que tiene un número de masa $M = 239$; este elemento recibió el nombre de *neptunio*. El neptunio también es radiactivo β y conduce a la formación de un nuevo elemento, el *plutonio*, cuyo número de carga es 94. El esquema completo de estas transformaciones tiene la forma siguiente:

$$_{92}U^{239} \xrightarrow{\beta} {}_{93}Np^{239} + {}_{-1}e^{0}, \quad \tau = 23 \text{ min},$$

$$_{93}Np^{239} \xrightarrow{\beta} {}_{94}Pu^{239} + {}_{-1}e^{0}, \quad \tau = 2{,}4 \text{ días}.$$

El plutonio es radiactivo α y tiene un período de semidesintegración de 24 000 años. Como resultado de su transformación α aparece el isótopo del uranio ${}_{92}U^{235}$:

$$ {}_{94}Pu^{239} \xrightarrow[\alpha]{} {}_{92}U^{235} + {}_{2}He^{4}. $$

El plutonio es susceptible de captar neutrones y escindirse, lo que da la posibilidad de utilizarlo para obtener reacciones en cadena (explosivas).

En la actualidad, además del Np y del Pu, se conocen varios elementos transuránicos: el *americio* (Am, $Z = 95$) que tiene ocho isótopos, de los que el más estable es el ${}_{95}Am^{243}$ cuyo período $\tau = 760$ años; el *curio* (Cm, $Z = 96$) que tiene siete isótopos, de los cuales el más estable es el ${}_{96}Cm^{245}$ con período $\tau = 20\,000$ años; el *berkelio* (Bk, $Z = 97$) con tres isótopos; el *californio* (Cf, $Z = 98$) que tiene ocho isótopos, el más estable de los cuales es el ${}_{98}Cf^{249}$, con un período de 500 años; el *einsteinio* (Es, $Z = 99$), que tiene cuatro isótopos; el *fermio* (Fm, $Z = 100$), con tres isótopos; el *mendelevio* (Md, $Z = 101$); el *nobelio* (No, $Z = 102$) y el *lawrencio* (o laurencio) (Lr, $Z = 103$). Todos los elementos transuránicos son radiactivos y forman parte de la familia radiactiva cuyos números de masa vienen expresados por la fórmula $4n + 1$, donde n es un número entero.

§ 381. Energética nuclear. En el párrafo anterior se dijo que las transformaciones radiactivas naturales y muchas de las reacciones nucleares provocadas artificialmente van acompañadas del desprendimiento de grandes cantidades de energía por unidad de masa de la substancia que reacciona. No obstante, las perspectivas de utilización de la energía intranuclear no estuvieron claras durante mucho tiempo. De los elementos radiactivos naturales sólo puede extraerse en cantidades considerables el uranio. Pero la potencia producida por la radiactividad natural del uranio es tan pequeña que no tiene interés práctico. Por otra parte la radiactividad artificial podía conseguirse únicamente bombardeando los átomos de los isótopos estables con partículas rápidas, con la particularidad de que los experimentos demostraron que la inmensa mayoría de las partículas (por ejemplo, las partículas α en los experimentos de Rutherford para desintegrar los núcleos) pierden energía en los choques elásticos y sólo una parte muy pequeña de ellas interaccionan tan íntimamente con los núcleos que producen su desintegración. Por esto, aunque un acto individual de desintegración puede dar ganancia de energía, la energía media que se libera en las desintegraciones es mucho menor que la energía de las partículas primarias.

La posibilidad de resolver el problema de la aplicación práctica de la energía intranuclear se puso de manifiesto cuando se descubrió la fisión nuclear y se halló el procedimiento de conseguir la reacción

en cadena. La reacción nuclear controlada y continua se realiza en los reactores nucleares. En estos reactores se emplea uranio natural o uranio enriquecido con el isótopo U^{235}. Para que se produzca la reacción nuclear es condición necesaria que el reactor contenga una cantidad suficiente de uranio. Los neutrones que se originan en la reacción nuclear pueden atravesar la superficie del uranio y escapar al exterior y, por consiguiente, dejar de tomar parte en el desarrollo

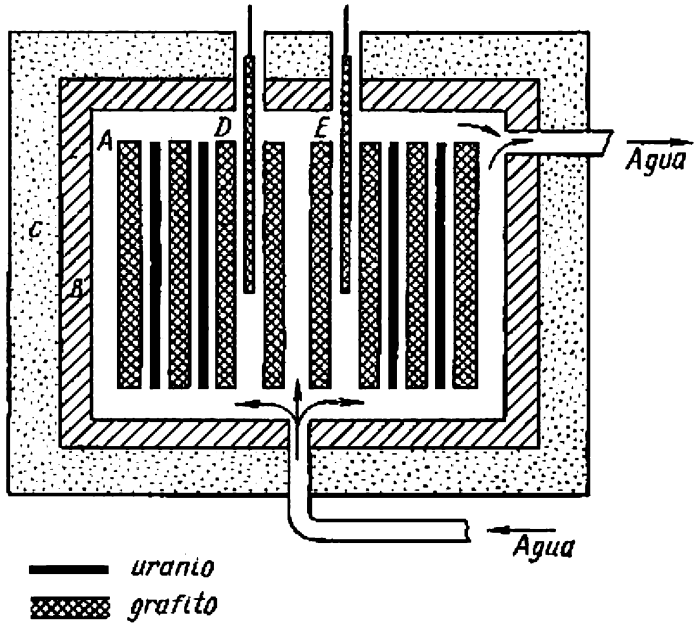

Fig. 403. Esquema de un reactor nuclear.

de la reacción en cadena. Para evitar que el número de estos neutrones sea grande, hay que procurar que la superficie del uranio sea pequeña en comparación con su volumen. Para conseguir esto, en el reactor debe haber una masa de uranio suficientemente grande, mayor que una determinada masa crítica. Por otra parte, para que la reacción no transcurra demasiado precipitadamente, hay que regular el número de neutrones y no dejar que aumente demasiado. Esto se consigue absorbiendo el excedente de neutrones térmicos por medio de elementos como el boro o el cadmio.

En la fig. 403 se reproduce el esquema de un reactor nuclear. En él *A* es el espacio en que se encuentran los bloques de uranio y el moderador (generalmente grafito); *B* es el reflector de neutrones, que sirve para hacer que parte de los neutrones escapados vuelva a la región en que transcurre la reacción; *C* es la coraza que protege el espacio circundante de la radiación que produce la reacción

nuclear; D y E son las barras de cadmio y de boro que al ser introducidas en el espacio A moderan la reacción. Estas barras se introducen automáticamente en cuanto la potencia de la reacción sobrepasa un límite determinado. El agua circula para refrigerar los bloques de uranio.

En el primer reactor soviético se empleó uranio natural y como moderador se usó grafito. Las mediciones llevadas a cabo revelaron que cuando se emplea uranio natural por cada neutrón térmico se originan en total 1,337 nuevos neutrones. Un exceso de neutrones tan reducido como éste hace que el problema de obtener una reacción nuclear continua sea bastante difícil. Este primer reactor soviético comenzó a funcionar cuando su carga alcanzó 45 toneladas de uranio. Ahora existen reactores mucho más perfectos. En los reactores también se emplean como moderadores otras sustancias, como el agua, ordinaria o «pesada», es decir, aquella en que el isótopo ligero del hidrógeno se ha sustituido por el deuterio.

Como resultado de las reacciones nucleares, en los reactores se libera una gran cantidad de calor que puede utilizarse con fines técnicos. Como es sabido, la primera central eléctrica del mundo que funcionó a base de la energía liberada en las reacciones nucleares («central atómica») fue construida en la Unión Soviética. En esta central se utiliza un reactor que funciona con uranio enriquecido con el isótopo U^{235} hasta que el contenido de éste alcanza el 5% (frente al 0,7% en el uranio natural). Con este reactor se calienta hasta alta temperatura el vapor de agua que mueve al turbogenerador. Hoy día existen en la URSS varias centrales eléctricas atómicas en explotación y otras se están construyendo. También funciona eficazmente el potente rompehielos atómico «Lenin».

Las reacciones nucleares se utilizan también en la bomba atómica. Esta bomba está construida de tal forma que hace que en un tiempo muy reducido se unan unos bloques de uranio o plutonio, cuya masa parcial es menor que la crítica, para formar una masa común mayor que la crítica. Como resultado se produce una reacción nuclear que toma el carácter de explosión.

Otro tipo de reacciones nucleares que se puede utilizar como fuente de «energía atómica» es el de fusión de núcleos ligeros en núcleos más pesados. Las reacciones de fusión se realizan en muchos casos con liberación de una cantidad de calor muy grande, debido a que entre los elementos ligeros hay algunos que se caracterizan por tener una gran energía de ligadura (el helio). Como ejemplo de reacciones de fusión nuclear con liberación de gran cantidad de energía citaremos las siguientes:

$$ {}_1D^2 + {}_1D^2 \rightarrow {}_2He^3 + {}_0n^1 + 3{,}26 \text{ MeV}, $$

$$ {}_1D^2 + {}_1D^2 \rightarrow {}_1T^3 + {}_1H^1 + 4{,}03 \text{ MeV}, $$

$$_1T^3 + {}_1D^2 \rightarrow {}_2He^4 + {}_0n^1 + 17{,}6 \text{ MeV},$$
$$_1T^3 + {}_1H^1 \rightarrow {}_2He^4 + 19{,}2 \text{ MeV},$$
$$_3Li^6 + {}_1D^2 \rightarrow 2{}_2He^4 + 22{,}4 \text{ MeV}.$$
$$_3Li^7 + {}_1D^2 \rightarrow 2{}_2He^4 + {}_0n^1 + 14{,}9 \text{ MeV}.$$

Para que comience la reacción de fusión es necesario que los núcleos se aproximen con una velocidad suficiente para vencer las fuerzas de repulsión de Coulomb. Esto se puede conseguir calentando el gas hasta una temperatura del orden de 100 millones de grados. Después la reacción continúa a costa de la energía liberada por ella misma (*reacción termonuclear*). Esta reacción, en forma explosiva, es la que se realiza en la bomba de hidrógeno, en la cual se aprovecha la fusión nuclear del deuterio y del tritio (liberándose un neutrón). La alta temperatura que se necesita para que comience la reacción se consigue haciendo explotar previamente una bomba de uranio o de plutonio, que produce una temperatura del orden de un millón de grados. También se puede utilizar la reacción

$$_3Li^6 + {}_0n^1 \rightarrow {}_1T^3 + {}_2He^4.$$

El tritio necesario para realizar la reacción termonuclear se obtiene en reactores, mediante la irradiación del litio con neutrones, según el esquema siguiente:

$$_3Li^6 + {}_0n^1 \rightarrow {}_2He^4 + {}_1T^3.$$

Especial interés tiene la realización de la *reacción termonuclear controlada*, que podría servir de fuente ventajosísima de energía para fines pacíficos. Tanto en la URSS como en muchos otros países se realizan trabajos para conseguir esta reacción. La dificultad para conseguir la enorme temperatura que se necesita para que comience la reacción termonuclear estriba, en parte, en que no existen sustancias, capaces de aguantar calentamientos de hasta millones de grados, que puedan servir para hacer los recipientes que confinen al gas calentado. Los físicos soviéticos I. E. Tamm y A. D. Sájarov propusieron la idea de que el gas calentado por una corriente eléctrica (plasma de descarga gaseosa) se podría confinar en un volumen reducido por medio de un campo magnético. Instalaciones experimentales de este tipo (conocidas con diversos nombres, como «ogra», «alfa», etc.) se estudian actualmente en toda una serie de institutos de investigación científica.

§ 382. Rayos cósmicos. Los rayos cósmicos son un flujo de partículas de extraordinaria energía que llegan a la atmósfera terrestre procedentes del espacio universal y que provocan transformaciones nucleares. A pesar de que durante estos últimos años

se ha realizado una enorme cantidad de trabajos con objeto de estudiar estos rayos, su procedencia y naturaleza no está aún completamente clara. Por esto nos ocuparemos de ellos brevemente.

En el año 1901 quedó establecido que el aire atmosférico está siempre débilmente ionizado. Esta ionización disminuye considerablemente cuando una porción de aire se encierra en un recipiente de plomo con paredes gruesas. No obstante, también en este caso se conserva la ionización, aunque en un grado muy débil. Basándose en estas observaciones se expresó la hipótesis de que la ionización se debe a los rayos γ duros que emiten los elementos radiactivos naturales, presentes siempre en la corteza terrestre en cierta cantidad. Si esta hipótesis fuese cierta la ionización del aire disminuiría con la altura. Pero las mediciones realizadas en el año 1910 durante una ascensión en globo no confirmaron estas conclusiones. Según estas mediciones la ionización disminuye solamente durante los primeros 1000 m, volviendo después a aumentar rápidamente, y a la altura de 5 000 m es tres veces mayor que junto a la superficie de la Tierra. Lanzamientos de electroscopios registradores realizados posteriormente en globos sonda, que llegaron hasta alturas de 35 km, demostraron que la ionización aumenta hasta los 20 000 metros de altura aproximadamente y después se mantiene casi constante. De aquí surgió la hipótesis de que la ionización del aire era debida a ciertas radiaciones penetrantes que llegaban a la atmósfera procedentes del espacio universal. Esta radiación recibió el nombre de *rayos cósmicos*.

Para medir el poder de penetración de los rayos cósmicos, Millican, el físico soviético L. B. Misovski y otros muchos investigadores realizaron experimentos sumergiendo electroscopios en lagos de montaña, en los que el agua no estaba contaminada por elementos radiactivos. La ionización fue observada hasta los 1 000 metros de profundidad, lo que indica el extraordinario poder de penetración de los rayos cósmicos. La intensidad de dicha ionización disminuye proporcionalmente al espesor de la capa de agua que se encuentra sobre el electroscopio; este hecho demuestra directamente que los rayos cósmicos se propagan desde las capas superiores de la atmósfera hacia abajo.

Posteriormente (en el año 1947) los rayos cósmicos fueron investigados por medio de aparatos automáticos montados en un cohete que se elevó hasta 160 km de altura. En la fig. 404 se representa la curva indicadora del número de descargas del contador (§ 370) provocadas por los rayos cósmicos a distintas alturas, hasta cerca de los 160 km. Como puede verse la curva se eleva bruscamente hasta los 20 km de altura, después baja un poco y a partir de los 50 km sigue paralela al eje de abscisas. Es evidente que las descargas del contador desde los 50 km de altura en adelante fueron provocadas por una radiación cósmica primaria de intensidad constante. El má-

ximo que se observa a los 20 km se debe a procesos secundarios que se producen en la atmósfera bajo la acción de los rayos cósmicos.

La medición de la absorción de los rayos cósmicos por el plomo dio por resultado que la intensidad de dichos rayos disminuye en un 30% aproximadamente en los primeros 10 cm de plomo. Después la absorción es más lenta; cerca de la mitad de la radiación que penetra a través de la capa de plomo de los 10 cm puede penetrar una capa de dicho metal de cerca de 1 m de espesor. De aquí se deduce que *los rayos cósmicos no son uniformes, sino que constan por lo menos de dos componentes, una menos penetrante (blanda) y otra más penetrante (dura)*.

Al principio se creyó que los rayos cósmicos eran un flujo de fotones de gran energía, es decir, que por su naturaleza se asemejaban

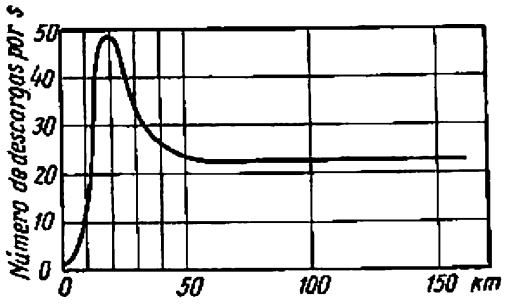

Fig. 404. Variación del número de descargas del contador en función de la altura.

a los rayos γ duros. Pero después se descubrieron hechos que hicieron cambiar de opinión.

En la actualidad se ha podido establecer sin lugar a dudas que *la parte fundamental de los rayos cósmicos primarios está formada por partículas cargadas eléctricamente* que tienen una energía enorme, del orden de 10^9—10^{11} eV y aún mayor.

La intensidad de la radiación cósmica junto a la superficie terrestre es insignificante: los rayos cósmicos originan cerca de dos pares de iones por centímetro cúbico en un segundo. Pero la energía que transporta cada partícula cósmica es tan grande (desde el punto de vista de las magnitudes atómicas) que puede provocar numerosas transformaciones nucleares. La técnica de experimentación moderna da la posibilidad de observar la acción de partículas cósmicas aisladas por medio de cámaras de Wilson, contadores y placas fotográficas de capa gruesa. El primero que fotografió las trayectorias de las partículas cósmicas valiéndose de una cámara de Wilson fue D. B. Skobeltsín (en 1929). Este mismo físico soviético intentó determinar la carga y la energía de estas partículas, situando la cámara de Wilson en un campo magnético y observando la desviación

de las trayectorias. Pero las trayectorias no experimentaron desviaciones sensibles en presencia de los campos magnéticos de que él disponía, cosa que confirmaba la opinión de que estas partículas tienen una energía muy grande. Posteriormente, utilizando campos magnéticos de hasta 20 000 oerstedios de intensidad, se consiguió observar dicha desviación.

Si R es el radio de curvatura de la trayectoria de la partícula en presencia de un campo magnético cuya intensidad sea H, se cumplirá la igualdad

$$R = \frac{cv}{\frac{e}{m} H},$$

donde e/m es la razón de la carga a la masa de la partícula y v es su velocidad. Llamando p a la cantidad de movimiento mv, obtenemos:

$$p \cdot c = eRH.$$

Por lo tanto, conociendo la carga de la partícula, por medio de R y H se puede determinar su cantidad de movimiento. Para una partícula muy rápida, a la que hay que aplicar las fórmulas de la mecánica relativista, la magnitud $p \cdot c$ es aproximadamente igual a la energía de dicha partícula W:

$$W = pc.$$

De aquí se deduce que por los resultados de las observaciones en la cámara de Wilson se puede juzgar sobre la energía de las partículas, siempre que se conozca su carga.

Para caracterizar la partícula se puede utilizar, además de la curvatura de la trayectoria R, la forma que tiene esta trayectoria en la cámara de Wilson. Cuanto mayor es la ionización que provoca la partícula por unidad de longitud de su recorrido, tanto más gruesa es la traza que deja. La teoría demuestra que la ionización que produce una partícula es directamente proporcional aproximadamente al cuadrado de su carga, e^2, e inversamente proporcional al cuadrado de su velocidad, y prácticamente no depende de su masa.

La investigación de las trayectorias de las partículas producidas por la radiación cósmica condujo a que, en el año 1932, Anderson descubriera los positrones. En las fotografías pudieron distinguirse dos huellas gemelas que el campo magnético desviaba en sentidos opuestos. La semejanza de las huellas era indicio de que estas partículas se diferenciaban entre sí únicamente por el signo de sus cargas, con la particularidad de que una de las trayectorias, por su carácter, pertenecía indudablemente a un electrón rápido. De esta forma quedó establecida la existencia de una partícula semejante al electrón pero con carga positiva (positrón). Como vimos en el § 376, los positrones fueron descubiertos después en ciertos tipos de transformaciones nucleares.

El empleo de la cámara de Wilson para observar las partículas producidas por los rayos cósmicos tenía un inconveniente importante. El fenómeno de la aparición de partículas cósmicas rápidas es rela-

tivamente poco frecuente, por esto, para descubrir estas partículas hay que hacer un gran número de fotografías, de las cuales la mayoría resultan «vanas» y solamente en algunas resultan fotografiadas por casualidad las trayectorias de las partículas. Blackett y Occhialini propusieron un perfeccionamiento de este método, que consiste en colocar la cámara de Wilson entre dos contadores. De esta forma, en la cámara se hacen las fotografías automáticamente, pero sólo cuando funcionan los dos contadores, es decir, en aquellos casos en que la partícula pasa por los dos contadores y, por consiguiente, por la cámara que hay entre ellos. Así se consiguió eliminar las fotos «vanas». Gracias a estas cámaras de acción automática se pudieron descubrir los llamados *chaparrones*, es decir, flujos compuestos por un número considerable de partículas que aparecen simultáneamente. Estos chaparrones se suelen producir en los cuerpos sólidos de gran masa, por ejemplo, en las paredes de la cámara. Si dentro de la cámara se coloca un tabique de plomo, se puede observar cómo en él se produce el chaparrón. En la foto 7 (véase el apéndice) se muestran dos vistas obtenidas en una cámara en la que había tres láminas de plomo. Una partícula cósmica, cuya trayectoria se ve arriba, provocó la formación de tres partículas rápidas en la primera lámina, las cuales a su vez originaron un gran número de partículas nuevas en las láminas siguientes. Como resultado se produjo un chaparrón en cascada.

La aparición de los chaparrones de partículas se puede explicar de la forma siguiente: toda partícula rápida cargada, por ejemplo, un electrón, experimenta dos clases de pérdidas de energía: a) *pérdidas por ionización*, que hacen que se ionicen las partículas junto a las cuales pasa, y b) *pérdidas por radiación*, debido a que al pasar junto a los núcleos experimenta una aceleración en presencia de sus campos magnéticos y radia. Si la velocidad de la partícula es grande, su radiación será bastante dura, es decir, estará formada por fotones γ de gran energía. Si la energía de uno de estos fotones es mucho mayor que la magnitud $2m_0c^2$, donde m_0 es la masa en reposo del electrón, este fotón al moverse por una sustancia puede originar un par positrón-electrón de gran energía (§ 376). Cada una de estas partículas, positrón y electrón, radia un fotón γ, los cuales a su vez originan otros pares y así sucesivamente. Este proceso de aparición de nuevas partículas continuará mientras la energía de los electrones que surgen no sea menor que cierta energía crítica. El chaparrón no es más que el conjunto de todas estas partículas.

Las pérdidas de energía por radiación y la probabilidad de que se originen pares son proporcionales al cuadrado del número de carga, Z^2, de los átomos de la sustancia a través de la cual penetra la radiación. El estudio de la absorción de los rayos cósmicos por distintas sustancias demostró que esta dependencia es justa para la componente blanda. Por esto se puede considerar que *la componente blanda de*

los rayos cósmicos está formada por electrones y positrones y por los fotones y que ellos mismos emiten.

La absorción de la componente dura da otras regularidades. Esta absorción depende exclusivamente del número de electrones que hay en la capa de la sustancia absorbente. Esto indica que la componente dura experimenta únicamente pérdidas de energía por ionización. La cuestión de cuál es la naturaleza de las partículas que forman la componente dura no pudo esclarecerse durante mucho tiempo. Solamente después de los trabajos realizados durante los años 1936—1937 quedó establecido que esta componente está constituida por un tipo especial de partículas que recibieron el nombre de *mesones*.

Recientemente, como resultado de las observaciones llevadas a cabo por N. A. Dobrótin y V. I. Véksler se ha descubierto la formación de chaparrones de partículas bajo la influencia de interacciones no electromagnéticas entre las partículas cósmicas y los núcleos de los átomos (chaparrones de «núcleos y electrones»).

§ 383. Mesones. Origen de los rayos cósmicos. Las pérdidas de energía por radiación son inversamente proporcionales al cuadrado de la masa de la partícula. Por esto los electrones y positrones «ligeros» experimentan siempre grandes pérdidas de energía por radiación y no pueden formar la componente dura de los rayos cósmicos. Los protones «pesados» radian muy poco, por lo que se podía suponer que dicha componente dura consta de protones de gran energía. Pero una serie de hechos contradicen esta hipótesis o por lo menos indican que la componente dura no está formada solamente por protones. Es el caso que las fotografías tomadas por medio de la cámara de Wilson indican que en la componente dura existen huellas de partículas que en presencia de un campo magnético se desvían en distintos sentidos, es decir, de partículas cargadas positiva y negativamente. Además, los protones rápidos ionizan más el aire y producen huellas más gruesas. Pero en realidad las huellas de las trayectorias seguidas por las partículas que forman la componente dura tienen un aspecto intermedio entre las que dejan los electrones y los protones. Esto hizo suponer que en la componente dura existen partículas cuya masa tiene un valor intermedio entre la del protón y la del electrón. Estas partículas recibieron el nombre de *mesones* (del griego «mesos», que significa «medio» o «intermedio»). La masa del mesón, de acuerdo con lo establecido como resultado de los trabajos realizados por Anderson, Neddermeyer y otros, es igual aproximadamente a 200—300 masas del electrón. Los mesones pueden ser positivos y negativos; el valor absoluto de la carga del mesón es igual al de la carga del electrón $|e|$. La energía media de los mesones al nivel del mar es $\sim 3 \cdot 10^9$ eV, pero los hay con energías de 10^{10} eV y mayores. En la actualidad se están realizando numerosas

investigaciones sobre las propiedades de los mesones. Una parte considerable de estas investigaciones corresponde a los físicos soviéticos.

Los mesones, lo mismo que los electrones rápidos, pueden producir chaparrones. En la foto 8 (véase el apéndice) se reproducen dos vistas obtenidas con la cámara de Wilson de un chaparrón producido por mesones. La cámara está dividida por tres tabiques de plomo. El mesón (la huella única de la parte superior) pasó a través de la primera lámina sin perder casi energía; en la segunda produjo el chaparrón. Este último está formado por partículas muy penetrantes, la mayoría de las cuales pasa a través de la tercera lámina sin que se aprecien pérdidas de velocidad. Algunas de estas partículas dan lugar a la formación de chaparrones secundarios pequeños en la tercera lámina.

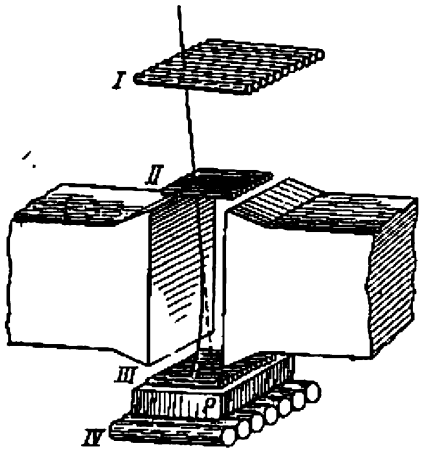

Fig. 405. Esquema del aparato de A. I. Alijánov y A. I. Alijanián para determinar la masa de las partículas cósmicas.

Los chaparrones originados por los mesones son de dos tipos: a) *chaparrones de ionización*, producidos por los electrones rápidos que los mesones arrancan de los átomos, y b) *chaparrones de radiación*, debidos a que los mesones, cuando pasan junto a los núcleos, emiten rayos γ muy duros; estos últimos dan lugar a la aparición de pares electrón-positrón y a que se produzcan los chaparrones.

En los años 1946-1947 A. I. Alijánov, A. I. Alijanián y sus colaboradores realizaron numerosos experimentos para medir la masa de las partículas cósmicas en el monte Alagues, a una altura de 3250 m sobre el nivel del mar. El aparato que emplearon para estas investigaciones se reproduce esquemáticamente en la fig. 405. Tres filas de contadores *I*, *II* y *III* (cada contador tiene forma de tubo) van unidos entre sí según un esquema de coincidencia. Un dispositivo radiotécnico a propósito hace que unas lámparas de neón produzcan destellos cuando las partículas pasan por los tres sistemas de contadores. Estas lámparas indican a través de qué contadores pasó la partícula. Entre los sistemas de contadores *II* y *III* se encuentran los polos de un potente imán. La trayectoria de la partícula entre los sistemas de contadores *I* y *II* es rectilínea. Si no existiera el campo magnético la partícula continuaría moviéndose en línea recta

(línea de puntos de la fig. 405). Pero en presencia del campo magnético la trayectoria toma la forma de arco de circunferencia cuyo radio de curvatura se puede determinar, puesto que se sabe a través de qué contador de la fila *III* pasó la partícula. Debajo de la fila de contadores *III* se encuentra una placa de plomo y una *IV* fila de contadores. Esta parte complementaria del aparato tiene por objeto determinar el poder de penetración de las partículas que se observan. Conociendo la curvatura de la trayectoria de la partícula y su poder de penetración se puede hallar su masa.

En la actualidad ha quedado establecido que existen varios tipos de mesones: *mesones* μ (*muones*), que pueden tener cargas positivas y negativas; *mesones* π (*piones*), que pueden ser positivos, negativos y neutros. Estos mesones tienen las masas siguientes:

Mesón	Masa con respecto a la del electrón
$\mu^{\mp}$	206,7
$\pi^{\mp}$	273,2
π^{0}	264,2

Existe además el mesón pesado o *mesón K* (positivo, negativo y neutro), que tiene una masa de cerca de 966 masas de electrón, y los *hiperones* (partículas Λ, Σ y Ξ), cuyas masas son iguales a 2180-2580 masas del electrón.

El estudio ulterior de las propiedades de los mesones reveló que estas partículas son inestables y se desintegran. Esta desintegración fue descubierta por medio de fotografías hechas en la cámara de Wilson por el método de las placas de capa gruesa. La vida del mesón se midió por medio del artificio que esquemáticamente se reproduce en la fig. 406. Una fila de contadores detecta el paso del mesón, que después se frena en la placa de plomo *P*. Como resultado de la desintegración del mesón aparece una nueva partícula que sigue la trayectoria *DF* y es registrada por la fila de contadores *B*. Con un dispostivo radiotécnico especial se puede medir el «retraso» con que sale la nueva partícula.

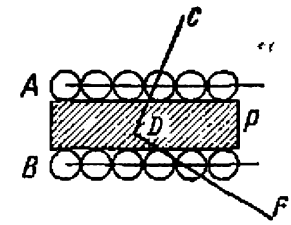

Fig. 406. Determinación de la vida del mesón.

Para el estudio de las propiedades de los mesones resultó ser muy eficaz el método de las placas fotográficas de capa gruesa, que como dijimos en el § 370 fue llevado a la práctica y utilizado por vez primera por los físicos soviéticos L. V. Misóvski y A. P. Zhdánov.

La transformación del mesón π en mesón μ se puede descubrir por las huellas que dejan en la capa fotográfica gruesa.

Los mesones $\mu^{\mp}$ se disgregan en un electrón (positrón) y dos neutrinos. Los mesones cargados $\pi^{\mp}$ se disgregan en mesones $\mu^{\mp}$

y neutrinos y los mesones neutros π^0 lo hacen en dos fotones:

$$\mu^{\mp} \rightarrow {}_{\mp 1}e^0 + 2\,{}_0\nu^0 + 105{,}6 \text{ MeV}; \quad \tau = 2{,}15 \cdot 10^{-6} \text{ s},$$
$$\pi^{\mp} \rightarrow \mu^{\mp} + {}_0\nu^0 + 34{,}0 \text{ MeV}; \quad \tau = 2{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ s},$$
$$\pi^0 \rightarrow 2 \cdot h\nu\,(67{,}5 \text{ MeV}); \quad \tau = 10^{-14} \text{ s}.$$

Como quiera que los mesones $\pi^{\mp}$ se transforman en mesones $\mu^{\mp}$, que no son estables, los productos finales de esta desintegración también son electrones (positrones) y neutrinos:

$$\pi^{\mp} \rightarrow \mu^{\mp} + {}_0\nu^0 \rightarrow {}_{\mp 1}e^0 + 2\,{}_0\nu^0 + {}_0\nu^0.$$

Los mesones pesados también son inestables y su desintegración dura 10^{-8}—10^{-10} s. Los mesones $K^{\pm}$ se desintegran en mesones $\mu^{\pm}$ y $\pi^{\pm}$; los hiperones en protones, neutrones, mesones π^- y π^0 y neutrinos. La vida de los mesones en general es muy corta.

Una característica muy importante de las partículas elementales es la magnitud de su espín. El espín de los mesones π es igual a cero; el de los mesones μ, lo mismo que el de los protones y neutrones, es igual a 1/2.

Los mesones pueden provocar transformaciones nucleares cuando chocan con los núcleos de los átomos. Puede servir de ejemplo la desintegración del núcleo del carbono inducida por un mesón negativo π^-

$${}_6C^{12} + \pi^- \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^4 + {}_1H^3 + {}_0n^1.$$

Del choque de un mesón π^- con un protón pueden resultar un neutrón y un mesón neutro:

$$\pi^- + {}_1H^1 \rightarrow {}_0n^1 + \pi^0.$$

Los mesones π presentan gran actividad nuclear, es decir, producen fácilmente reacciones nucleares. El mesón π puede penetrar en el núcleo, lo que produce el «estallido» de éste, es decir, su desintegración en un gran número de partículas independientes. A. P. Zhdánov observó, por medio de placas fotográficas de capa gruesa, la formación de «estrellas», es decir, de un gran número de trayectorias de partículas que partiendo de un punto se separan en distintas direcciones. En unos casos consiguió registrar 47 trayectorias divergentes de un punto y en otros 35 trayectorias. Como en la composición de la emulsión fotográfica entra plata, cuyo número de carga es 47, y bromo, con número de carga 35, la aparición de las estrellas se puede considerar como la destrucción total de estos elementos producida por la acción de partículas cósmicas de energía extraordinariamente grande. P. I. Lukirski y N. A. Perfílov, estudiando las huellas dejadas en las placas de capa gruesa, establecieron que cuando un mesón negativo penetra en el núcleo de un átomo es

capaz de producir su estallido; en este caso el núcleo se fracciona en los protones y neutrones que lo componen.

Los mesones μ, a diferencia de los π, son partículas que no presentan actividad nuclear. Hasta ahora no se ha registrado ningún caso de desintegración nuclear provocada por mesones μ.

La existencia de partículas con enorme energía se confirma por el hecho de que en algunas ocasiones (muy raras) se producen chaparrones grandiosos que abarcan superficies de decenas de millares de metros cuadrados. La energía de una partícula capaz de producir un chaparrón semejante debe ser no menor de $10^{15} \sim 10^{17}$ eV.

La absorción anormalmente grande de los mesones por la atmósfera es una confirmación de que la desintegración de los mesones existe. La absorción de mesones que se observa en el espesor de la atmósfera es mayor que la absorción de mesones calculada para capas de plomo u otras sustancias densas. Esto se explica por el hecho de que durante el tiempo que los mesones se mueven en la atmósfera una parte de ellos se desintegra. Comparando el coeficiente de absorción de mesones medido en una capa determinada de la atmósfera (de 2 km de espesor, por ejemplo) con el coeficiente esperado (calculado) se puede hallar la vida media de los mesones. Los resultados obtenidos de esta forma resultan mayores que la vida media de los mesones medida directamente. Esto se debe a que lo que se mide directamente es la vida media de los mesones *estancados* en la capa de plomo, es decir, de mesones que prácticamente están en reposo con respecto al sistema de coordenadas en que se mide el tiempo. Pero en la atmósfera el mesón se mueve con una velocidad próxima a la de la luz. Por esto hay que hacer la «corrección» del tiempo de acuerdo con las fórmulas de transformación de la teoría de la relatividad (§ 298). Cuando se hace esta corrección, los τ medidos por ambos procedimientos coinciden bastante bien. Como vemos, la observación de los mesones rápidos permite comprobar la veracidad de las fórmulas de la transformación del tiempo de la teoría de la relatividad.

Finalmente tocaremos de manera sucinta el problema de la procedencia de los rayos cósmicos. El hecho de que la vida de los mesones sea tan corta demuestra que estas partículas no pueden ser primarias; éstas son partículas que se originan en la atmósfera bajo la influencia de otras partículas. Como la energía media de los mesones al nivel del mar es de cerca de $3 \cdot 10^9$ eV, está claro que la energía de las partículas primarias no puede ser de magnitud menor que ésta.

Datos esencialmente nuevos sobre los rayos cósmicos son los obtenidos por medio de los satélites artificiales de la Tierra y de los cohetes cósmicos. Sobre la base de las mediciones de los campos magnéticos y de la acción ionizante de las partículas, llevadas a cabo por los cohetes cósmicos soviéticos lanzados el 2 de enero y el 12 de noviembre de 1959 y de las observaciones realizadas por medio de los

cohetes norteamericanos, se ha podido establecer que *la esfera terrestre está rodeada por dos cinturones o fajas de radiación* situadas cerca del plano ecuatorial (fig. 407). El cinturón interior comienza a una distancia de cerca de 1000 km sobre la superficie de la Tierra. En el cinturón exterior la densidad máxima de partículas cargadas corresponde a una distancia de 26 000 km del centro de la Tierra; el cinturón exterior se extiende aproximadamente hasta una distancia de 55 000 km del centro de la Tierra. Estos cinturones están formados por partículas cósmicas cargadas capturadas y retenidas por el campo magnético de la Tierra. Este campo magnético forma

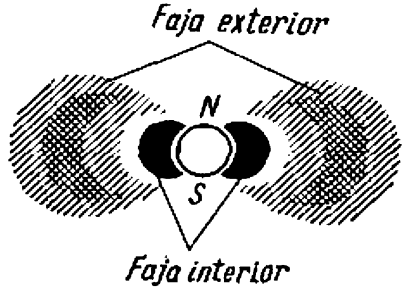

Fig. 407. Cinturones de radiación en torno a la Tierra.

alrededor de la Tierra una especie de «trampa» que retiene la radiación cósmica primaria. Las partículas que entran en la composición del cinturón radiactivo interior son principalmente protones con energías de hasta 10^8 eV; en el cinturón exterior existen electrones de diversas energías.

La densidad de las partículas cósmicas primarias fuera de los límites de los cinturones de radiación no es grande, representa aproximadamente 2,3 partículas/cm^2·s. Los rayos cósmicos primarios están formados aproximadamente por un 80% de protones y cerca de un 20% de partículas α (núcleos de helio); el número de núcleos más pesados que el del helio no excede de un 1%, con la particularidad de que el porcentaje de los núcleos de $Z \geqslant 30$ no es mayor de 0,001%. En los rayos cósmicos primarios existen, por lo visto, fotones, pero la parte de la energía que a ellos les corresponde es muy pequeña. La radiación que llega a la superficie de la Tierra tiene carácter secundario.

Las primeras teorías sobre el origen de los rayos cósmicos tuvieron que tener en cuenta el hecho de que estos rayos inciden sobre la superficie de la Tierra regularmente en todas las direcciones. De aquí parecía deducirse que el origen de los rayos cósmicos no tenía relación con ningún proceso determinado que tuviera lugar en el Sol o en algunas estrellas. Ya. P. Terletski expuso la hipótesis

de que las partículas cargadas son aceleradas por el campo magnético que aparece en torno a las estrellas como consecuencia de que tienen un momento magnético y de que giran alrededor de un eje que no coincide con el del momento magnético. Una estrella de este tipo se asemeja a un betatrón natural grandioso.

Otro posible mecanismo de aceleración fue propuesto por Fermi. Según su teoría, las partículas toman su energía cinética de la sustancia interestelar durante las interacciones con los campos magnéticos que producen las nubes de gas intensamente ionizadas que se mueven en nuestra Galaxia.

El descubrimiento de los cinturones de radiación ha demostrado que la uniformidad que, en cuanto a dirección, tienen los rayos cósmicos junto a la superficie de la Tierra es de origen secundario. Los rayos cósmicos primarios pueden llegar irregularmente de distintas partes del Universo. También son posibles las irregularidades de la radiación con respecto al tiempo. Así, el 12 de setiembre de 1959 se registró un aumento considerable del número de partículas pesadas, debido a dos erupciones cromosféricas solares. Parece ser que en el Sol se desarrollan procesos en los cuales los núcleos de los átomos se aceleran hasta energías superiores a $1{,}5 \cdot 10^9$ eV/nucleón. Lo más probable es que las fuentes principales de rayos cósmicos sean las explosiones que ocurren en las estrellas («novas» y «supernovas»).

§ 384. Propiedades de las partículas elementales. La creación de grandes aceleradores, capaces de comunicar a las partículas energías de hasta centenares y millares de megaelectrón-voltios, ha permitido obtener artificialmente toda una serie de partículas nuevas y estudiar sus propiedades. Estas nuevas partículas, junto con las que antes se conocían (electrones, protones, etc.) se unen bajo la denominación común de partículas elementales. La denominación de «partículas elementales» no se puede considerar como científica, puesto que, en primer lugar, todas estas partículas se transforman unas en otras y, en segundo, por lo menos una parte de ellas pueden considerarse probablemente como estados distintos de unas mismas partículas. Como son muchos los experimentos que se realizan, nuestros conocimientos sobre las partículas elementales se enriquecen muy de prisa y su teoría se elabora intensamente. No obstante, estos conocimientos son por ahora muy incompletos. En este párrafo expondremos brevemente las propiedades de las partículas elementales tal y como se conciben en la Física moderna.

Ante todo hay que señalar el descubrimiento de los positrones y antiprotones, que pueden considerarse como «antipartículas» con respecto a los electrones y protones. Sobre el descubrimiento de los positrones hablamos ya con bastante detenimiento en el § 376. Los primeros datos experimentales sobre la existencia de los antiprotones

fueron obtenidos por Lawrence, Segré y un grupo de investigadores en el año 1955. Bombardeando con protones muy rápidos, cuya energía era de 630 MeV, un blanco de cobre, aparecían (además de mesones π) antiprotones. Los antiprotones son partículas estables (si no sufren choques con otras partículas).

Parece ser que la existencia de antipartículas es un fenómeno general y que cada partícula elemental tiene su antipartícula. *La partícula se diferencia de la antipartícula por el signo de su carga y por la dirección del momento magnético con respecto al momento mecánico (espín).* En todo lo demás la partícula y la antipartícula son idénticas: tienen la misma masa, el mismo valor del espín y los mismos valores numéricos de la carga y del momento magnético. Si en una sustancia cualquiera todas las partículas fueran sustituidas por antipartícula, las propiedades de dicha sustancia no cambiarían.

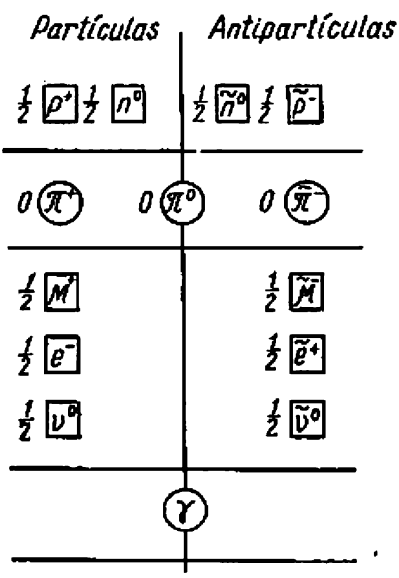

Fig. 408. Esquema de las partículas y antipartículas elementales.

Si carecen de carga eléctrica, la partícula y la antipartícula se diferencian entre sí exclusivamente por la dirección de sus momentos magnéticos. Pueden servir de ejemplo el neutrón y el antineutrón. El neutrón tiene un momento espinorial igual a 1/2 y un momento magnético igual a $-1{,}9\ \mu_N$, donde μ_N es el «magnetón nuclear» (§ 378). El antineutrón tiene un momento espinorial igual a 1/2 y un momento magnético igual a $+1{,}9\ \mu_N$. Si son iguales a cero la carga y el momento, la partícula y la antipartícula coinciden (mesones π^0, fotones). En la fig. 408 se comparan las propiedades de catorce partículas y antipartículas. El valor del espín se indica a la izquierda del símbolo de la partícula. Las partículas cuyo espín es igual a cero o a un número entero cumplen la estadística de Bose-Einstein («bosones», se representan en forma de círculos) y las partículas que tienen espín semientero cumplen la estadística de Fermi («fermiones», se representan en forma de cuadrados). Los símbolos del mesón π^0 neutro y del fotón (γ), para los que la partícula y la antipartícula coinciden, se representan sobre la línea vertical que separa las partículas de las antipartículas. De las partículas señaladas en la fig. 408, los protones y los electrones (y sus antipartículas) son estables; los mesones son inestables, se disgregan espontáneamente

y tienen una vida muy corta; los neutrones se disgregan en un protón, un electrón y un neutrino; su vida dura cerca de 18 min.

En el § 376 indicamos que los electrones al unirse con los positrones («aniquilación») se transforman en dos fotones, teniendo cada uno de ellos una energía $\geqslant$0,511 MeV. La energía de 0,511 MeV, de acuerdo con la correlación de Einstein entre la masa y la energía, corresponde a la masa en reposo del electrón multiplicada por el cuadrado de la velocidad de la luz: m_0c^2. Al parecer, este proceso de «aniquilación» ocurre también con cualquier par partícula-antipartícula:

$$\text{partícula} + \text{antipartícula} \rightarrow 2h\nu$$

cuya energía $h\nu \geqslant m_0c^2$, siendo m_0 la masa en reposo de la partícula. En la tabla XXX se dan los valores de m_0c^2 para una serie de partículas.

Tabla XXX

Energía equivalente a la masa en reposo de la partícula

Partícula	Energía m_0c^2 en MeV
Electrón (positrón)	0,511
Protón (antiprotón)	938,2
Neutrón (antineutrón)	939,5
Mesón $\mu^{\pm}$	105,6
Mesón $\pi^{\pm}$	139,6

El proceso inverso, es decir, de generación de partículas a costa de un fotón, también es posible:

$$h\nu \rightarrow \text{partícula} + \text{antipartícula (si } h\nu \geqslant 2m_0c^2).$$

Como indicamos en el § 376, la formación de pares electrón-positrón por un fotón tiene lugar cerca de los núcleos pesados. La probabilidad de que se forman pares electrón-positrón cuando la energía del fotón tiene el valor umbral ($h\nu = 2m_0c^2 = 1{,}02$ MeV) es pequeña; esta probabilidad aumenta rápidamente al aumentar la energía del fotón, en cuyo caso se forman un electrón y un positrón rápidos.

Si se trata de partículas pesadas (protón y antiprotón), es más probable que ocurra un proceso de transformación en dos mesones π^0 neutros que el de transformación en fotones, en este caso: protón + antiprotón $\rightarrow 2\pi^0$.

Cuando chocan partículas elementales rápidas se realizan transformaciones mutuas; por ejemplo, al bombardear blancos con protones de energía igual a 680 MeV se observan las reacciones siguientes:

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+,$$
$$p + n \rightarrow p + p + \pi^-.$$

En las transformaciones se cumplen siempre las leyes de la conservación de la energía, de la cantidad de movimiento, del momento de la cantidad de movimiento y de la carga. De estas leyes se pueden sacar una serie de conclusiones generales. Por ejemplo, de la ley de la conservación de la carga se deduce que las partículas neutras solamente pueden originar pares de partículas cargadas, de forma que la suma de sus cargas sea igual a cero. De la ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento se deduce que las partículas con espín entero («bosones») pueden originar solamente un número par de partículas de espín semientero («fermiones»), etc. Pero la posibilidad de que se realicen unas u otras transformaciones no viene determinada exclusivamente por la condición de que se cumplan las leyes de conservación antedichas. Durante los últimos años se vienen haciendo muchos intentos de explicar la causa de por qué algunas de estas transformaciones se realizan y otras no. Estos intentos han llevado a la introducción de toda una serie de conceptos nuevos.

La transformación de las partículas elementales se produce como resultado de sus interacciones. Por esto tiene gran interés en primer lugar poner en claro qué género de interacciones entre las partículas es el que da lugar a sus transformaciones. La Física moderna considera tres tipos de transformaciones de esta clase con la particularidad de que a cada una de ellas le corresponde un tiempo característico, que determina el lapso de tiempo durante el cual se efectúa la transformación.

La interacción más fuerte es la que tiene lugar entre los mesones π y los protones o neutrones. A esta interacción la llamaremos *fuerte o piónica*; su tiempo característico es de 10^{-23} s. La gran magnitud de esta interacción lleva consigo grandes fuerzas nucleares y un desarrollo rápido de las transformaciones correspondientes. La interacción siguiente por su magnitud es la *electromagnética*, es decir, la interacción entre un campo magnético y las partículas cargadas. Esta interacción es aproximadamente 100 veces menor que la piónica. Su tiempo característico es de 10^{-20}—10^{-21} s. Finalmente, la tercera interacción se llama *débil* (o *interacción de Fermi*). Esta es la interacción que existe entre el protón, neutrón, electrón y neutrino (o las antipartículas correspondientes) y se pone de manifiesto durante la desintegración β. Es aproximadamente 10^{12} veces más débil que la interacción electromagnética y a ella responde

un tiempo característico del orden de 10^{-8}—10^{-9} s. La interacción débil se manifiesta también durante la disgregación del mesón μ: $\mu^{\pm} \to e^{\pm} + \nu + \tilde{\nu}$. Esta interacción liga únicamente las partículas sometidas a la estadística de Fermi («fermiones»).

Las fuerzas que sujetan a los protones y neutrones (nucleones) dentro del núcleo se deben a la interacción fuerte. Desde el punto de vista de la teoría moderna esta interacción está determinada por un «intercambio» de mesones π (por eso se llama también «piónica»). La teoría y la experimentación demuestran que las fuerzas de interacción entre los pares protón-protón, protón-neutrón y neutrón-neutrón son iguales entre sí con un alto grado de exactitud. Las masas del protón y del neutrón también se diferencian poco entre sí. La diferencia principal entre el protón y el neutrón es que el primero tiene carga y el segundo no. Por esto *el protón y el neutrón se pueden considerar como dos estados diferentes de una misma partícula, el nucleón.* Si el nucleón se encuentra en un estado de carga +1 (en unidades de carga iguales al valor absoluto de la carga del electrón), es un protón; si la carga del nucleón es igual a cero, es un neutrón. La diferencia relativamente pequeña que existe entre las masas del protón y del neutrón tiene un origen electromagnético. La energía de las partículas cargadas se diferencia de la energía de las partículas neutras, por esto su masa también es distinta. Pero como la interacción electromagnética es pequeña en comparación con la interacción fuerte principal que existe entre los nucleones, la diferencia entre sus masas es insignificante.

De forma análoga los mesones π cargados y neutros se pueden considerar como estados distintos de una misma partícula y la pequeña diferencia que existe entre las masas de los mesones cargados y neutros se puede explicar por la interacción electromagnética. De las partículas que pueden considerarse como una misma, que se encuentra en estados diferentes de carga eléctrica, se suele decir que forman un «*multiplete de carga*».

Los diferentes estados de una partícula perteneciente a un mismo «multiplete de carga» se pueden caracterizar por medio de una magnitud llamada «*espín isotópico*». Esta magnitud tiene carácter formal y en su denominación la palabra «isotópico» significa que se refiere a partículas elementales cuyas masas se diferencian poco (y no a los isótopos en el sentido ordinario de la palabra), y la palabra «espín», que se caracteriza por tener propiedades que formalmente coinciden con las del espín. El valor del espín isotópico I*) se elige de forma que el número de miembros del multiplete de carga sea igual a $2I + 1$. A cada uno de los miembros del multiplete le corresponden distintas «proyecciones» del espín isotópico I_z, que toman valores que se diferencian entre sí en una unidad. Así, a los mesones π

*) También se suele designar por T. (*N. del T.*)

(piones) se les atribuye el valor del espín isotópico $I = 1$; en este caso I_z toma los valores de $+1$, 0 y -1, el primero de los cuales responde a la existencia del mesón π^+, el segundo a la del mesón π^0 y el tercero a la del mesón π^-.

La introducción del concepto de espín isotópico se justifica por el hecho de que en las transformaciones de las partículas elementales se cumple la ley de la conservación del espín isotópico. Según esta ley, el espín isotópico total (de todas las partículas que toman parte en la transformación) y su proyección no varían como resultado de la reacción. La ley de la conservación del espín isotópico se cumple únicamente cuando la interacción es fuerte, por esto, a las partículas entre las cuales existe una interacción débil (electrones, positrones y muones) no tiene sentido atribuirles un espín isotópico.

Finalmente, de manera muy breve nos detendremos en los mesones K y en los hiperones. A partir del año 1952, como resultado del estudio de los rayos cósmicos y de las transformaciones provocadas artificialmente por medio de potentes aceleradores, quedó establecida la existencia de siete nuevas partículas por lo menos ($K^{\pm}$, K^0, Λ, $\Sigma^{\pm}$, Ξ). Estas partículas pusieron de manifiesto unas propiedades tan extrañas al aparecer y al desintegrarse que fueron llamadas «*partículas extrañas*».

Los hiperones y los mesones K aparecen al chocar los mesones π rápidos con los protones. Por ejemplo, bombardeando con mesones π^-, cuyas energías sean del orden de 10^9 eV, un blanco que contenga gran cantidad de protones, se produce el proceso siguiente:

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda.$$

Como puede verse, aquí aparecen dos partículas nuevas, K^0 y Λ.

La primera cosa extraña de estas partículas nuevas es que siempre surgen a pares, aunque ninguna de las leyes de la conservación prohibe que aparezcan independientemente. La segunda cosa extraña consiste en lo siguiente: el proceso de la aparición de los pares de nuevas partículas se realiza inducido por el impacto de un mesón π, es decir, bajo la influencia de una interacción fuerte y, de acuerdo con esto, transcurre con mucha rapidez (del orden de 10^{-23} s). El hiperón que aparece es inestable y se desintegra volviendo a generar mesones π. Por ejemplo, el hiperón Λ se desintegra según uno de los esquemas siguientes:

$$\Lambda \rightarrow \pi^- + p \quad \text{ó} \quad \Lambda \rightarrow n + \pi^0.$$

Como quiera que de la desintegración resultan piones, el proceso, al parecer, debería volver a ser el correspondiente a las interacciones fuertes y transcurrir rápidamente (en un tiempo del orden de 10^{-23} s). Pero en realidad el tiempo que dura la desintegración del hiperón Λ es mucho mayor (del orden de 10^{-10} s).

Esta diferencia entre los tiempos en que transcurren los procesos de aparición y desintegración de las partículas extrañas se debe, al parecer, a que estos dos procesos son producidos en realidad por dos interacciones distintas. La aparición de las partículas se realiza bajo la influencia de las interacciones fuertes, cumpliéndose la ley que prohíbe la aparición de una sola partícula, por lo que éstas aparecen por pares. El proceso de desintegración de una sola partícula se realiza en cambio bajo la influencia de una interacción débil y, de acuerdo con esto, mucho más lentamente.

APENDICE

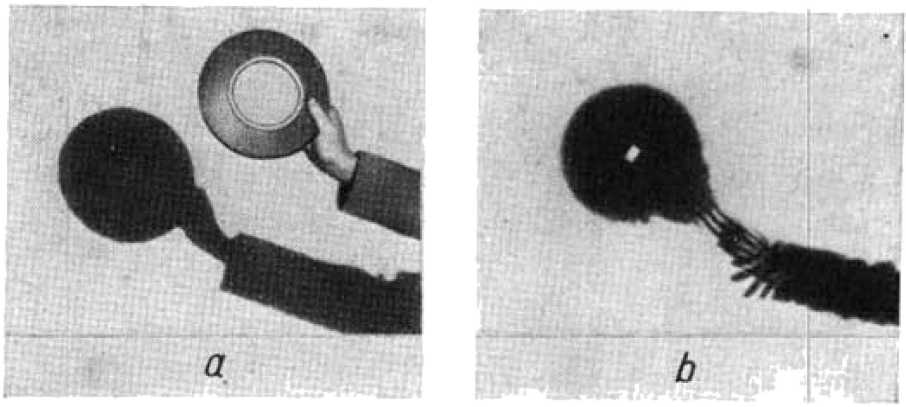

Foto. 1. Difracción de los rayos al formarse las sombras.

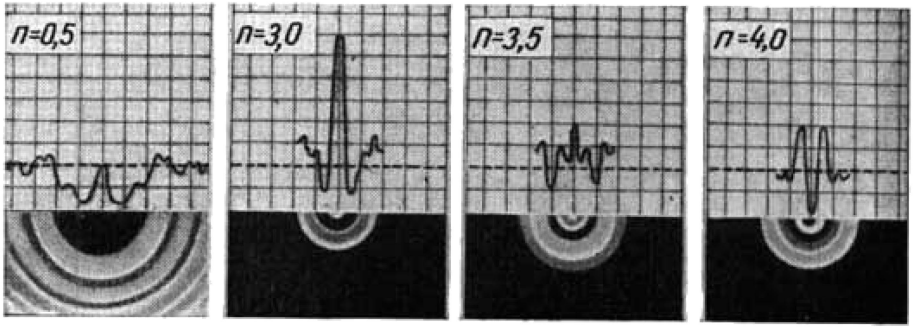

Foto 2. Difracción por un orificio circular.

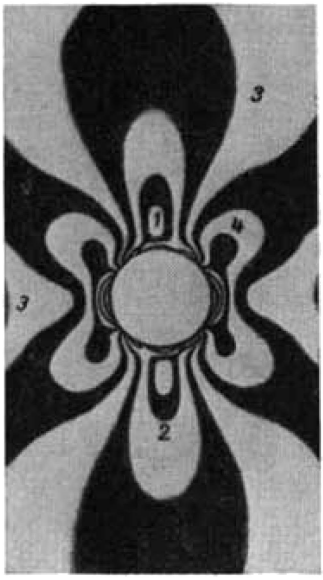

Foto 3. Isócromas que aparecen al estirar una lámina con un orificio redondo.

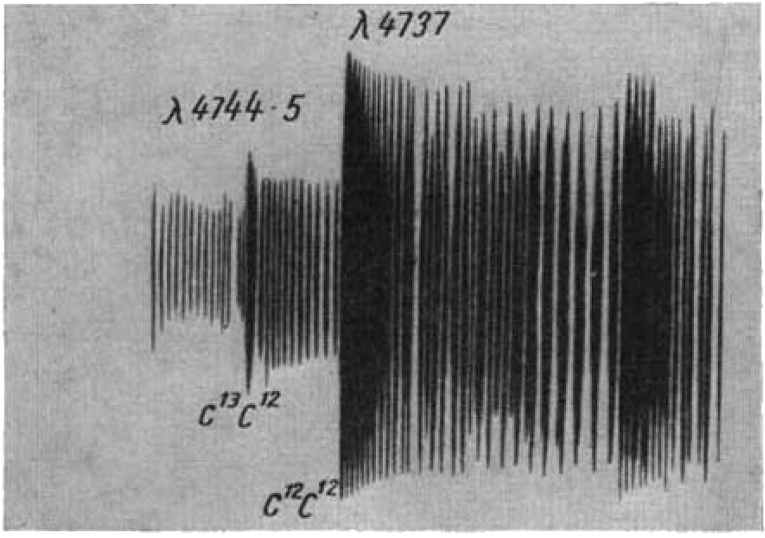

Foto 4. Desplazamiento isotópico de las bandas del C_2.

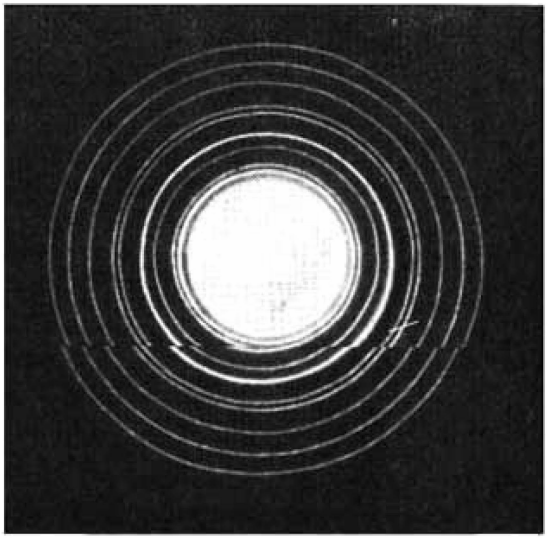

Foto 5. Círculos de difracción que se producen cuando un haz de electrones atraviesa una hoja de cobre.

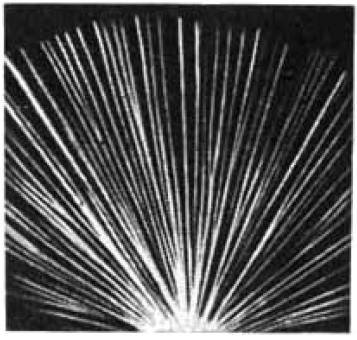

Foto 6. Huellas de partículas α.

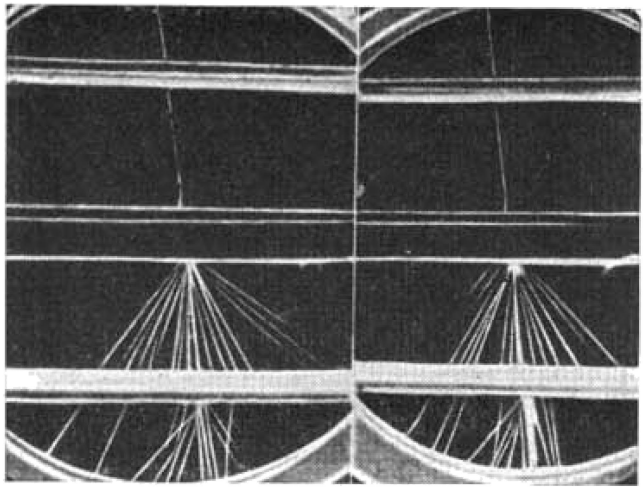

Foto 7. Formación de un chaparrón en cascada.

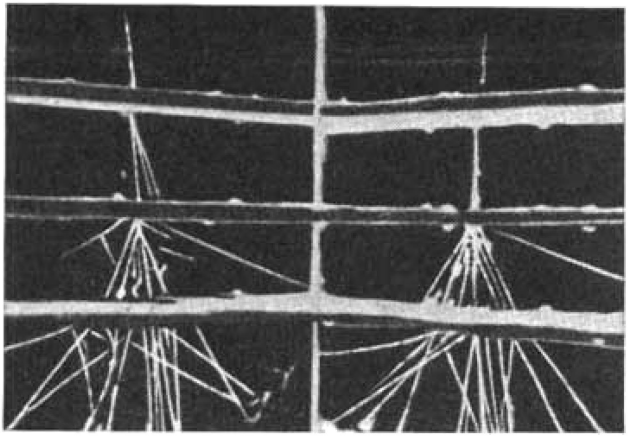

Foto 8. Chaparrón originado por un mesón.

INDICE ALFABÉTICO

Aberración cromática 251
— esférica 349
— de la luz 29
Abertura 362
— de entrada, ángulo de 369
— relativa 381
— de salida, ángulo de 364
Absorción de la luz 145
— negativa 508
Acomodación 366
Acromatismo 356
Actividad óptica 226
Adaptación 282
Alcance (recorrido) de las partículas 594
— de los protones 607, 610
Alijantán 429, 620, 652
Altjánov 429, 600, 620, 652
Americio 643
Amplitudes de las ondas reflejadas y refractadas 150
Amplitud de las vibraciones en el rayo extraordinario 193
— — en el rayo ordinario 193
Análisis estructural roentgenográfico 136
— fluorimétrico 547
Analizador de penumbra 230
Anderson 649, 651
Angulo de Brewster 48, 49
— de desviación mínimo 177
— límite 21
Anillos de Newton 75, 152
Aniquilación 649
Anisotropía artificial 221
Anteojo astronómico 373
— de Galileo 378
— «videonocturno» 318, 374
Anticátodo 55
Antipartícula 658, 659, 660
Antiprotón 628
Anti-Stokes, región 544
Aparatos polarizadores 208
Apertura numérica 387
Aplicación de las interferencias 75
Apostilb 278
Arkádiev 11, 54
Artsimóvich 620
Astigmática, diferencia — 317
Astigmático, haz — 316, 320
Astigmatismo 317, 351
Aumento angular 329
— lateral 327
— longitudinal 329
— que produce un sistema 338
— que produce un sistema telescópico 347

Balmer 438
— serie de — 438, 440, 454
Bandas electrónico-vibracionales 516
— de fluorescencia 518
— moleculares 511
Barn 616
Barrera de potencial 567
Batería solar 414
Berkelio 643
Betatrón 625
Biberman 559
Bielopolski 256
—, experimento de — 256
Binormal 207
Biprisma 63
Birradial 205
Blojíntsev 546
Bohr 443, 444, 449, 454, 636
Bonch-Bruevich 239
Bosón 658
Bredijin 60
Brewster 48

Caja de potencial 564, 566
Californio 643
Cámara fotográfica 380
— obscura 10
— de Wilson 591
Camino óptico (recorrido) 24, 25, 353
Candela (bujía) internacional 276
Cantidad de movimiento del flujo luminoso 56
— — del fotón 409
Capa completa 493
Capas electrónicas 490
— —, constitución de las — 490, 494

Captura de un electrón *K* 605
Característica de voltios-amperios 400, 406
Carga del núcleo 435
Catodoluminiscencia 547
Cáustica 320
Célula fotoeléctrica 283, 412
— — con capa de barrera (fotovoltaica) 414
— — sólida 414
Centelleo 434, 590
Ciclotrón 622
Coeficiente de absorción 146, 174
— de arrastre 235
— de extinción 186
— de reflexión 160
Color 43
Coloraciones complementarias 220
Colores de las láminas delgadas 73
Coma 350
Compensador 217
— de Babinet 217
— de Soleil 217
Composición de las amplitudes 92
Composición gráfica de las amplitudes 96
— de los momentos 483
Condición de los senos (de Abbe) 350, 354
Conos 281
Constante de desintegración radiactiva 582
— de un patrón 130
— de Rydberg 440, 452, 456
Contador de Cherenkov 594
— de partículas 592
— de partículas, de centelleo 590
— de partículas, de ionización 592
— — proporcional 593
Conversión interna 598
Córnea 281
Cornu, espiral 107
Correlación entre la masa y la energía 260, 610
Cristal biáxico 193, 204
— negativo 198
— positivo 198
— uniáxico 193
Cristalino 281
Cuantificación 557
— de la energía 450, 557, 565, 568
— espacial 464
Cuantos de luz (fotones) 408
Cubo de Lummer y Brodhun 287
Cuerpo gris 306
— negro 296
Curva potencial de una molécula diatómica 513, 527, 531
Curio 589
Curie Irene 611, 616
Curie Pierre 581
Curie-Sklodowska Marie 581
Curio 643

Chaparrón 650, 652
— de ionización 652
— de radiación 652
Cherenkov 396

Davisson 551
Defecto de masa 580
Defectos de los sistemas ópticos 348
Densidad del flujo luminoso (de la radiación) 57, 304, 507
Desdoblamiento de las rayas espectrales en presencia de un campo eléctrico (efecto Stark) 472
— — — en presencia de un campo magnético (efecto Zeeman) 469, 471
Desintegración alfa 594
— beta 602
— nuclear por choque con deuterones 621
— nuclear por choque con partículas α 606
Designetgración nuclear por choque con protones 621
— nuclear producida por neutrones 614
— por resonancia 611
Desplazamiento isotópico de las bandas moleculares 534
Desviación de las partículas 430
deuterio 456
deuterón 614, 626
Diafragma de abertura 362
— real 362
Dicroísmo 193
Difracción 11, 40, 88
— de Fraunhofer 108
— de haces electrónicos 551
— en el microscopio 388
— por obstáculos opacos 100
— por ondas ultrasonoras estacionarias 136
— por un orificio circular 100, 113
— por una pantalla circular opaca 102
— de rayos paralelos 108, 113
— de los rayos X 137
— por una red espacial 130
— por una red lineal 131

— por una rendija 109
— por varias rendijas 115
Difusión de combinación 537
— de la luz 187, 188
— modulada 536
Difusión molecular 190
— de las partículas α 440
— de los rayos X 415
Dilatómetro de interferencias 78
Disociación de las moléculas 527
Dispersión angular de un prisma 178
— angular de una red de difracción 122
— anormal 169, 172, 173
— de la luz 163
— de una sustancia 164
Distancia focal 324
— de visión perfecta 368
Distorsión 352
Distribución de Bose-Einstein 575
— de Boltzmann 574
— de la emitancia de radiación del cuerpo negro entre las longitudes de onda 299, 306
— de la energía en el espectro de rayos X 395
— de Fermi 574
— de la intensidad cuando interfieren muchos haces 118
— de la intensidad en la luz difusa 188
— de las partículas β por velocidades 603
Doble refracción 191
— — artificial 221
— — en un campo eléctrico 223
Dobletes espectrales 480
Dobretsov 629
Dobronrávov 15, 410
Dobrotin 651

Efecto Compton 416
— Doppler 253
— Doppler transversal 255
— fotoeléctrico 14, 412
— fotoeléctrico interno 413
— fotoeléctrico selectivo 403
— óptico-acústico 286
— Stark 472
— Zeeman 471
— Zeeman anómalo 472
Eficacia luminosa 266, 267, 283
Einstein 240, 261, 403, 505, 508
Einsteinio 643
Eje óptico del cristal 193
— — de primer orden 205
— — principal 321
Electrón de conversión 598
— de valencia 475
Electrones equivalentes 489
Elementos transuránicos 639, 641
Emanación del radio 581
Emitancia energética 293
— de radiación del cuerpo negro 294
— de radiación integral 293
Energética nuclear 643
Energía atómica 429
— de la capa electrónica de la molécula 511, 515, 522
— de desintegración de los núcleos 580, 608, 640, 643
— de disociación de las moléculas 528
— de los estados estacionarios del átomo 444, 450, 475
— de formación de los núcleos 580, 636
— del fotón 409
— de ionización 458, 502
— de ligadura de las partículas del núcleo 580, 636, 637
— nuclear 580
— de las partículas 608
— de rotación de las moléculas 511, 519, 520
— de vibración de los núcleos atómicos que entran en la composición de la molécula 511, 513
Enlace atómico 510
— iónico 510
Equivalente mecánico de la luz 279
Escala de las ondas electromagnéticas 53
Espacio μ 573
Espectro 165
— de absorción 174, 441, 459, 517, 529
Espectro atómico 438, 453, 474
— continuo 165, 458, 517, 543
— de fluorescencia 448, 518, 543
— molecular 511, 519, 522, 532
— de rayas 165
— de rayos γ 598
Espectro de rayos X 495, 498, 500
Espectrógrafo 176
— magnético 600
— de rayos X 139
Espectroscopia de gran poder separador 126
Espejismo 185
Espín del electrón 479, 480
— isotópico 661
Esquema de coincidencia 593
— de los niveles 445, 446, 549, 477, 485, 502

Estadística clásica 572
— cuántica 572
Estado degenerado 462
— estacionario 444
Estados metaestables 485
Estructura del átomo 429, 449, 486
— hiperfina de las rayas espectrales 629
Estructura de las moléculas 509
— del núcleo atómico 429, 633
Eter 12, 148, 236, 238
Euclides 16
Excitación por choque de electrones 447

Fabrikant 508, 559
Fajas (cinturones) de radiación 636
Familias de elementos radiactivos 586
Faraday 231
Fase de una vibración 89, 103
Fasotrón 624
Fenómeno «actinoeléctrico» 398
Fermio 643
Fermión 658, 660, 661
Fisión nuclear 638
Fizeau 31
— experimento de — 235
Flórov 639
Fluctuaciones de los flujos luminosos 411
Flujo de energía radiante (luminoso) 56, 264
— luminoso 264, 278, 283
— luminoso que pasa por un sistema óptico 358
Fluorescencia 448, 541
— resonante 448
Foco principal 324, 335, 339, 340
Focos principales del ojo 367
Fok 100, 261
Formación de pares 619
Fórmula de Einstein 403
Fosforescencia 541
Fósforos 545
— sublimados 545
Fotodesintegración del núcleo 615
Fotografía en colores 46
Fotoionización 459
Fotoluminiscencia 292
Fotometría 276
— objetiva 280
Fotometría visual 281
Fotómetro de esfera 291
— fotoeléctrico diferencial 289
— de prisma triangular 287
Fotón 14, 408, 430, 619

Fotorresistencias 413
Foucault 32, 40
Fragmento nuclear 639
Franjas de interferencia de igual espesor 66, 71
— — de igual inclinación 66, 70
Frank 396
Fraunhofer 108, 121
Fraunhofer, líneas de — 165
Frenkel 636
Frente de onda 36
Fresnel, romboedro de — 159
—, espejos de — 61
—, fórmula de — 148, 156
Fuentes de luz 305
Función amplitud 556

Gafas 378
Gemelos 378
— de campaña 379
Generador de Van de Graaff 621
Germer 551
Giro magnético del plano de polarización 230
— del plano de polarización 226
Glagóleva-Arkádieva 54
Golitsin 14, 257
Grado de polarización 212
Gross 537

Haz de rayos astigmático 316, 317
— — homocéntrico 315, 316
Heisenberg 561, 563
Hiperón 659, 662
Humor vítreo 281
Huygens 11, 36

Iluminación (iluminancia) 270, 277, 281
— dentro de una esfera 291
Iluminación dentro de los límites de la imagen 361
Ilusiones ópticas 368
Imagen 327, 328
Imagen que produce una lente delgada 332
— — — un sistema óptico 336
— — — un sistema telescópico 346
Indicador de Goley 286
Indice de refracción absoluto 17
— — en función de la longitud de onda 144, 160, 170
— — de los metales 163
— — del rayo extraordinario 202

Indice de refracción del rayo ordinario 202
— — relativo 17
Inmersión 388
Inspección de la calidad de las superficies por el procedimiento de las interferencias 76
Instrumentos ópticos 371
Intensidad de la luz 268
— de la luz difusa 189
— de las rayas espectrales 503
— del rayo extraordinario 194
— del rayo ordinario 194
— del rayo polarizado 194
— de los rayos reflejados 21, 148
— de los rayos refractados 21, 148
Interacción débil 660
— electromagnética 660
— fuerte 660
— piónica 660
Interferencia 11, 40, 61
— producida por láminas delgadas 73
— de rayos polarizados 212
— de rayos X 136
— por la reflexión en láminas de caras planas y paralelas 66
— de varios haces 116
Interferometría 83
Interferómetro 78
Interferómetro de Fabry y Perot 128
— de Jamin 78
— de Michelson 82
— de Rozdhdiéstvenski 173
Invariante de Lagrange—Helmholtz 329, 333
Ioffe 15, 399, 409
Ioffe y Dobronrávov, experimento de — 410
Ioffe, experimento de — 400
Ionización del átomo 499
Isótopos 578
— estables 587
— radiactivos 616
Ivanenko 395, 429, 634
Ives 257

Joliot Curie 611, 616

Kápitsa 595
Kerr, célula de — 223
Kerr, constante de — 223
Kerr, efecto de — 223
Klement 545
Kózirtev 285, 290
Kravets 425
Kulibin 318
Kurchátov 429, 628

Lámina de caras planas y paralelas 66
— de cristal entre dos nicoles 217
— de cuarto de onda 215
— de media onda 215
Lámpara fluorescente 309
— de incandescencia 309
Landau 637
Landsberg 15, 538
Laser 509
Laue, experimento de — 137
Lawrencio 643
Lenin 15, 262, 427, 619
Lente acromática 356
— delgada 331
— gruesa 340
Lentes delgadas situadas entre sí a una distancia finita 344
Ley de Brewstor 48
— de desplazamiento 585
— exponencial de la amortiguación 544
— hiperbólica de la amortiguación 545
— de Kirchhoff 297
— de Lambert 273
— de Moseley 455, 491, 501
— de Rayleigh 189
— de la reflexión 16, 39
— de la refracción 16, 39
— de Stefan-Boltzmann 300
Ley de Wien 300
Liébedev 14, 409
Línea focal 317
Línea meridiana 320
— — sagital 320
Línnik 64, 137
Línnik, experimento de — 64, 83, 137
Linterna de proyección (proyector) 381
Lodiguin 308
Lomonósov 12, 36, 318, 374, 426
Lorentz—Lorenz, fórmula de — 175
Lorentz, teoría de — 145, 427
Lukirski 405, 654
Lumen 277
Luminancia (brillo) 273, 278, 360, 370
Luminiscencia 541
Luminosidad (emitancia luminosa) 270
— del objetivo 381
Lupa (microscopio simple) 371
Lux 277
Luxímetros 291
Luz 110
— natural 48, 154

Luz polarizada 48, 154
— polarizada parcialmente 49, 214
— polarizada en un plano 48, 154, 208
Lloyd, experimento de — 63, 152

Magnetón de Bohr 467
— nuclear 630
Magnitudes fotométricas, unidades 276
Maksutov 376
Malus, fórmulas de 194
Mancha amarilla 281
Mandelshtam 15, 160, 392
Maser 509
Maxwell, teoría de 144
Mecánica cuántica 548
Medición de ángulos por medio de las interferencias 75
— de longitudes por medio de las interferencias 77
— de la longitud de las ondas luminosas 43, 84, 126
Medidas de caras paralelas 87
Mega electrón-voltio 580
Mendelétev 429, 486
Mendelevio 643
Menisco convergente 343
— divergente 343
Mesón 651
Método de los átomos trazadores 629
— para descubrir heterogeneidades 185
— fotoelástico 223
— de las placas fotográficas de capa gruesa 593
Michelson, experimento de — 238
Microcurie 589
Microparticulas 548, 558
Microscopio compuesto 376
Mijelsón 302
Milicurie 589
Misovski 593, 653
Modelo nuclear del átomo 429
— — de capas 638
Molchánov 239
Molécula diatómica 510
Momento magnético del átomo 464
— magnético del electrón 479
— mecánico del electrón 479, 480
— nuclear 629
— orbital 480
— total 481
Multiplicador fotoeléctrico de Kubetski 284

Neptunio 642
Nervio óptico 281
Neutrino 605
Neutrón 611
Newton 12, 43, 165, 170
Niveles de energía de los átomos 445, 453, 477, 485, 502
— — en los cristales 546
— — en las moléculas 514, 520, 523, 527
— — en el núcleo 601, 608
Nobelio 643
Núcleo atómico 577
Nucleón 634
Número de carga (atómico) 435, 457, 486, 577
— cuántico 450, 472, 577
— cuántico acimutal 460
— cuántico efectivo 475
— cuántico magnético 469, 572
— cuántico principal 461, 568
Número cuántico radial 460
— cuántico rotacional 519
— cuántico secundario 482
— cuántico vibracional 513
— de ondas 438

Objetivo 373, 378, 381
Observación de la dispersión 170
Ocular 373, 378
Ocular de Huygens 345, 364
Ojo 281
— miope 367
— hipermétrope 367
— reducido 366
Onda difusa 187
— electromagnética 50
— elipsoidal 198
— esférica 198
— estacionaria 44, 45, 52
Optica 9
— de los cuerpos en movimiento 250
— geométrica aplicada 315
Orbita circular 451
— elíptica 459
Ortohelio 484
Ortohidrógeno 630

Pantallas complementarias 103
Paquete de ondas 563
Parahelio 484
Parahidrógeno 630
Partícula alfa 430, 582, 594, 621
— beta 589, 591, 599, 603
— elemental 548
— extraña 662

Patrón de longitud 84, 87
— de Fabry y Perot 86, 128
Percepción de la luz 86, 128, 280
Pérdidas por ionización 650
— por radiación 650
Perfilov 654
Pedíodo de semidesintegración (semiperíodo) 582
Petrov 14, 308, 542
Petrzhak 638
Pirometría óptica 310
Pirómetro de filamento que desaparece 312
— de radiación 313
Planck, constante de — 14, 303, 396, 450
— fórmula de — 303, 507
Planos principales de una lente delgada 344
— principales de una lente gruesa 340
— principales del ojo 367
— principales de un sistema óptico 333, 336, 339
— principales de una sola superficie refringente 339
Plutonio 642
Poder absorbente (absortividad) 294
Poder óptico 323
— rotatorio específico 229
— separador de los instrumentos ópticos 384
— separador de un microscopio 388
— separador de un objetivo 384
— separador de un prisma 180, 181
— separador de una red de difracción 122
Polarización 46
— circular 159, 212
— cromática 220
— por doble refracción 191
— elíptica 159, 162, 212
— parcial 49, 223
— por reflexión 47, 49, 150
— por reflexión en los metales 162
— por refracción 49, 149, 150
Polaroide 211
Polonio 581
Pomeranchuk 395
Posiciones de los planos principales de un sistema óptico 339
Positrón 616, 649
Potencia del flujo luminoso, 264, 278
— de la radiación 265
Potencial crítico 448
— de ionización 458, 502
— de resonancia 448
Predisociación 532
Presión de la luz 57, 59, 60
Prilezhdev 405
Principio de Fermat 24
Principio de Franck-Condon 531
— de Huygens 36
— de Huygens—Frensnel 88
— de incertidumbre 563
— de Pauli 488, 489
Prisma 20, 176
— de Nicol 209
— de reflexión total 21, 379
— de Wollaston 209
Prismas cruzados 170
Probabilidades de los estados 573
— de transición 503
Proceso fotográfico 423
Procesos concurrentes 627
Propagación de la luz en medios en movimiento 234
— rectilínea de la luz 10, 11, 94
Propiedades ondulatorias de las partículas 548
Protón 435, 624, 630
Proyector 381
— reflector 384
Punto ciego 281
— principal 335
— próximo 367
— remoto 367
Puntos conjugados 323
Pupila 281
— de entrada 363, 364
— de salida 363, 366
Púrpura visual 425

Quimioluminiscencia 292

Radiación continua 394, 397
— del cuerpo negro 300
— de Cherenkov 396
— del electrón 393
— equilibrada 393
— de frenado (o enfrenamiento) 305, 394, 396
— de temperatura 292
Radiactividad artificial 618
— natural 581
Radiador ideal 296
Radiadores de coseno (o que cumplen la ley de Lambert) 273
Radio 581
Radioespectroscopia 630
Radón 581
Rama nula (Q) 523
— negativa (R) 521, 523
— positiva (P) 521, 523

Rayleigh, criterio de — 124
Rayleigh—Jean, fórmula de — 301, 507
Rayo 10
— extraordinario 192, 198
— ordinario 192, 198
Rayos cósmicos 646
Rayos gama 55, 581, 588, 619
— infrarrojos 54, 160
— paraxiales 322
— Roentgen 55
— ultravioletas 54, 177
— X 55, 137
Reacción termonuclear 646
— termonuclear controlada 646
Reacciones sensibilizadas 424
— fotoquímicas 422
— nucleares 614, 621
— en cadena 638, 640
Reactor 641, 644
— nuclear 644
— de uranio 641, 643
Red de difracción 115, 120, 125
— de difracción bidimensional 132
— de difracción cóncava 126
— de difracción espacial 134
— de difracción reflectora 122
Reflexión difusa de la luz 19
— de la luz 16, 37, 149
— de la luz en un metal 160
— de la luz en una superficie plana 318
— total 21, 159
Refracción astronómica 185
— atómica 176
— cónica externa 207
— cónica interna 207
Refracción de la luz 16, 37, 149
— de la luz en un prisma 20, 177
— de la luz en una superficie esférica 321
— de la luz en una superficie plana 318
— nuclear 176
Refractividad de la sustancia 175
Región central del átomo 475
Regla de Geiger—Nuttall 595
— de las intensidades 505
— de selección 445, 470, 476
— (ley) de Stokes 518, 543
Rendimiento cuántico 546
Resonancia cuadripolar 633
— magnético-nuclear 633
— paramagnética 474
Retina 281
Roemer 28
Rozhdiéstvenski 14, 173, 392, 429
Rozhdiéstvenski, procedimiento (de los «gauchos») para observar la dispersión anormal 173
Rusinov 628
Rutherford 434, 581, 606, 621

Sacarímetro 229
Salto de fase 158
Savostiánova 425
Schrödinger, ecuación de — 553
Sección de captura 615
Sensibilizador 423
Serie de Balmer 438, 440, 455
— isoelectrónica 457, 492, 494
Series espectrales 438, 439, 441, 453
— de elementos radiactivos 586
Sincrofasotrón 624
Sincrotrón 624
Singuletes 483
Sistema óptico 333
— óptico del ojo 366
— periódico de Mendeléiev 485, 501
— de superficies centradas 333, 339
— telescópico 345
Skobeltsin 419, 429, 600, 648
Smolujovski 190
Stern y Gerlach, experimentos de — 468, 630
Stilb 277
Stoliétov 14, 398
Suma luminosa 545
Superficie de onda 198, 204
— de onda en un cristal biáxico 204
— de onda en un cristal negativo 198
— de onda en un cristal positivo 198
— de onda en un cristal uniáxico 195
Superficies absolutamente mates 19
— de fases iguales 182
Sushkin 559
Sustancia anisótropa 191
— dextrógira 227, 232
— ópticamente heterogénea 24, 184
— ópticamente homogénea 24
— levógira 227
— turbia 186

Tamm 397, 646
Tartakovski 551
Telémetro 379
Telescopio 374
— de Maksutov 376
— reflector de Newton 375
Temperatura de brillo 313
— del color 311
— de radiación 315

Teoría atómica 426
— de Bohr 443, 444, 449, 478, 586, 636
— corpuscular de la luz 12, 39, 40
— electromagnética 50
— fotónica 413, 423, 619
— general de la relatividad 261
— de la «gota líquida» 636
— de la luz 12, 36, 50, 410, 411
— de la relatividad 240
Terenin 449, 530, 629
Terenin, método para determinar la energía de disociación de las moléculas 530
Terletski 625, 656
Términos espectrales 441, 443
— de los rayos X 501
Termistor 286
Termodinámica de las radiaciones 292
Tierras raras 495
Timiriázev 422
Torcedura de los rayos 184
Torcimientos estructurales 186
Transformación de Galileo 241
— de Lorentz 243, 247
— de los pares 619
Transición isomérica 628
Tripletes 484
Tritio 457, 626, 645, 646
Tubo de rayos X 55

Ultramicroscopio 392
Umbral fotoeléctrico 402
— de visibilidad 282
Umov, vector de — 152
Unidades energéticas 278
Uranio 581, 641

Variación de fase 151
Vavilov 15, 309, 429, 544, 545
Vector amplitud 96
Vector de Umov 152
Vectores amplitud, composición de los — 96, 105, 110, 111
Véinguerov 285, 290
Veksler 624, 651
Velocidad de la luz 28, 36, 181, 226
— —, determinación por medio de células de Kerr 226
— —, determinación por medio del procedimiento de la aberración de la luz 29
— —, determinación por el procedimiento astronómico 28
— —, determinación por el procedimiento del espejo giratorio 32
— —, determinación por el procedimiento del prisma giratorio 34
— —, determinación por el procedimiento de la rueda dentada 31
— —, de fase 181
— —, de grupo 181
Visión binocular 369
— estereoscópica 369
— foveal (diurna) 282
— nocturna 282
— periférica 282

Wood 171, 449
Wulff 140
Wulff y Bragg, condición de — 140

Yáblochkov 308
Young, experimento de — 41

Zhdanov 593, 653
Zonas anulares (de Fresnel) 89
— en forma de franjas 105

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, GSP, Moscú I-110, 129820 URSS.